

**ÉCOLE D'INGÉNIEURS DE FRIBOURG (E.I.F.)**  
**SECTION DE MÉCANIQUE**  
**G.R. Nicolet, revu en 2006**

# **CONCEPTION ET CALCUL DES ÉLÉMENTS DE MACHINES**

**VOLUME 2**  
**Version 1, juin 2006**

**Dynamique de la transmission**  
**Axes et arbres de transmission**  
**Généralités sur les paliers et les butées**  
**Butées et paliers hydrostatiques**  
**Butées et paliers hydrodynamiques**  
**Butées et paliers à roulements**  
**Guidages linéaires à roulement**  
**Accouplements et joints d'arbre**  
**Mécanismes à cames**



# ORGANES DE TRANSMISSION DIRECTE

Les organes de transmission directe à composants mécaniques sont des éléments de machines qui permettent d'assurer la transmission d'une certaine quantité d'énergie d'une partie motrice vers une ou plusieurs machines réceptrices. La transmission est dite directe s'il n'y a pas de modification de la fréquence de rotation dans l'organe de liaison.

L'étude des éléments de transmission directe comprend les éléments de machines suivant :

1. Axe et arbre.
2. Paliers et butées simples.
3. Paliers et butées hydrostatiques.
4. Paliers et butées hydrodynamiques.
5. Paliers et butées à roulement.
6. Accouplements et joints d'arbre.
7. Mécanismes à cames.

## CHAPITRE 9

### DYNAMIQUE DE LA TRANSMISSION

Avant de commencer l'étude des divers éléments de machines utilisés comme organe de transmission, il est nécessaire de compléter les connaissances sur les grandeurs mécaniques et les facteurs extérieurs influençant le comportement de l'ensemble.

#### 9.1 RAPPEL DE MÉCANIQUE

La technique des entraînements impose le choix du moteur et des éléments intermédiaires en fonction des conditions imposées par la machine réceptrice de manière à remplir pleinement toutes les fonctions exigées comme une sécurité suffisante contre toutes les surcharges prévisibles, un rendement énergétique élevée, un niveau sonore réduit, l'absence de phénomènes vibratoires gênant, etc.

##### 9.1.1 RELATIONS GÉNÉRALES

Les relations fondamentales de la mécanique rationnelle s'appliquent directement aux organes de transmission. Elles expriment la valeur des couples moteurs et récepteur en fonction des vitesses linéaires et angulaires. Rappelons brièvement les formules fondamentales, les symboles et les unités utilisées dans ce chapitre, bien que les équations proposées seront si possible des équations de grandeurs, donc ces relations ne dépendront pas des unités utilisées.

- |  |                    |                       |
|--|--------------------|-----------------------|
| 1. Fréquence de rotation :                                 | $n$                | [tours par seconde]   |
| (elle est encore donnée très souvent en tours par minute). |                    |                       |
| 2. Vitesse angulaire :                                     | $\omega = 2 \pi n$ | [radians par seconde] |
| 3. Puissance transmise :                                   | $P = M \omega$     | [watts]               |
| 4. Position du point au rayon :                            | $r$                | [mètres]              |

5. Vitesse circonférentielle :  $v = \omega r = 2 \pi n r$  [mètres par seconde]  
 6. Couple transmis :  $M = P/\omega = P/(2 \pi n)$  [mètre \* newtons]

Ces diverses relations restent valables en chaque instant même dans les entraînements à vitesse variable. La vitesse angulaire, la puissance et le couple sont alors des valeurs instantanées. L'effet de l'inertie des masses en rotation et/ou en translation doit s'introduire obligatoirement dans un calcul complet d'une transmission mécanique.

En régime permanent à vitesses constante, régime excessivement rare en pratique, les forces et les couples engendrés par l'inertie des masses sont nuls. Le calcul des conditions mécaniques de transmission est alors fortement simplifié. Bien souvent, il est très difficile, voire même impossible, de chiffrer avec précision les effets des variations de couple engendrées par les accélérations des masses, tant sur le moteur que sur le récepteur. De plus, le nombre de types de machines motrices et surtout de machines réceptrices différents étant très élevé, pour simplifier la recherche des efforts ou le choix des organes, les valeurs nominales de la puissance et du couple, trouvées à vitesse constante, sont multipliées par un facteur de correction appelé *facteur de service*. Cette correction apportée à la recherche de la taille des organes varie habituellement avec le type de machine motrice, de machine réceptrice et la nature des éléments de liaison. Les fabricants d'éléments de transmission indiquent ces facteurs de service dans des listes plus ou moins détaillées de leurs catalogues.

Les à-coups sont à craindre particulièrement dans les machines équipées de mécanismes à leviers articulés comprenant des pièces en mouvement alternatif comme les moteurs à combustion interne, les compresseurs et les pompes à pistons ou les transformateurs de mouvement à chaînes et articulations. Le contrôle et le choix des organes de transmission doivent envisager toutes les forces et les couples statiques et dynamiques provoqués par la charge dans toutes les conditions de service. Les périodes à vitesse variable comme les démarrages et les ralentissements jusqu'à l'arrêt complet, les surcharges accidentelles, ne seront pas oubliées pendant toute l'étude.

### 9.1.2 ACCÉLÉRATION MOYENNE

Pour faciliter les calculs et simplifier fortement la solution des problèmes d'entraînement, il est possible d'admettre, dans une étude préliminaire et des plus sommaire, une accélération linéaire ou angulaire constante pendant les périodes à vitesse variable comme pendant le démarrage ou l'arrêt de la transmission. Si  $\Delta t$  représente l'intervalle de temps prévu pour atteindre la variation de vitesse linéaire  $\Delta v$  ou la variation de vitesse angulaire  $\Delta \omega$ , l'accélération linéaire  $a_m$  ou l'accélération angulaire moyenne  $\alpha_m$  se trouvent simplement par les quotients de la différence des vitesses par l'intervalle de temps correspondant :

Accélération linéaire moyenne :

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (9.1.1)$$

Accélération angulaire moyenne :

$$\alpha_m = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \quad (9.1.2)$$

Cette méthode simplifiée de trouver l'accélération n'est qu'une approximation très grossière et donne de très mauvais résultats dans les entraînements avec couples moteur et récepteur fortement variables. L'étude de la dynamique du système sera complétée par l'introduction des conditions réelles de fonctionnement. Le but final est d'adapter le moteur, le récepteur et les éléments intermédiaires aux sollicitations probables en service afin d'optimiser les coûts.



### 9.1.3 ACCÉLÉRATION À VITESSE VARIABLE

Le couple des moteurs électriques et des moteurs à combustion interne est habituellement donné en fonction de la fréquence de rotation ou de la vitesse angulaire, et non en fonction du temps :

$$M_{\text{mot}} = M_{\text{mot}}(\omega) .$$

Supposons le couple moteur  $M_{\text{mot}}$  et le couple récepteur  $M_{\text{réc}}$  sur l'arbre intermédiaire parfaitement connus et dépendant directement de la vitesse angulaire. Pendant la période de démarrage, le couple moteur doit rester toujours supérieur au couple résistant si l'accélération angulaire doit rester positive :  $M_{\text{mot}} > M_{\text{réc}}$ . Le couple utile, permettant à l'ensemble d'accélérer, est égal à la différence entre ces deux couples :

$$M_{\text{utile}} = M_{\text{mot}} - M_{\text{réc}}. \quad (9.2.1)$$

Si  $J_{\text{tot}}$  représente le moment d'inertie de masse total calculé sur l'arbre moteur, l'accélération angulaire vraie sur cet arbre se trouve par :

$$\alpha_{\text{mot}} = \alpha_{\text{réc}} = \frac{M_{\text{mot}} - M_{\text{réc}}}{J_{\text{tot}}} = \frac{M_{\text{utile}}}{J_{\text{tot}}}. \quad (9.2.2)$$

Dans cette expression générale, le couple utile  $M_{\text{utile}}$  est aussi une fonction de la vitesse angulaire :  $M_{\text{utile}} = M_{\text{utile}}(\omega)$ . En introduisant cette caractéristique mécanique dans l'expression précédente, la relation devient :

$$\alpha_{\text{mot}} = \alpha_{\text{réc}} = \frac{M_{\text{utile}}(\omega)}{J_{\text{tot}}}. \quad (9.2.3)$$

Cette relation différentielle permet de trouver la vitesse angulaire en fonction du temps en résolvant l'équation différentielle du premier ordre par une méthode adéquate, très souvent par une méthode numérique, en particulier si le couple utile est connu seulement sous forme numérique.

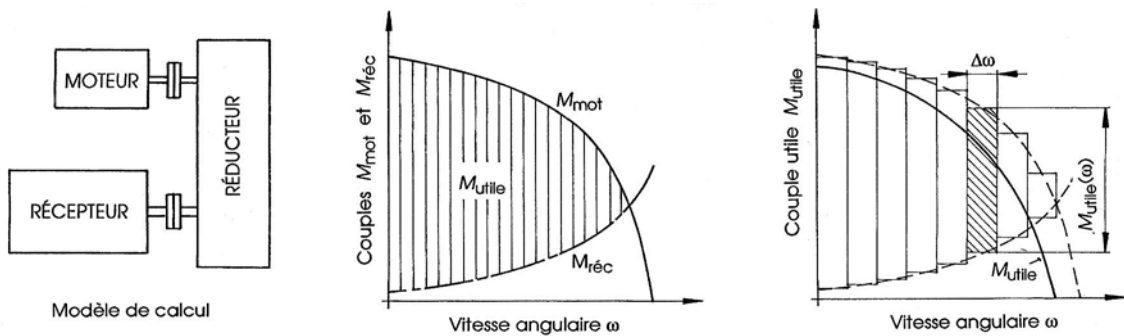


Figure 9.1 Transmission entre un moteur et un récepteur  
Couples moteur, récepteur et utile. Calcul cinématique de la transmission

Dans la plupart des cas, les couples moteur et récepteur sont donnés sous forme de courbes relevées expérimentalement. Si l'expression du couple utile peut se donner sous forme analytique, les méthodes usuelles de résolution peuvent s'introduire directement dans la solution : intégration analytique ou méthode numérique comme par exemple la méthode de Runge-Kutta.

Si par contre l'expression du couple utile ne peut pas se donner sous forme analytique, il est possible de trouver les intervalles de temps successifs écoulés pour une variation de vitesse angulaire  $\Delta\omega$ . En partant de la relation différentielle exacte et après séparation des

variables, il est possible d'écrire l'intervalle élémentaire de temps en fonction de la variation élémentaire de vitesse angulaire sous la forme :

$$dt = \frac{d\omega}{M_{\text{utile}}(\omega) / J_{\text{tot}}}. \quad (9.2.4)$$

Pratiquement, la variation totale de la vitesse angulaire sera divisée en un certain nombre d'intervalles égaux, si possible en  $2^n$  pas. Le temps nécessaire pour passer de la vitesse angulaire  $\omega_i$  à la vitesse angulaire  $\omega_{i+1}$  c'est-à-dire d'obtenir une variation de vitesse :  $\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i$ , peut se trouver approximativement par :

$$\Delta t \approx \frac{\Delta\omega}{M_{\text{utile}}(\omega) / J_{\text{tot}}}. \quad (9.2.5)$$

Dans cette expression,  $M_{\text{utile}}$  est le couple utile moyen dans l'intervalle de temps calculé  $\Delta t$ . Finalement, la détermination de tous les intervalles de temps en fonction de la variation de vitesse angulaire permet d'approximer l'expression cinématique :  $\omega = \omega(t)$ . Le mouvement circulaire varié étant connu, les définitions fondamentales de la cinématique sont directement applicables.

*Remarque importante* : Sur la figure 9.1, le couple utile est nul lorsque la vitesse angulaire atteint sa valeur nominale  $\omega_n$ . Cela présuppose qu'à la vitesse nominale, le couple moteur est exactement égal au couple du récepteur. Pour atteindre cette vitesse nominale, le dernier intervalle de temps calculé devrait tendre vers l'infini. Pour éviter cette difficulté cinématique et dynamique, le couple moteur  $M_{\text{mot}}$  doit toujours posséder une certaine réserve de couple vis à vis du couple récepteur à la vitesse angulaire nominale.

#### 9.1.4 RÉDUCTION DES MASSES

À l'accélération ou au ralentissement des machines tournantes, les forces et couples engendrés par l'inertie des masses se superposent aux efforts statiques. Habituellement, l'accélération linéaire  $a$  et l'accélération angulaire  $\alpha$  sont variables pendant tout mouvement à vitesse variable. Les relations de la dynamique applicables sont :

1. Masse en translation rectiligne :  $F_a = m a$ .
2. Masse en rotation autour d'un axe fixe :  $M_\alpha = J_a \alpha = J_a \cdot d\omega/dt$ .

avec :  $m$  masse en translation,  
 $J_a$  moment d'inertie de masse par rapport à l'axe de rotation.

Si la transmission se compose de plusieurs organes en rotation à des vitesses angulaires différentes, comme par exemple dans un train d'engrenages, la transmission n'est plus directe et les accélérations angulaires sont différentes sur chacun des arbres. Pour faciliter les calculs des effets d'inertie de ces diverses pièces, l'inertie des organes en rotation est réduite habituellement sur l'arbre moteur. Le principe de cette opération consiste à introduire la conservation de l'énergie cinétique en rotation. Soit  $J_x$  le moment d'inertie de masse réel sur l'arbre  $x$  et soit  $\omega_x$  sa vitesse angulaire. La conservation de l'énergie impose :

$$0,5 J_{x \text{ mot}} \omega_{\text{mot}}^2 = 0,5 J_x \omega_x^2,$$

$J_{x \text{ mot}}$  étant le moment d'inertie  $J_x$  réduit sur l'arbre moteur. Cette valeur se trouve par :

$$J_{x \text{ mot}} = J_x \cdot \left( \frac{\omega_x}{\omega_{\text{mot}}} \right)^2. \quad (9.3.1)$$

Très souvent, la transmission comprend aussi des masses en translation rectiligne comme par exemple les poids suspendus aux crochets dans les engins de levage. La conservation de l'énergie cinétique s'applique également à ces masses et la transformation de l'inertie de translation en inertie de rotation se fait par la relation :

$$0,5 J_{m \text{ mot}} \omega_{\text{mot}}^2 = 0,5 m v^2.$$

et :  $J_{m \text{ mot}} = m (v / \omega)^2.$  (9.3.2)

avec :  $J_{m \text{ mot}}$  moment d'inertie de masse réduit sur l'arbre moteur,  
 $m$  masse en translation,  
 $v$  vitesse de la masse en translation.

Si  $J_a$  représente le moment d'inertie total des masses situées sur l'arbre moteur, le moment d'inertie de masse total réduit sur l'arbre moteur sera :

$$J_{\text{tot mot}} = J_a + \sum_{i=1}^n J_{xi \text{ mot}} + \sum_{j=1}^m J_{mj \text{ mot}}. \quad (9.3.3)$$

Le couple à produire sur l'arbre moteur pour vaincre le couple résistant de la machine réceptrice et toutes les inerties des masses en mouvement se calcule par :

$$M_{\text{mot}} = M_{\text{rés}} + \left( J_a + \sum_{i=1}^n J_{xi \text{ mot}} + \sum_{j=1}^m J_{mj \text{ mot}} \right) \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (9.3.4)$$

avec :  $M_{\text{rés}}$  couple résistant statique sur l'arbre moteur.

Le choix correct d'un système d'entraînement, en particulier des caractéristiques du moteur, est dicté parfois par les masses à accélérer ou à freiner et par l'intervalle de temps admissible plutôt que par le couple nominal en régime permanent. De plus, ces relations générales ne tiennent pas compte des pertes par frottement entre les diverses pièces et les conditions de démarrage peuvent être modifiées de fond en comble par le *frottement de repos* comme par exemple dans les machines équipées de paliers lisses, de mécanismes à vis ou de réducteurs à vis sans fin.

## 9.2 CHOIX DE LA MACHINE MOTRICE ET DES ORGANES DE TRANSMISSION

L'étude d'une transmission directe ou indirecte doit introduire toutes les caractéristiques dynamiques des machines motrice et réceptrice, des organes intermédiaires et leur interdépendance. Habituellement, toutes ces grandeurs ne sont pas connues avec précision et la solution consiste à idéaliser l'ensemble en choisissant un modèle aussi fidèle que possible.

Désignons dans ce sous-chapitre par  $P_n$  la puissance nominale du moteur à la fréquence nominale  $n_n$  produisant un couple nominal  $M_n$ . Les caractéristiques générales des composants moteurs comme le couple en fonction de la fréquence de rotation, l'inertie des masses par rapport à l'axe, sont communiquées par les fabricants ou les fournisseurs de moteurs.

### 9.2.1 MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASÉ À VITESSE FIXE

Le moteur asynchrone triphasé à rotor en court-circuit est le moteur les plus souvent utilisé dans les transmissions motorisées jusqu'à des puissances de 100 kW environ car il possède une structure mécanique très simple, supporte des charges variables et son prix de revient reste très compétitif. L'inconvénient majeur de ce moteur dans son exécution fondamentale est l'impossibilité d'obtenir une variation de la fréquence de rotation. Les caractéristiques mécaniques principales intervenant dans l'étude de la transmission sont :

1. *Fréquence de rotation synchrone*  $n_s$  du moteur à  $p$  paires de pôles alimenté à la fréquence du réseau  $f_1$  :

$$n_s = f_1 / p.$$

Pour les exécutions et alimentations triphasées usuelles, les fréquences de rotation synchrone sont :

Paire de pôles :	1	2	3	4	5	6		
$n_s =$	50	25	16,7	12,5	10	8,33	[t/s]	à 50 Hz
$n_s =$	60	30	20	15	12	10	[t/s]	à 60 Hz

2. *Glissement*  $s$  à la fréquence de rotation  $n$  :

$$s = (n_s - n)/n_s.$$

Comme la fréquence de rotation réelle du moteur dépend du couple à transmettre, à la fréquence synchrone le couple étant nul, la fréquence de rotation varie légèrement avec la charge. À la fréquence de rotation nominale, le glissement varie de 6% à 1% suivant la puissance.

3. *Variation du couple moteur* sur l'arbre en fonction de la fréquence de rotation :

$$M_{\text{mot}} = M_{\text{mot}(n)} = M_{\text{mot}(\omega)}.$$

Le couple moteur varie entre le couple d'enclenchement et la marche à vide. La fréquence de rotation nominale  $n_n$  est donnée par le point caractéristique permettant d'obtenir le couple nominal  $M_n$ , donc également la puissance nominale. Cette grandeur dépend du nombre de paires de pôles, de la puissance nominale et de la construction interne du moteur en particulier de la forme des encoches dans le rotor. La figure 9.2 donne l'allure générale du couple en fonction de la fréquence de rotation. Le moteur parcourt à chaque mise sous tension cette courbe du couple jusqu'à la stabilisation de la vitesse. Le point de travail correspond au point d'intersection de la courbe de charge avec la courbe du moteur. Le moteur usuel est le moteur à deux paires de pôles.

4. *Inertie du rotor* : elle est relativement faible pour ce genre de moteur et elle est donnée dans les catalogues détaillés des fabricants (attention aux anciennes unités ou au produit  $GD^2 = \text{produit du poids par le diamètre d'inertie au carré}$ ).
5. *Courant électrique* c'est-à-dire l'intensité en fonction de la fréquence de rotation :

$$I = I(n).$$

Cette grandeur est très importante, non seulement pour le choix de l'appareillage électrique de commande, mais aussi dans l'estimation de l'échauffement du moteur lors d'enclenchements répétés. Le courant d'enclenchement vaut 4 à 6 fois le courant nominal.

6. *Rendement total du moteur* et possibilités de surcharges. Ces deux grandeurs sont aussi données dans la figure 9.2 . Pour une charge inférieure à 50%, le rendement du moteur devient franchement mauvais, l'énergie électrique consommée étant mal transformée en

énergie mécanique. Il faut éviter de surdimensionner la puissance nominale produite par le moteur par un choix inadéquat.

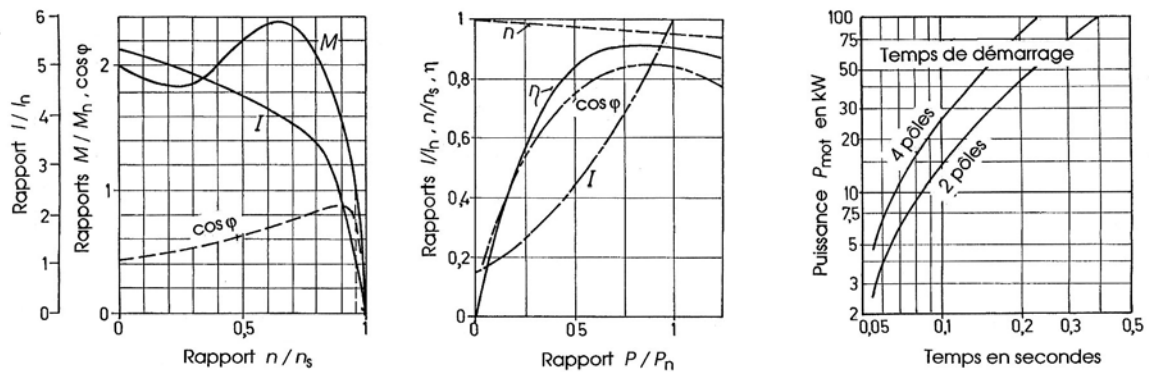


Figure 9.2 Caractéristiques principales du moteur asynchrone triphasé mono vitesse

7. *Centrage de l'arbre sur des paliers*, généralement à roulements à billes, et la capacité portante du moteur pour des charges radiales sur l'arbre. Les fabricants de moteurs fournissent des graphiques représentant les charges radiales admissibles en fonction de la position de cette charge. La lubrification des paliers assure une durée de graissage d'environ 10 à 20 000 heures, la recharge s'effectuant soit par démontage des flasques sur les petits moteurs, soit par graisseurs sur les plus grands.
8. *Caractéristiques de freinage* : le couple de freinage  $M_{fr} = M(\omega)$  lorsque la partie entraînée devient motrice est une propriété importante pour le moteur asynchrone, en particulier dans les engins de levage. Le moteur peut être équipé d'un frein mécanique complémentaire.
9. *Température et altitude* : Selon norme VDE 0530, les caractéristiques spécifiques des moteurs asynchrones sont valables pour une température ambiante de 40°C et une altitude de 1000 mètres au maximum. Si la température ou l'altitude sont plus élevées, il faut réduire la puissance nominale du moteur.

### 9.2.2 CHOIX DU MOTEUR ET CORRECTIONS

Les moteurs sont prévus généralement pour un service continu, c'est-à-dire sous charge constante, la durée d'enclenchement permettant d'atteindre la température d'équilibre. Si le service est intermittent, constitué d'une charge constante pendant un certain temps suivie d'un arrêt, la puissance admissible peut être augmentée. Le service intermittent se définit par le rapport :

$$Si = \frac{\text{Somme des durées de fonctionnement sous charge}}{\text{Durée du cycle}}.$$

C'est le rapport de la durée de fonctionnement sous charge à la durée du cycle, la durée du cycle étant la somme de la durée de fonctionnement sous charge et des arrêts.

Chaque moteur asynchrone est choisi en fonction de la charge thermique. Le cas idéal est donné par un moteur ne démarrant qu'une seule fois, les masses à accélérer étant modestes, la charge restant pratiquement constante. La puissance nécessaire du moteur est égale au couple résistant multiplié par la vitesse angulaire. Un second cas est représenté par un moteur à démarrages fréquents, masses importantes et faible couple résistant. La puissance à adopter pour ce genre de moteur est la charge thermique admissible. La cadence de démarrage

admissible est le nombre de démarrages à vide sous  $S_i = 50\%$ . Si les masses à accélérer sont importantes ou si le couple résistant est présent pendant cette période, la demande en courant est plus importante et le moteur subit un échauffement plus grand. Le nombre de démarrages doit être diminué.

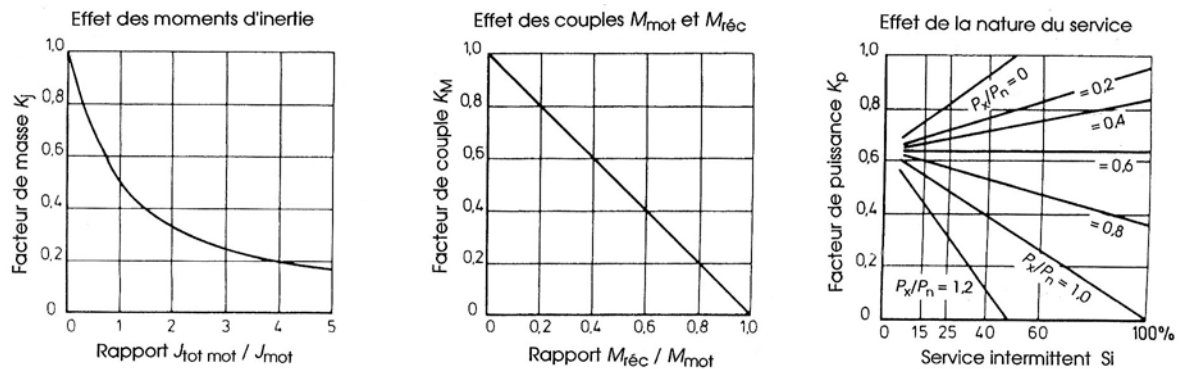


Figure 9.3 Corrections de la fréquence de démarrage pour les moteurs asynchrones

La cadence de démarrage admissible peut se trouver par la relation :

$$Z = Z_0 K_j K_M K_p,$$

avec :  $Z$  nombre de démarrages admissible par heure,  
 $Z_0$  nombre de démarrages à vide avec  $S_i = 50\%$  (donné par le fabricant),  
 $K_j$  correction engendrée par les masses additionnelles,  
 $K_M$  correction créée par le couple résistant,  
 $K_p$  correction imposée par la nature du service.

### 9.2.3 MOTEUR ASYNCHRONE À PLUSIEURS VITESSES

Le moteur asynchrone possède une seule vitesse nominale sous un couple constant, la fréquence de rotation ne pouvant pas se modifier. Les possibilités de variation de la fréquence de rotation sont :

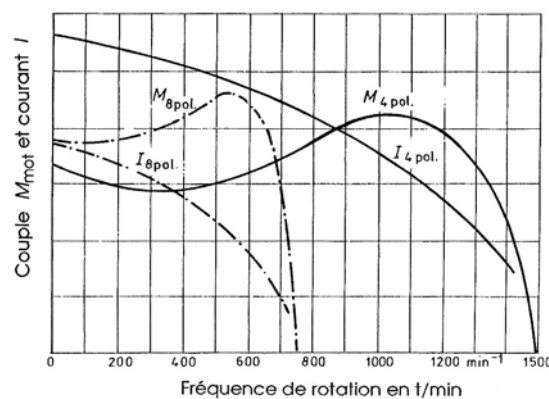


Figure 9.4 Couples et courants dans un moteur asynchrone à pôles commutables en fonction de la fréquence de rotation (SEW Usocom)

### 1. Moteurs asynchrone à pôles commutables

L'obtention de plusieurs vitesses de rotation par commutation des pôles est une solution simple. Les moteurs sont construits habituellement pour des couples nominaux à peu près égaux aux diverses fréquences de rotation nominales. La solution la plus courante consiste à obtenir un rapport 1 à 2 des fréquences de rotation (couplage Dahlander).

### 2. Moteurs asynchrones à bobinages séparés

La commutation des pôles permet une utilisation du moteur électrique soit pour l'une, soit pour l'autre des fréquences de rotation.

Pour les moteurs à plusieurs vitesses, il est éventuellement nécessaire de réduire le couple lors du passage de la grande à la petite vitesse car en règle générale, les couples d'inversion sont souvent plus grands aux couples de démarrage.

## 9.2.4 MOTEUR ASYNCHRONE À VITESSE VARIABLE

Une autre possibilité d'obtenir une variation de la fréquence de rotation est d'alimenter le moteur asynchrone en courant triphasé à fréquence variable. La fréquence de rotation est donnée par :  $n = f(1-s)/p$  ; elle est proportionnelle à la fréquence du réseau électrique. L'évolution des semi-conducteurs de puissance et de la technique de commande numérique rend possible l'introduction de convertisseurs de fréquence pour alimenter les moteurs asynchrones. Les convertisseurs peuvent se diviser en trois groupes : convertisseur direct, convertisseur à tension continue, convertisseur à courant continu.

La commande de ce type de moteur nécessite non seulement la variation de la fréquence, mais également une modification de la tension, ce qui complique quelque peu l'appareillage électrique. La figure 9.5 montre la variation du couple en fonction de la fréquence d'alimentation. La régulation de la commande limite le couple engendré par le moteur dans la partie descendante de la courbe, située à droite du couple de décrochage. Le glissement est imposé par la charge sur le moteur. Le démarrage à basse fréquence limite le courant d'enclenchement à un niveau inférieur à celui d'un moteur normal. Cette figure montre aussi la modification du couple engendré par le moteur asynchrone alimenté à fréquence constante, mais à tension variable.

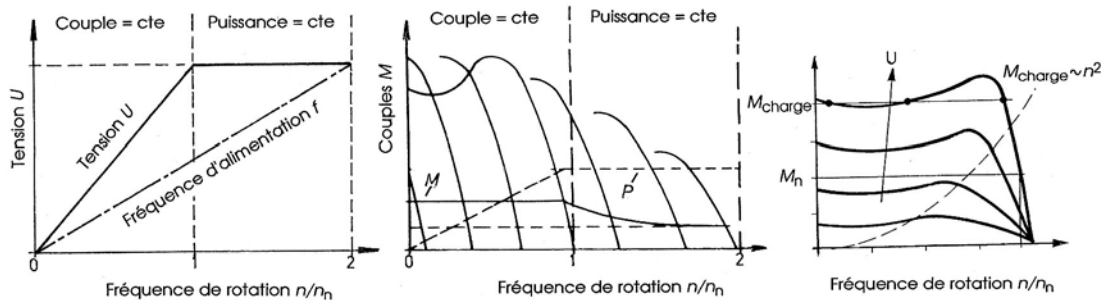


Figure 9.5 Caractéristiques du moteur asynchrone à fréquence et tension variable (SEW Usocome)

## 9.2.5 MOTEURS À COURANT CONTINU

Les diverses variantes de commutation et de conception des moteurs électriques à courant continu permettent d'obtenir une variation de la fréquence de rotation accompagnée d'une modification du couple produit sur l'arbre moteur. L'évolution rapide des éléments électroniques de transformation du courant alternatif en courant continu a permis une

application efficace de cette famille de moteurs dans la technique de la commande et de la régulation. Des fonctions supplémentaires comme un contrôle de l'accélération en un temps préréglé, la surveillance du couple avec limitation électronique en cas de surcharge et d'autres fonctions spéciales sont actuellement possibles. Ce type de moteur se compose de différents bobinages, la tension étant transmise au rotor par l'intermédiaire de balais et du collecteur. Ces derniers sont des pièces d'usure et demande un contrôle et un entretien à intervalles de temps réguliers.

L'avantage essentiel du moteur à courant continu est sa capacité de pouvoir varier d'une façon continue la fréquence de rotation sans augmenter les pertes d'énergie. La fréquence de rotation est approximativement proportionnelle à la tension et inversement proportionnelle au flux magnétique tandis que le couple produit est proportionnel au produit du flux magnétique par le courant. En général, la variation de vitesse est obtenue par une tension d'induit variable avec courant d'excitation constant.

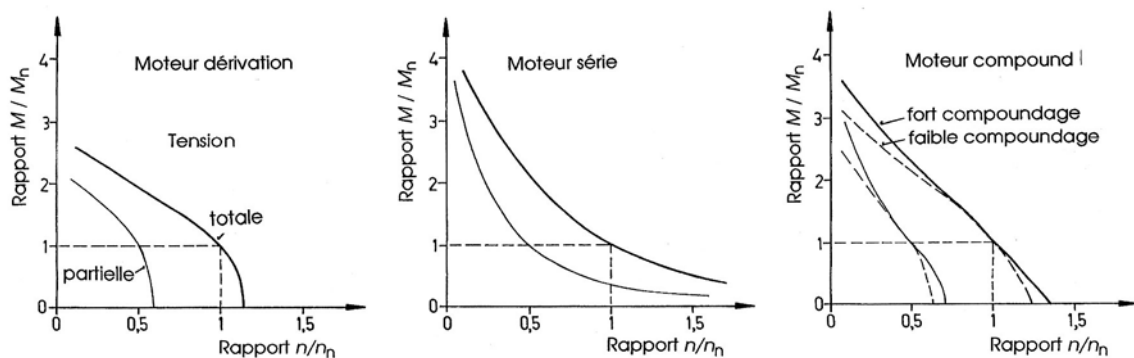


Figure 9.6 Caractéristiques  $M = M(n)$  des divers types de moteurs à courant continu

La figure 9.6 montre les caractéristiques du couple en fonction de la fréquence de rotation pour les trois types fondamentaux de moteurs à courant continu, le trait épais indiquant  $M = M(n)$  pour l'alimentation sous tension totale, le trait mince sous tension réduite. Les possibilités de réglage de la fréquence de rotation dépendent du type de moteur et du couplage de l'alimentation : de 1 à 3 jusqu'à 1 à 100.

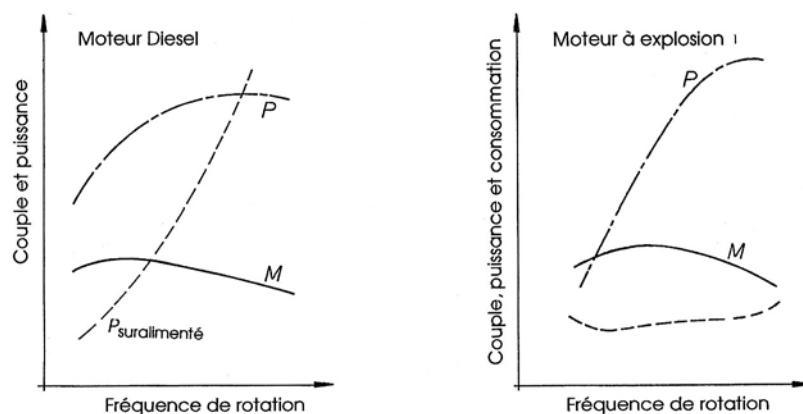


Figure 9.7 Caractéristiques mécaniques des moteurs à combustion interne en fonction de la fréquence de rotation : Puissance, couple et consommation : 1. Moteur Diesel, 2. Moteur à essence



### 9.2.6 MOTEURS À COMBUSTION INTERNE

La commande d'éléments mécaniques peut aussi s'effectuer par l'intermédiaire de moteurs à combustion interne : moteurs Diesel ou moteurs à explosion.

Le couple moteur varie avec la fréquence de rotation pour ces deux types de moteurs; l'augmentation de la fréquence de rotation provoque habituellement une baisse du couple à partir du couple maximal  $M_{\max}$ . La puissance produite, représentée sur les deux figures, est égale au produit du couple par la vitesse angulaire. Pour les moteurs non suralimentés, la caractéristique est dégressive. Pour les moteurs Diesel suralimentés, la caractéristique de la puissance  $P = P(n)$  est progressive. Le rendement effectif des moteurs à combustion interne vaut :

- pour le moteur Diesel : 28% à 46% suivant la grandeur, le type et la suralimentation,
- pour le moteur à essence : 22% à 32% .

### 9.2.7 MOTEURS HYDRAULIQUES

Le couple moteur peut aussi provenir d'un moteur hydraulique si une installation génératrice de pression et débit de fluide oléohydraulique est à disposition. Les moteurs et pompes hydraulique sont des machines hydrostatiques. La transformation de l'énergie hydraulique en énergie mécanique est la même pour toutes ces machines. L'équation fondamentale du couple moteur est donnée par l'expression :

$$M_{\text{mot}} = \Delta p V_h \eta_{\text{glo}} / (2 \pi),$$

avec :

- $M_{\text{mot}}$  couple sur l'arbre moteur,
- $\Delta p$  chute de pression entre l'orifice d'entrée et de sortie,
- $V_h$  cylindrée géométrique, soit le volume absorbé par tour,
- $\eta_{\text{glo}}$  rendement global du moteur.

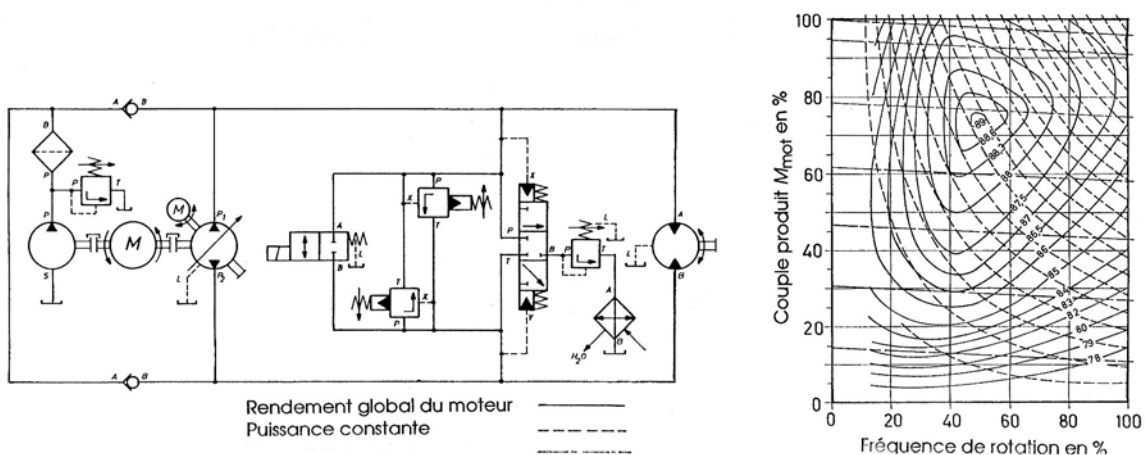


Figure 9.8 Schéma hydraulique d'un moteur à circuit fermé.  
Caractéristiques du moteur Rexroth

Cette transformation d'énergie est obtenue de différentes façons selon le type de conception. On peut diviser les moteurs hydrauliques en cinq familles :

- moteurs à engrenages extérieur et/ou intérieur,
- moteurs à palettes,

- moteurs à pistons disposés radialement,
- moteurs à pistons disposés axialement, les pistons étant montés dans un carter fixe, mobile ou dans un barillet,
- moteurs à rotor profilé.

L'avantage des transmissions hydrostatiques par rapport aux autres types de transmission réside dans la compacité des composants et la possibilité de varier la fréquence de rotation dans un large domaine. En fonctionnement moteur, la fréquence de sortie est proportionnelle au débit absorbé et inversement proportionnelle à la cylindrée.

Les pressions d'alimentation peuvent dépasser 400 bars et les fréquences de rotation peuvent varier de moins d'un tour par minute à plusieurs milliers de tours par minute suivant les exécutions et les puissances. Ces deux caractéristiques, gamme étendue des vitesses et couples importants, sont les avantages de ces machines. Les inconvénients sont :

- le rendement global relativement bas de la transformation : énergie mécanique en énergie hydraulique, puis à nouveau d'énergie hydraulique en énergie mécanique.
- la nécessité d'implanter une commande hydraulique complète, d'où prix de revient élevé.
- le bruit et les risques de souillures dus à la présence de l'huile hydraulique.

La figure 9.8 montre à gauche le schéma usuel d'un moteur hydraulique en circuit fermé composé d'une pompe principale à débit variable, d'une pompe de gavage assurant le remplissage complet du circuit, du moteur à cylindrée constante avec ses organes de commande et de sécurité. À droite, le graphique montre les niveaux de rendement global du moteur, le rendement étant maximal à 50% de la fréquence maximale et à 75% du couple maximal. Ce graphique est complété par les courbes à puissance et débit constants en fonction de la fréquence de rotation.

## 9.2.8 ENTRAÎNEMENT DE LA MACHINE RÉCEPTRICE

La transmission directe du couple moteur vers le récepteur est obtenue par l'intermédiaire d'un accouplement plus ou moins rigide lorsque le couple moteur est toujours supérieur au couple du récepteur à vitesse variable et surtout pendant la période de démarrage. Si le couple moteur est insuffisant pour atteindre une accélération optimale des masses en rotation, il est nécessaire d'intercaler entre les deux machines un embrayage ou un accouplement à couple variable comme les accouplements centrifuges, hydrauliques ou à induction.

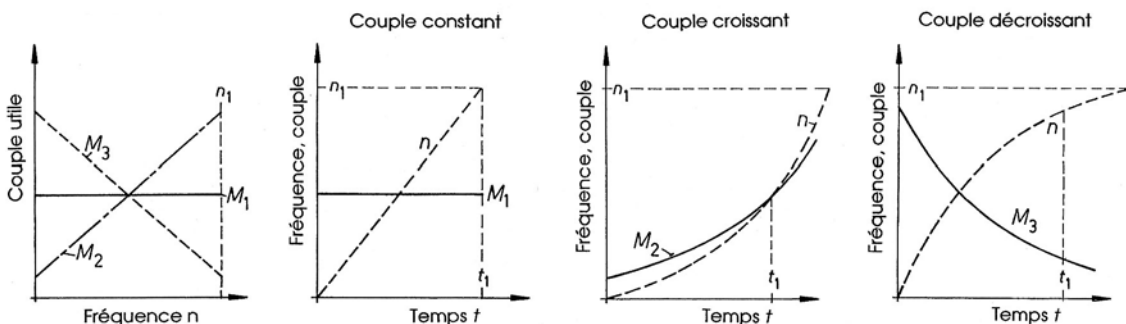


Figure 9.9 Conditions de démarrage à couple utile constant ou linéairement variable

### 9.2.8.1 CONDITIONS DE DÉMARRAGE

La différence entre le couple moteur et le couple récepteur sert à modifier la vitesse des masses comme c'est le cas pendant le démarrage ou le ralentissement de l'ensemble.

L'accélération angulaire doit prendre une valeur optimale de telle sorte que les éléments de liaison ne soient pas sollicités par des efforts dépassant leur capacité de charge. D'un autre côté, le démarrage ne doit pas durer trop longtemps, en particulier le temps de démarrage des moteurs électriques, 2 à 4 secondes afin de limiter l'échauffement.

Considérons un ensemble moteur - récepteur dans lequel le couple moteur  $M_{\text{mot}}$  est supposé constant quelle que soit la fréquence de rotation. Déterminons la cinématique de l'entraînement pour un couple récepteur : soit constant  $M_{\text{rec}} = \text{constant}$ , soit variant linéairement avec la fréquence de rotation. Le couple utile se définit comme précédemment par :  $M_{\text{utile}} = M_{\text{mot}} - M_{\text{rec}}$ . Désignons par  $M_1$  le couple utile constant, par  $M_2$  le couple augmentant avec la vitesse, et par  $M_3$  le couple diminuant avec la fréquence de rotation. Dans ces deux derniers cas, le couple utile pourrait s'exprimer par :

$$M_{\text{utile}} = M_0 + b \omega,$$

avec :  $M_0$  couple initial,

$b$  une constante représentant la pente du couple sur le graphique.

L'intégration de l'accélération angulaire en fonction du temps permet de trouver la fréquence de rotation ou la vitesse angulaire et le couple utile en fonction du temps. Ces deux grandeurs sont représentées sur la figure 9.9 pour les trois cas étudiés. En particulier, si le couple utile est linéairement variable avec la fréquence de rotation, la vitesse devient une fonction exponentielle du temps.

### 9.2.8.2 COUPLES UTILES VARIABLES

Le couple moteur ou le couple résistant de la machine entraînée peuvent dépendre de la position angulaire de l'arbre et posséder une allure fortement variable. Le couple du récepteur peut présenter des pointes pouvant dépasser le couple maximal produit par le moteur. Pour réaliser un ensemble acceptable économiquement, il est nécessaire d'intercaler entre le moteur et le récepteur un accumulateur d'énergie constitué par un volant en rotation. L'énergie cinétique accumulée pendant la partie de déplacement angulaire à couple moteur supérieur à celui du récepteur est restituée au récepteur lorsque le couple moteur est inférieur au couple résistant.

Une étude détaillée et complète de la dynamique de l'ensemble permettra de trouver les efforts, en particulier les couples de torsion entre le moteur et le volant, entre le volant et le récepteur.

## 9.3 COMPORTEMENT DYNAMIQUE

La dynamique étudie le comportement des structures sollicitées par des charges variables en fonction du temps. Les exemples classiques de dynamique des structures sont :

- les forces et couples variables sur les rotors de turbomachines,
- les efforts brusques sur les structures lors d'une rupture ou d'une explosion,
- les efforts provoqués par un tremblement de terre.

La dynamique comprend aussi l'étude des vibrations libres et forcées comme les oscillations d'une structure avec maintien ou après disparition des efforts ayant engendré le mouvement. De nombreux problèmes rencontrés dans la conception de machines font intervenir les forces et les couples dus à l'inertie et le comportement des structures sous ces effets. Cette brève description des méthodes à disposition a pour but d'éveiller la curiosité des utilisateurs.

Plusieurs logiciels permettent d'effectuer ces analyses dynamiques pour des structures à comportements linéaire et même non linéaire.

### 9.3.1 RELATION GÉNÉRALE DE COMPORTEMENT

La relation fondamentale de la dynamique du point matériel relie la force résultante à la masse et à l'accélération subie par le point :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}.$$

Dans le cas général d'une structure composée de masses réparties, d'efforts appliqués sur des points différents, la relation générale du comportement s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\}, \quad (9.4.1)$$

avec :  $[M]$  la matrice de masse de la structure,  
 $[C]$  la matrice des amortissements de la structure,  
 $[K]$  la matrice de rigidité de la structure,  
 $\{F\}$  le vecteur des efforts en fonction du temps,  
 $\{u\}$  le vecteur des déplacements de points de la structure,  
 $\{\dot{u}\}$  le vecteur des vitesses de ces points,  
 $\{\ddot{u}\}$  le vecteur des accélérations de ces points.

Tout problème réel nécessite obligatoirement la transformation de la structure exacte en un modèle de calcul constitué d'un nombre fini de composants. L'art de l'ingénieur consiste précisément à effectuer cette modélisation en utilisant son savoir faire.

### 9.3.2 ANALYSE MODALE

L'analyse modale est utilisée pour déterminer les fréquences propres et les modes propres du modèle d'une structure. Dans cette analyse, les amortissements et les efforts extérieurs sont supprimés. Le comportement de la structure est linéaire. La relation générale se réduit à :

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{0\}. \quad (9.4.2)$$

Dans les structures à comportement linéaire, les vibrations libres sont harmoniques et les déplacements aux points retenus peuvent s'exprimer en fonction du temps par :

$$\{u\} = \{u_0\} \cos \omega t.$$

avec :  $\{u_0\}$  le vecteur des amplitudes.

En substituant la valeur du vecteur  $\{u\}$  et sa dérivée seconde  $\{\ddot{u}\}$  par rapport au temps dans la relation de définition, cette dernière se simplifie en :

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{u_0\} \cos \omega t = \{0\}.$$

L'expression entre parenthèses représente un système linéaire homogène de dimensions  $n \times n$  et pour obtenir une solution non triviale, il faut que son déterminant soit égal à zéro, soit :

$$|[K] - \lambda [M]| = 0, \quad (9.4.3)$$

avec :  $\lambda = \omega^2$ .

Ce genre de problème est nommé problème aux valeurs propres; la solution de ce problème fournit les valeurs propres  $\lambda_i$  et les vecteurs propres correspondants  $\{u_i\}$ . Les valeurs propres

représentent le carré des pulsations propres du modèle. Toute analyse dynamique importante devrait commencer par la recherche des fréquences propres au moyen de l'analyse modale.

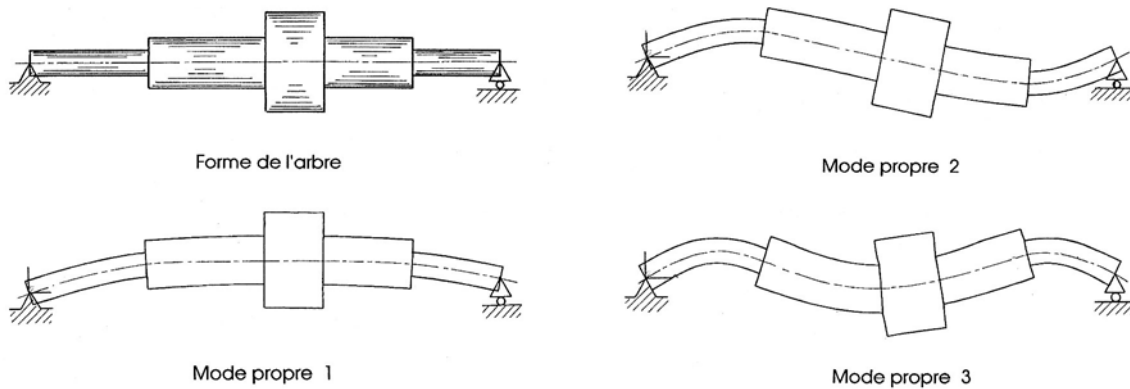


Figure 9.10 Analyse modale d'un arbre de machines : arbre et ses trois premiers modes propres

### 9.3.3 RÉPONSE HARMONIQUE

Dans la réponse harmonique, la fonction efforts est harmonique, donc sinusoïdale, connue en amplitude et fréquence. L'équation particulière de la réponse harmonique peut se résoudre en fonction de la fréquence ou de la pulsation. Si la structure est linéaire, les déplacements des points retenus varient aussi harmoniquement à la même fréquence, mais habituellement avec un déphasage. L'équation d'équilibre dynamique en réponse harmonique s'écrit :

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F_0\} e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (9.4.4)$$

avec :  $\{F_0\}$  vecteur des amplitudes des efforts,  
 $j$   $(-1)^{0,5}$ ,  
 $t$  temps,  
 $\varphi$  déphasage,  
 $\omega$  pulsation connue  $= 2 \pi f$ ,  
 $f$  fréquence en Hz.

L'expression complexe des efforts peut se développer sous la forme :

$$\{F\} = \{F_0\} e^{j(\omega t + \varphi)} = \{F_0\} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \{F_0\} (\cos\varphi + j \sin\varphi) e^{j\omega t},$$

$$\{F\} = (\{F_1\} + j \{F_2\}) e^{j\omega t},$$

avec :  $\{F_1\} = \{F_0\} \cos\varphi$  vecteur de la partie réelle des efforts,  
 $\{F_2\} = \{F_0\} \sin\varphi$  vecteur de la partie imaginaire des efforts.

Dans cette analyse, l'amplitude  $\{F_0\}$ , la pulsation  $\omega$  et le déphasage  $\varphi$  sont imposés par les conditions d'analyse. Tous les points de la structure sont supposés se mouvoir sinusoïdalement à la même fréquence, mais pas nécessairement en phase. Le vecteur des déplacements  $\{u\}$  peut s'écrire :

$$\{u\} = \{u_0\} e^{j(\omega t + \varphi)} = (\{u_1\} + j \{u_2\}) e^{j\omega t},$$

avec :  $\{u_1\} = \{u_0\} \cos\varphi$  vecteur de la partie réelle des déplacements,  
 $\{u_2\} = \{u_0\} \sin\varphi$  vecteur de la partie imaginaire des déplacements.

Dans cette expression des déplacements, la pulsation  $\omega$  est la grandeur connue alors que les amplitudes et déphasages sont à trouver. En remplaçant dans l'expression générale le vecteur

$\{u\}$  et ses dérivées par rapport au temps, le vecteur  $\{F\}$  par ses composantes, l'équation prend la forme :

$$(-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K]) (\{u_1\} + j \{u_2\}) = \{F_1\} + j \{F_2\}. \quad (9.4.5)$$

La solution de ce système est de type complexe à moins que l'amortissement soit ignoré, donc  $[C] = [0]$  et que les parties imaginaires des efforts  $\{F_2\}$  ou des déplacements  $\{u_2\}$  soient toutes deux nulles.

### 9.3.4 ANALYSE DYNAMIQUE GÉNÉRALE

L'analyse dynamique générale devrait être capable d'exprimer toutes les grandeurs cinématiques et dynamiques d'une structure en fonction du temps. Il faut distinguer l'analyse de structures à comportement linéaire de l'analyse des structures à comportement non linéaire. Ces deux problèmes sont basés sur l'équation générale :

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\}(t). \quad (9.4.6)$$

Cette équation matricielle représente un système d'équations linéaires ou non linéaires pouvant très souvent se résoudre numériquement.

### 9.3.5 EXEMPLE DE RECHERCHE DE FRÉQUENCE PROPRE

Recherchons la fréquence propre d'une transmission directe très simple constituée d'un moteur accouplé à une machine réceptrice par un arbre élastique. Le couple moteur, le couple récepteur ou les deux peuvent être variables et engendrer des vibrations forcées inacceptables en torsion. Transformons la structure réelle en un modèle constitué par deux masses en rotation, moment d'inertie de masse  $J_{a1}$  et  $J_{a2}$ , séparées par un arbre élastique de raideur  $k$  subissant un amortissement  $c$  proportionnel à la vitesse angulaire relative. La mise en équation de ce système donne, sous l'action d'un couple perturbateur  $M_0 \sin(\omega t)$  appliqué sur la première masse :

$$J_{a1} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + c \left( \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + k (\varphi_1 - \varphi_2) = M_0 \sin(\omega t).$$

et :

$$c \left( \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + k (\varphi_1 - \varphi_2) = J_{a2} \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}.$$

En négligeant l'amortissement  $c$  de l'arbre intermédiaire, équipé de l'accouplement, et en utilisant les principes du calcul de la réponse harmonique, la fonction de transfert de ce modèle peut s'écrire sous la forme :

$$G(p) = \frac{\varphi_2(p)}{M(p)} = \frac{1}{p^2 [J_{a1} + J_{a2} + (J_{a1} J_{a2} / k) p^2]}.$$

avec :  $p = d/dt$  l'opérateur de différentiation.

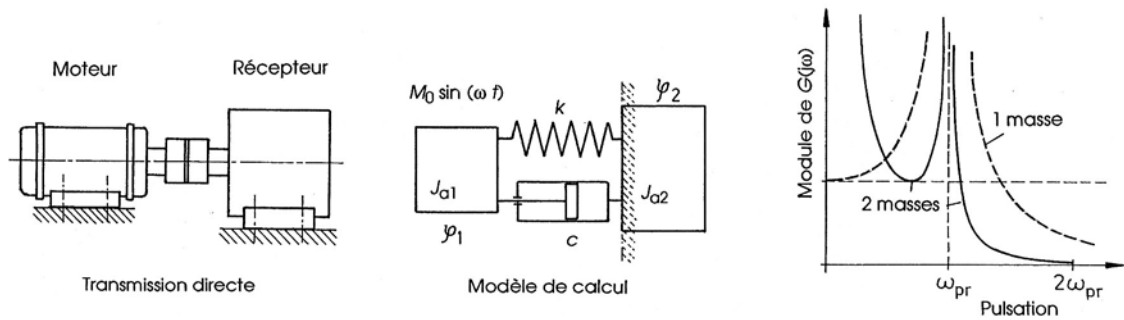


Figure 9.11 Modèle de calcul d'une transmission directe et comportement en réponse harmonique

Cette relation permet de trouver la pulsation propre du système sous l'effet d'un couple à variation harmonique :

$$\omega^2 = k \frac{J_{a1} + J_{a2}}{J_{a1} J_{a2}} = k \left( \frac{1}{J_{a1}} + \frac{1}{J_{a2}} \right).$$

Cette même pulsation propre sera trouvée lors de la recherche des fréquences propres d'un arbre en torsion.

## 9.4 EXEMPLES D'ÉTUDE DYNAMIQUE

Deux exemples de calcul sont proposés dans ce sous-chapitre : le premier exemple détermine les grandeurs cinématiques en rotation d'un entraînement direct commandé par un moteur électrique, le second exemple recherche la taille à prévoir pour un moteur.

### 9.4.1 DÉMARRAGE EN COMMANDE DIRECTE

Un entraînement direct se compose d'un moteur électrique asynchrone triphasé accouplé directement à une machine réceptrice. La fréquence de rotation synchrone du moteur est 25 t/s, la variation du couple en fonction de la fréquence de rotation est donnée par la courbe de la figure 9.12 . Le récepteur possède également un couple variable, cette variation étant proportionnelle au cube de la fréquence de rotation, cette caractéristique étant donnée sur la même figure. L'inertie totale du système mécanique vaut :  $M_{nom}/J_{a tot} = 100 \text{ mN/kgm}^2$ .

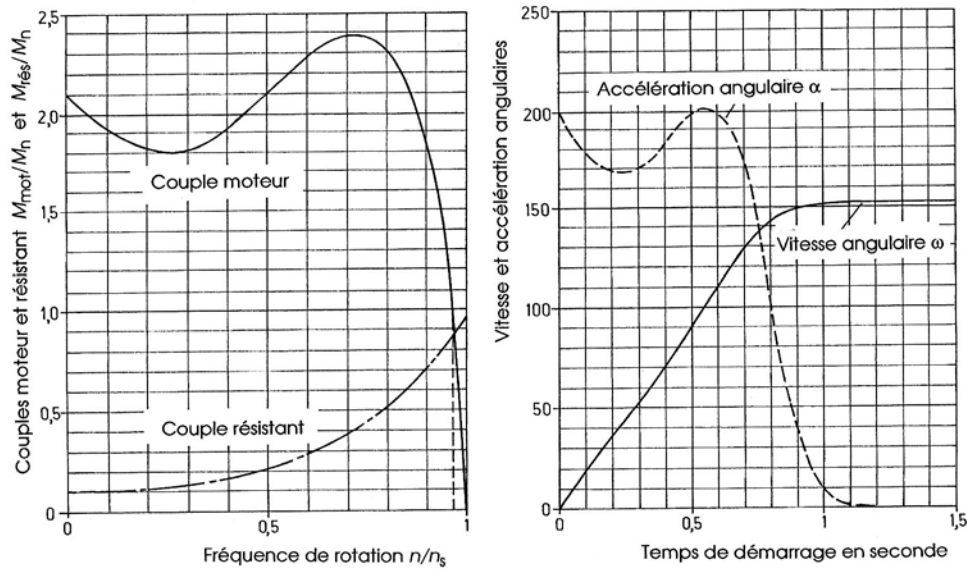


Figure 9.12 Caractéristiques des couples moteur et récepteur en fonction de la fréquence de rotation  
Vitesse angulaire  $\omega$  et accélération angulaire  $\alpha$  déterminées numériquement

#### 9.4.1.1 VALEUR DES COUPLES MOTEUR ET RÉCEPTEUR

Le couple du moteur asynchrone triphasé à rotor en court-circuit est donné dans le tableau sous forme numérique. Le couple résistant du récepteur est aussi fonction de la fréquence de rotation et s'exprime par :

$$M_{rés} = M_{nom} (0,1 + 0,85 (n/n_s)^3) ,$$

avec :  $M_{nom}$  couple nominal du moteur électrique,  
 $n_s$  fréquence synchrone, soit 25 t/s ,  
 $n$  fréquence de rotation, fonction du temps.

#### 9.4.1.2 RECHERCHE DE L'ACCÉLÉRATION ANGULAIRE

Le couple utile pendant le démarrage est égal à la différence des deux couples :

$$M_{ut} = M_{mot} - M_{rés}.$$

L'accélération angulaire subie par l'ensemble se trouve par l'expression générale :

$$\alpha = d\omega/dt = M_{ut}/J_{a\ tot} = (M_{mot} - M_{rés})/J_{a\ tot}.$$

La solution de l'équation différentielle du premier ordre, permettant de trouver la vitesse angulaire en fonction du temps, est obtenue par intégration numérique. Le couple moteur est exprimé sous forme analytique en recherchant la fonction donnant le mieux possible la variation de ce couple. La figure 9.12 à droite donne la vitesse angulaire  $\omega = \omega(t)$  et l'accélération angulaire  $\alpha = \alpha(t)$ .



Tableau 9.1

**Couples moteur et récepteur en fonction de la fréquence de rotation**  
**Vitesse et accélération angulaires en fonction du temps**

Rapport $n/n_s$	Couples relatifs		Rapport $N/n_s$	Couples relatifs	
	moteur	récepteur		moteur	récepteur
0,00	2,100	0,100	0,50	2,100	0,206
0,05	2,007	0,100	0,55	2,196	0,241
0,10	1,923	0,101	0,60	2,281	0,284
0,15	1,855	0,103	0,65	2,347	0,333
0,20	1,812	0,107	0,70	2,386	0,392
0,25	1,796	0,113	0,75	2,383	0,459
0,30	1,810	0,123	0,80	2,323	0,535
0,35	1,853	0,136	0,85	2,170	0,622
0,40	1,920	0,154	0,90	1,852	0,720
0,45	2,005	0,177	0,95	1,224	0,829
0,50	2,100	0,206	1,00	0,000	0,950
Temps s	Vitesse Accélération angulaire		Temps s	Vitesse Accélération angulaires	
0,0	0,00	200,0	0,8	142,6	104,3
0,1	18,9	179,2	0,9	149,2	39,3
0,2	36,2	168,8	1,0	151,3	11,7
0,3	53,1	170,7	1,1	151,86	3,26
0,4	70,7	182,8	1,2	152,01	0,89
0,5	89,7	197,5	1,3	152,05	0,24
0,6	109,8	199,5	1,4	152,066	0,066
0,7	128,6	171,3	1,5	152,069	0,018
0,8	142,6	104,3	1,6	152,070	0,005

La vitesse angulaire  $\omega$  se trouve simplement par intégration numérique de l'accélération en fonction du temps.

*Remarque importante :*

Dans beaucoup d'applications élémentaires, il est admis un démarrage en mouvement uniformément varié. Dans le cas particulier, si l'allure de la vitesse angulaire en fonction du temps est approximativement linéairement variable, l'accélération angulaire est très différente d'une valeur constante. Dans l'exemple choisi, l'accélération angulaire devient très petite à partir de  $t = 1,3$  seconde. Le régime à vitesse constante est pratiquement atteint en ce temps, soit 152,1 rad/s ou 24,3 t/s.

#### 9.4.2 TAILLE D'UN MOTEUR

Un engin de levage est prévu pour soulever et déplacer une charge de 10 tonnes, la masse propre du chariot étant 950 kg. La vitesse de translation du chariot est 0,4 m/s et le temps de démarrage est limité à une seconde. La commande des roues motrices s'effectue par l'intermédiaire d'un moteur électrique, fréquence de rotation nominale 24 t/s, un réducteur de vitesse à engrenages et des roues sur rail, diamètre 250 mm, centrées dans des paliers lisses, diamètre 40 mm. Quel couple moteur faut-il prévoir pour cet entraînement ?

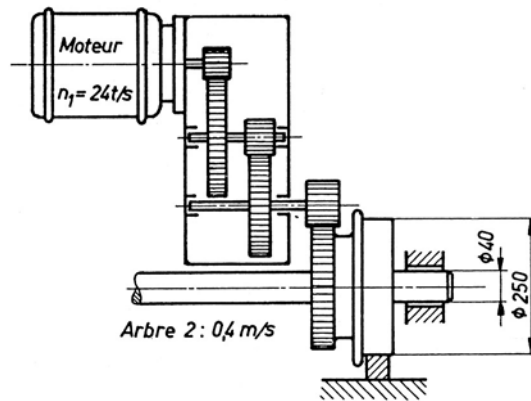


Figure 4.13 Entraînement d'un chariot d'un engin de levage

### SOLUTION DU PROBLÈME

Fréquence de rotation des roues :  $n_r = 0,4 \text{ m/s} / (\pi \cdot 0,25 \text{ m}) = 0,51 \text{ t/s}$ ,

Rapport de transmission entre le moteur et les roues :  $i = 24 \text{ t/s} / 0,51 \text{ t/s} = 47,1$ .

#### *Couple moteur à vitesse constante*

Admis : un rendement de 95 % pour chaque engrenage,

paramètre de résistance au roulement :  $e_r = 0,5 \text{ mm}$ ,

coefficient de frottement dans les paliers des roues :  $\mu = 6 \%$ .

Moment de roulement sur l'arbre 2 :  $M_r = 10\,950 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,0005 \text{ m} = 53,7 \text{ mN}$ ,

Moment de frottement dans les paliers :  $M_{fr} = 10\,950 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,06 \cdot 0,02 \text{ m} = 128,9 \text{ mN}$ .

Couple total à produire sur les roues :  $M_{roue} = 183,6 \text{ mN}$ ,

Couple sur l'arbre du moteur :  $M_{mot} = 183,6 \text{ mN} / (47,1 \cdot 0,953) = 4,52 \text{ mN}$ .

#### *Couple moteur pendant la période de démarrage*

Hypothèses : l'accélération est supposée constante;  
le rendement du réducteur est introduit dans le calcul,  
la masse totale est à accélérer  
(masse suspendue au crochet en position haute et chariot).

Vitesse angulaire :  $\omega = 24 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \pi = 150,8 \text{ s}^{-1}$ ,

Accélération angulaire :  $\alpha = 24 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \pi / 1 \text{ s} = 150,8 \text{ s}^{-2}$ ,

Moments d'inertie de masse : arbre moteur :  $J_m = 0,006 \text{ kg m}^2$ ,

arbres intermédiaires : négligeables,

masse en translation :

$$J_{mr} = 10\,950 \text{ kg} \cdot (0,4/150,8)^2 \text{ m}^2 / 0,953 = 0,090 \text{ kg m}^2,$$

total sur l'arbre moteur :  $J_{m \text{ tot}} = 0,096 \text{ kg m}^2$ .

Couple moteur pour accélérer les masses :  $M_i = 0,096 \text{ kg m}^2 \cdot 150,8 \text{ s}^{-2} = 14,5 \text{ mN}$ .

Couple moteur total :  $M_{mot} = 14,5 \text{ mN} + 4,5 \text{ mN} = 19 \text{ mN}$ .

#### *Conclusion :*

Le couple total de démarrage vaut 4,2 fois le couple à vitesse constante. La taille du moteur électrique doit se choisir en fonction des conditions de démarrage et non à partir du contrôle à vitesse constante.

## CHAPITRE 10

# AXES ET ARBRES DE TRANSMISSION

Un axe est une pièce prismatique rectiligne de section circulaire sur laquelle tourne ou oscille une pièce mobile, comme par exemple une roue, un coussinet de palier, un levier, etc. Un arbre est une barre prismatique rectiligne et mobile, généralement cylindrique, transmettant un couple de torsion  $M_t$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .

### 10.1 CONTRAINTES DANS LES AXES ET ARBRES

Le contrôle des axes et des arbres doit être précédé de la recherche des efforts à partir de l'équilibre. Les efforts dans les axes et les arbres proviennent des pièces fixées par clavetage, par emmanchement ou par tout autre moyen, des appuis et des effets d'inertie. Les actions des appuis ou des paliers sont trouvées par les méthodes usuelles de la statique graphique ou analytique si les conditions d'équilibre le permettent. Lorsque le système est hyperstatique, il faut poser les relations des déformations en plus des équations d'équilibre statique. Les axes et les arbres doivent se contrôler avec beaucoup de soin à partir des relations de la résistance des matériaux et des considérations citées au chapitre 3. Ce contrôle comprend les trois phases suivantes :

1. Recherche de l'équilibre de la pièce et de la variations des efforts intérieurs le long de la ligne moyenne de l'axe ou de l'arbre.
2. Contrôle des contraintes dans les sections les plus sollicitées en partant de la valeur des efforts intérieurs et de la forme de la pièce.
3. Calcul des déformations transversales et longitudinales, en particulier les déformations engendrées par la flexion et la torsion. Etude du comportement dynamique si nécessaire.

Si la fréquence de rotation est élevée ou si les masses en mouvement sont importantes, il faut compléter le calcul par la recherche des vitesses critiques et fréquences propres.

#### 10.1.1 ÉQUILIBRE DES AXES ET DES ARBRES

Les arbres de machines sont souvent équipés d'éléments constitués par des roues ou des leviers, des tambours ou des poulies, sollicités par des forces spatiales. Si ces pièces sont guidées dans des appuis comme les paliers, il faut conserver dans la mesure du possible une structure isostatique en choisissant d'un côté un appui supportant la charge axiale grâce à la présence d'une butée.

##### 10.1.1.1 ÉQUILIBRE PAR PROJECTION DES FORCES ET DES COUPLES

Habituellement, la recherche de l'équilibre d'une pièce rectiligne soumise à l'action de forces spatiales s'effectue par la projection des efforts dans deux vues : vue de face et vue de dessus. L'équilibre statique se réduit à deux relations :

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum \vec{M}_j = 0.$$

Ces deux relations expriment l'équilibre de translation et l'équilibre de rotation de la pièce. Après avoir choisi un système de coordonnées orthonormé  $Oxyz$ , la vue de face est repérée

par les deux axes  $Oy$  et  $Oz$ , la vue de dessus par  $Ox$  et  $Oy$ . Dans le cas général, six équations doivent s'écrire pour les équilibres.

1. Equilibre de translation :

$$\sum_{i=1}^m \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_{xi} = 0 \\ \sum F_{yi} = 0 \\ \sum F_{zi} = 0 \end{cases}.$$

2. Equilibre de rotation :

$$\sum_{j=1}^n \vec{M}_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum M_{xj} = 0 \\ \sum M_{yj} = 0 \\ \sum M_{zj} = 0 \end{cases}.$$

Les projections de forces composantes appliquées au même point peuvent se combiner pour trouver la résultante radiale.

### 10.1.1.2 ÉQUILIBRE PAR RÉDUCTION

La méthode par réduction permet aussi de trouver l'équilibre de la pièce isostatique en utilisant des opérations élémentaires de multiplication et division. Elle utilise la réduction des forces et couples en un point déterminé, le plus souvent l'origine du système de coordonnées. Soit un système de référence trirectangle orthonormé  $Oxyz$ , l'axe  $Oy$  correspondant à l'axe de la pièce rectiligne. La réduction des forces et couples connus à l'origine du système de coordonnées fait apparaître les relations suivantes :

1. Une résultante générale : 
$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i.$$

2. Un couple principal : 
$$\vec{M}_{(O)} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \wedge F_j + \sum_{k=1}^p \vec{M}_k.$$

La réduction des forces et couples connus étant effectuée, la recherche des actions des appuis s'opère en mettant la pièce en équilibre statique :

1. *Equilibre de translation* : la somme vectorielle de toutes les forces, connues et inconnues, doit être nulle.
2. *Equilibre de rotation* : la somme vectorielle des moments de forces et des couples, connus et inconnus, doit être nulle.

En partant des composantes scalaires des forces et moments ou couples, il est facile de trouver les composantes axiales et radiale des réactions d'appui.

### 10.1.1.3 EXEMPLE DE RECHERCHE D'ÉQUILIBRE

Montrons par un exemple simple l'utilisation de cette méthode pour un arbre équipé de deux roues dentées, centré dans deux paliers B et C selon figure 10.1. Les efforts appliqués sur les dentures hélicoïdales sont :

Composantes :	Pignon 1	Roue 2
tangentielle	$F_{t1} = 16\ 667\ \text{N}$	$F_{t2} = 6\ 531\ \text{N},$
radiale	$F_{r1} = 6\ 202\ \text{N}$	$F_{r2} = 2\ 461\ \text{N},$
axiale	$F_{y1} = 3\ 543\ \text{N}$	$F_{y2} = 1\ 750\ \text{N},$
Diamètre primitif	$d_1' = 96\ \text{mm}$	$d_2' = 245\ \text{mm}.$

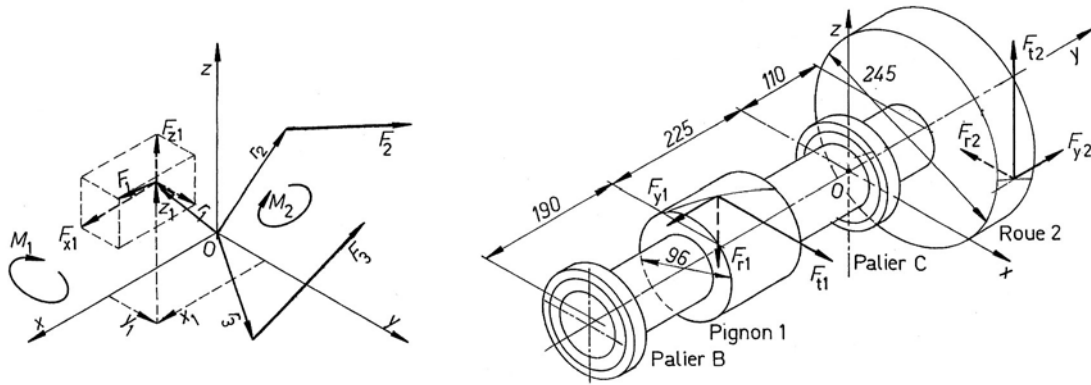


Figure 10.1 Réduction des forces et couples à l'origine du système de coordonnées  
Exemple numérique : Equilibre d'un arbre de machines équipé des deux roues dentées

Le couple transmis entre les deux roues vaut  $800 \text{ m}\cdot\text{N}$ , le sens des hélices étant identique afin de compenser les efforts axiaux sur le palier B. La réduction des forces et couples connus à l'origine du système de coordonnées  $Oxyz$ , placée au centre du palier C, donne :

$$\text{Résultante générale : } \vec{M}_{(O)} = \begin{Bmatrix} 2283,9 \text{ m}\cdot\text{N} \\ 0 \text{ m}\cdot\text{N} \\ 4235,2 \text{ m}\cdot\text{N} \end{Bmatrix}. \quad \text{Couple principal : } \vec{M}_{(O)} = \begin{Bmatrix} 2283,9 \text{ m}\cdot\text{N} \\ 0 \text{ m}\cdot\text{N} \\ 4235,2 \text{ m}\cdot\text{N} \end{Bmatrix}.$$

Les réactions d'appui de chaque palier valent :

$$\text{Palier B : } \vec{F}_B = \begin{Bmatrix} -10205 \text{ N} \\ 1793 \text{ N} \\ 5503 \text{ N} \end{Bmatrix}, \quad \text{Palier C : } \vec{F}_C = \begin{Bmatrix} -4001 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -5832 \text{ N} \end{Bmatrix}.$$

L'avantage essentiel de cette méthode est d'obtenir six relations dans lesquelles n'apparaissent chaque fois qu'une seule inconnue. Exemple de la recherche des composantes de la réaction au point B :

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 & F_{By} + R_{Gy} &= 0 & F_{By} &= 1793 \text{ N}. \\ \sum M_{(x)} &= 0 & F_{Bz} &= 2283,9 \text{ m}\cdot\text{N}/0,415 \text{ m} &= 5503 \text{ N}. \\ \sum M_{(z)} &= 0 & F_{Bx} &= 4235,2 \text{ m}\cdot\text{N}/0,415 \text{ m} &= 10205 \text{ N}. \end{aligned}$$

La somme des forces selon les axes permet de trouver les composantes de la réaction radiale totale à partir de ses composantes au point C :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & F_{Cx} &= -14206 \text{ N} + 10205 \text{ N} &= -4001 \text{ N}. \\ \sum F_z &= 0 & F_{Cz} &= -329 \text{ N} - 5503 \text{ N} &= -5832 \text{ N}. \end{aligned}$$

### 10.1.2 EFFORTS INTÉRIEURS : MÉTHODE GÉNÉRALE

Supposons l'équilibre de l'axe ou de l'arbre parfaitement connu. À partir des efforts extérieurs, forces, moments ou couples, il est nécessaire de représenter successivement :

1. le diagramme des efforts normaux, désignés par  $F_N$ , en indiquant le signe :  
(+) pour la traction, (-) pour la compression.
2. les diagrammes des efforts tranchants, désignés par  $F_T$ , dans la vue de face et dans la vue de dessus ainsi que les résultantes aux points fortement sollicités.
3. le diagramme des moments fléchissants, désignés par  $M_f$ , dans la vue de face et dans la vue de dessus ainsi que les résultantes aux points fortement sollicités.

4. le diagramme des moments de torsion le long de l'axe de la pièce, désignés par  $M_t$ .

Les forces et les moments extérieurs seront supposés concentrés si les pièces sont élancées tandis que les charges seront réparties par tronçons sur les pièces courtes. En partant de la forme des pièces et de la variation des efforts visible sur les diagrammes, en particulier sur les diagrammes des moments fléchissants et de torsion, il faut repérer les sections les plus sollicitées et contrôler les contraintes simples. Dans une même section cylindrique pleine de diamètre  $d$ , les contraintes simples, provoquées par les efforts  $F_N$ ,  $F_T$  résultant,  $M_f$  résultant et  $M_t$ , se trouvent par les relations classiques de la résistance des matériaux :

1. Contrainte normale :  $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $\sigma_n = \frac{F_N}{A}$ .

2. Contrainte de cisaillement :  $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $\tau_c = \frac{4 F_T}{3 A}$ .

1. Contrainte normale :  $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ ,  $\sigma_f = \frac{M_f}{W_z}$ .

1. Contrainte normale :  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ ,  $\tau_t = \frac{M_t}{W_p}$ .

Dans la même partie de la section contrôlée, les contraintes normales sont additionnées algébriquement, les contraintes tangentiels vectoriellement. La contrainte idéale ou de comparaison, basée sur la théorie de l'énergie de distorsion, se trouve par :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3(\alpha_0 \tau)^2},$$

avec :  $\alpha_0$  le coefficient de correction dépendant des caractéristiques mécaniques de la matière.

La contrainte admissible dépend non seulement des caractéristiques mécaniques de la matière, mais aussi des conditions de charge et de la géométrie de la pièce.

### 10.1.3 RECHERCHE DES DIMENSIONS

Très souvent, les dimensions transversales à donner à l'axe ou à l'arbre sont inconnues et il s'agit de choisir des diamètres approximatifs par exemple pendant la phase de développement d'une machine. Cette recherche de dimensions s'effectue à partir des diagrammes des efforts, en particulier des moments fléchissant et de torsion. Un calcul élémentaire, soit en flexion, soit en torsion, impose le choix des divers diamètres en fonction des contraintes admissibles de calcul élémentaires données dans le tableau 10.1.

#### 1. En flexion :

Le module de résistance à la flexion d'une section circulaire est :

$$W_z = \pi d^3 / 32 \approx 0,1 d^3.$$

En partant du moment fléchissant résultant  $M_{fi}$  dans la section  $i$ , de la contrainte de flexion admissible en calcul élémentaire  $\sigma_{f\text{él adm}}$ , le diamètre se trouve par :

$$d \geq \{ M_{fi} / (0,1 \sigma_{f\text{él adm}}) \}^{1/3}.$$

#### 2. En torsion :

Le module de résistance à la torsion d'une section circulaire est :

## 10. Axes et arbres de transmission

$$W_p = \pi d^3/16 \approx 0,2 d^3.$$

En partant du moment de torsion  $M_{ti}$  dans la section  $i$ , de la contrainte de torsion admissible en calcul élémentaire  $\tau_{t \text{ él adm}}$ , le diamètre se trouve par :

$$d \geq \{ M_{ti}/(0,2 \tau_{t \text{ él adm}}) \}^{1/3}.$$

Tableau 10.1  
**Contraintes admissibles dans les arbres en calcul élémentaire**

Désignation Suisse : VSM Allemande : DIN	Contraintes admissibles [N/mm <sup>2</sup> ] en calcul élémentaire	
	Flexion	Torsion
Aciers au carbone		
Ac 37-2	37	18
Ac 42-2	42	21
Ac 50-2	50	25
Ac 60-2	60	30
Ac 70-2	70	35
Aciers d'amélioration		
C 35	65	33
C 45	75	38
25 CrMo 4	90	45
34 CrMo 4	100	50
34 CrNiMo 6	110	55
Aciers de cémentation		
16 MnCr 5	80	40
20 MnCr 5	100	50
18 CrNi 8	120	60
En calcul très élémentaire :		
contrainte admissible en flexion	0,1 $R_m$	
contrainte admissible en torsion	0,05 $R_m$	

### 10.1.4 CONTRÔLE DES AXES

Le contrôle des axes longs se limite pratiquement à la recherche de la contrainte de flexion et au calcul des pressions moyennes dans les appuis. La contrainte maximale de flexion, dans un axe à section constante, se situe dans la section sollicitée par le moment fléchissant maximal  $M_{f \text{ max}}$  relevé sur les diagrammes des moments fléchissants. Pour les axes à sections variables, le contrôle de la contrainte s'effectue en plus à chaque changement de section. La charge appliquée sur l'axe est soit quasiment constante, soit variable dans le temps entre une valeur minimale et une valeur maximale. Les axes ne sont pas sollicités par un ou des couples de torsion, mais peuvent supporter des efforts normaux. La contrainte normale maximale se trouve par :

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_n + \sigma_f.$$

La contrainte maximale de cisaillement est située très souvent dans le plan des fibres neutres de flexion; elle n'intervient pas dans la combinaison des contraintes. En nous servant des développements du chapitre 3, les contraintes admissibles en flexion se trouvent par :

$$1. \text{ En charge statique : } \sigma_{\text{adm}} = \frac{c_g R_{\text{pf}}}{S_s} \quad (10.1.1)$$

$$2. \text{ En charge dynamique : } \sigma_{\text{adm}} = \frac{c_{\text{tot}} R_{\text{fa}}}{S_D} \quad (10.1.2)$$

avec :  $c_g$  facteur d'échelle,  
 $c_{\text{tot}} = c_s c_g c_a c_f / \beta_{kf}$  facteur de correction total,  
 $S_s$  coefficient de sécurité en charge statique,  
 $S_D$  coefficient de sécurité en charge dynamique.

Dans les axes mobiles, par exemple les axes en rotation avec charges extérieures à direction constante, le moment fléchissant devient alterné. La contrainte normale se contrôle au droit des encastres et des épaulements, dans la section à moment fléchissant maximal.

### 10.1.5 PRESSION DANS LES APPUIS

La pression moyenne admissible entre les axes ou les arbres et les pièces mobiles ou les appuis dépend de la nature des constituants, de la vitesse de glissement, des conditions de frottement et de fonctionnement. La pression admissible entre les axes ou les arbres et les parties fixes est notablement plus élevée. Si la liaison est cylindrique, la pression moyenne peut se déterminer par la relation générale :

$$\bar{p} = \frac{F_r}{b d} \quad (10.1.3)$$

Pour un arbre ou un axe en Ac 50-2 en contact avec une pièce en Ac 37-2, sans glissement des surfaces, la pression admissible sera comprise entre 80 et 120 N/mm<sup>2</sup> suivant les conditions de montage et la précision dans l'assemblage.

### 10.1.6 CONTRÔLE DES ARBRES

Le contrôle des contraintes dans les arbres obéit à la méthode générale citée dans le chapitre 3 : recherche de l'équilibre, des efforts, repérage des sections les plus sollicitées et les plus critiques, contrôle des contraintes simples et des coefficients de sécurité. Les arbres sont sollicités principalement par la flexion et la torsion.

#### 10.1.6.1 EFFORTS

Si la charge est à direction constante et l'arbre tourne, le moment fléchissant est alterné dans les sections transversales, l'amplitude du moment étant donné par :

$$M_{\text{fa}} = (M_{\text{f max}} - M_{\text{f min}})/2.$$

Le couple de torsion est habituellement variable, sa variation dépendant des composants moteur et machine entraînée. Très souvent, l'allure de couple transmis en fonction du temps ou en fonction de la position angulaire de l'arbre est inconnue. Nous pouvons distinguer deux cas de sollicitation en torsion :



1. la variation du couple de torsion en fonction de l'angle de rotation est connue : le couple varie entre une valeur minimale et une valeur maximale. Le couple moyen est alors calculable par :

$$M_{tm} = (M_{t \max} + M_{t \min})/2,$$

et l'amplitude du couple de torsion par :

$$M_{ta} = (M_{t \max} - M_{t \min})/2. \quad (10.2.1)$$

L'effort normal, s'il existe dans l'arbre, peut être soit constant, soit variable avec la position angulaire de cette pièce par rapport aux appuis.

2. la variation exacte du couple de torsion est inconnue. Dans ce cas relativement fréquent, nous pouvons supposer une variation arbitraire de cet effort entre une valeur nulle et le couple maximal  $M_{t \max}$ . Pour simuler ce couple dynamique, nous définissons :

- le couple moyen par :  $M_{tm} = 1/2 M_{t \max},$

- l'amplitude du couple par :  $M_{ta} = 1/2 M_{t \max}.$

- couple maximal :  $M_{t \max} = M_{tm} + M_{ta}. \quad (10.2.2)$

#### 10.1.6.2 CONTRAINTES SIMPLES ET IDÉALES

Les contraintes se décomposent en une partie statique imposée par les efforts et les couples moyens et une partie dynamique engendrée par les amplitudes des efforts et les couples. En négligeant l'effet de l'effort tranchant, créant le plus souvent une contrainte maximale de cisaillement dans le plan de l'axe neutre de flexion, les contraintes se trouvent par :

##### 1. Contraintes statiques

Contrainte normale :  $\sigma_n = F_N/A,$

Contrainte de flexion :  $\sigma_f = M_{fm}/W_z,$

Contrainte de torsion :  $\tau_t = M_{tm}/W_p. \quad (10.2.3)$

##### 2. Contraintes dynamiques

Amplitude de la contrainte de flexion :  $\sigma_{fa} = M_{ta}/W_z,$

Amplitude de la contrainte de torsion :  $\tau_{ta} = M_{ta}/W_p. \quad (10.2.4)$

##### 3. Combinaison des contraintes

La recherche des contraintes idéales et des coefficients de sécurité dans la partie de la section la plus sollicitée doit tenir compte habituellement des effets d'entaille. Afin de faciliter la recherche, nous admettons mêmes coefficients de correction en flexion et en torsion. En partant de la forme exacte de la pièce, des valeurs des coefficients de forme en flexion et torsion, des caractéristiques mécaniques de la matière, de l'état de surface, il est possible de trouver les coefficients d'effet d'entaille en flexion  $\beta_{kf}$  et en flexion  $\beta_{kt}$ . La contrainte moyenne résultante se trouve par, voir chapitre 3 :

$$\sigma_{im} = \sqrt{(\sigma_n + \sigma_f)^2 + 3(\alpha_{0s} \cdot \tau_m)^2}. \quad (10.2.5)$$

avec :  $\alpha_{0s} = R_{pf}/\{(3)^{0,5} R_{pt}\}.$

D'une manière semblable, l'amplitude de la contrainte idéale se trouve par :

$$\sigma_{ia} = \sqrt{\sigma_{fa}^2 + 3(\alpha_{0a} \cdot \tau_a)^2}. \quad (10.2.6)$$

avec :  $\alpha_{0a} = R_{fa} / [(3)^{0.5} R_{ta}]$ . Le coefficient de correction peut s'améliorer en tenant compte de l'effet d'entaille en flexion et en torsion dans les contraintes limites :

$$\alpha_{0a} = R_{fa} \beta_{kt} / [(3)^{0.5} R_{ta} \beta_{kf}].$$

### 10.1.6.3 COEFFICIENT DE SÉCURITÉ

Les composantes statiques et dynamiques de la contrainte idéale sont déterminées principalement en flexion. L'état de contrainte est reporté sur le diagramme de Smith modifié, le plus souvent le diagramme de flexion. Le coefficient de sécurité se trouve par les opérations successives :

- contrainte idéale supérieure :  $\sigma_{io} = \sigma_{im} + \sigma_{ia},$
- contrainte idéale inférieure :  $\sigma_{iu} = \sigma_{im} - \sigma_{ia},$
- contrainte idéale moyenne :  $\sigma_{im} = 1/2 (\sigma_{io} + \sigma_{iu}),$
- rapport des contraintes :  $Rc = \sigma_{im} / \sigma_{io}.$

Le tracé du diagramme de Smith peut se limiter à la ligne à 45° partant de la contrainte alternée limite en flexion calculable par :

$$R_{fa \text{ lim}} = c_s c_g c_a c_f R_{fa} / \beta_{kf}.$$

Le point d'intersection des deux segments rectilignes se trouve à la même abscisse  $\sigma_{fm}$ , soit :

$$R_{fa \text{ lim}} + \sigma_{fm} \tan(\pi/4) = \sigma_{fm} / Rc,$$

avec la condition complémentaire :  $\sigma_{io \text{ lim}} \leq c_g R_{pf}.$

La recherche de la contrainte supérieure limite sur le diagramme de Smith s'effectue alors facilement, soit graphiquement, soit analytiquement, et la détermination du coefficient de sécurité se trouve finalement par :

$$S_D = \frac{\sigma_{fa \text{ lim}}}{\sigma_{io}}.$$

Le coefficient de sécurité doit se situer dans la zone admissible sur la figure 3.14 donnant à droite cette valeur en fonction du rapport des contraintes et du taux de charge.

## 10.2 DÉFORMATIONS EN FLEXION ET EN TORSION

Le contrôle des déformations en flexion et en torsion des arbres et des axes utilise les relations et les principes exposés dans le cours de résistance des matériaux. Comme ces pièces sont le plus souvent à section variable, la plupart des formules fondamentales simples sont inutilisables, en particulier la nombreuse collection de formules pour la déformation des poutres en flexion.

### 10.2.1 DÉFORMATION EN FLEXION

La déformation en flexion d'un axe ou d'un arbre peut influencer directement le comportement d'une machine comme par exemple la flèche d'un arbre de machine électrique ou de machine-outil ne devra pas dépasser une valeur limite fixée par l'expérience. Les poids propres sont négligeables pour les petites pièces tandis qu'ils deviennent prépondérants dans les grandes machines où il provoquent de fortes déformations en flexion. Ce sous-chapitre présente deux méthodes pour trouver la déformation en flexion de pièces à sections variables.

## 10.2.1.1 CALCUL DE LA DÉFORMATION PAR LA MÉTHODE DE MOHR

La déformation en flexion d'un axe ou d'un arbre à section constante sous l'effet de charges concentrées peut se trouver par superposition des déformations partielles. Dans la plupart des cas réels, les sections transversales de la pièce sont variables. La recherche de la ligne élastique de l'arbre déformé peut se résoudre au moyen de la méthode proposée par Mohr. Le principe de la solution est basé sur l'analogie existant entre l'expression du moment fléchissant le long de la pièce et la charge d'une part, l'expression de la déformée et le moment fléchissant d'autre part.

Moment fléchissant	Déformée
$q(x) = -\frac{d^2 M_f}{dx^2}$	$M_f(x) = -E I_z \frac{d^2 y}{dx^2}$

(10.3.1)

La méthode grapho-analytique proposée par Mohr peut se remplacer aisément par une méthode entièrement numérique permettant de trouver finalement la déformation  $y$  en fonction de l'abscisse  $x$  de l'arbre :  $y = f(x)$ . Les forces appliquées doivent être des forces concentrées. Si les forces extérieures placées sur la pièce ne sont pas coplanaires, la recherche de la ligne élastique s'effectue dans deux plans rectangulaires, la déformation résultante étant trouvée par addition géométrique des déformations partielles.

## 10.2.1.2 PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE LA MATRICE DE TRANSMISSION

Cette méthode de calcul a été développée par Falk et convient bien au calcul numérique informatisé. C'est une méthode, en éléments finis, de formulation mixte des efforts et des déformations. Le principe de la méthode consiste en diviser la pièce en divers éléments :

1. *travée* : une portion de poutre comprise entre deux appuis consécutifs.
2. *tronçon* : une portion de travée soumise seulement à l'action d'une charge linéique uniforme  $q$ , ayant une rigidité flexionnelle constante et le long de laquelle l'effort tranchant, le moment fléchissant, la déformation angulaire et la déformation linéaire ne subissent pas de discontinuité.
3. *frontière* : une section droite particulière, comprise entre deux tronçons.

La mise en équation part de l'équation différentielle du quatrième ordre, combinant les deux relations différentielles utilisées dans la méthode de Mohr, exprimant la charge linéique  $q =$  constante en fonction de l'abscisse  $x$  de la poutre :

$$q(x) = -E I_z \frac{d^4 y}{dx^4} \quad (10.3.2)$$

En intégrant quatre fois cette équation différentielle, la déformation  $y$  en un point quelconque s'exprime par la relation générale :

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + [q/(24 E I_z)] x^4,$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes d'intégration à déterminer. Ces constantes sont recherchées à partir des conditions initiales : déformations linéaire et angulaire, moment fléchissant et effort tranchant. En indiquant les grandeurs initiales par 0, cette relation prend la forme :

$$y = y_0 + \varphi_0 x - \frac{M_{f0} x^2}{2 E I_z} - \frac{F_{T0} x^3}{6 E I_z} + \frac{q x^4}{24 E I_z} \quad (10.3.3)$$

En calculant les quatre dérivées successives et en exprimant les nouvelles grandeurs pour  $x = l$ , les diverses fonctions peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante, valable sur le tronçon débutant au point 1 et se terminant au point 2 :

$$\begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EI_z} & -\frac{l^3}{6EI_z} & \frac{ql^4}{24EI_z} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI_z} & -\frac{l^2}{2EI_z} & \frac{ql^3}{6EI_z} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_0. \quad (10.3.4)$$

Désignons par  $\{V_0\}$  et  $\{V_1\}$  les vecteurs initial et final du tronçon  $1 \rightarrow 2$ , par  $[M_1]$  la matrice carrée dite matrice de tronçon. D'une écriture simplifiée et en nous servant de la relation précédente, le vecteur  $\{V_1\}$  se trouve par :

$$\{V_1\} = [M_1] \cdot \{V_0\}. \quad (10.3.5)$$

Cette expression matricielle est valable pour tout tronçon de dimensions connues, de charge linéique constante dans ce tronçon, d'efforts et déformations initiales déterminées. La mise en équation d'une pièce à ligne moyenne rectiligne fait intervenir un certain nombre de conventions conformes à la tradition de la résistance des matériaux :

- l'axe de la pièce  $Ox$  est rectiligne;
- les déplacements  $y$  sont comptés positivement vers le bas;
- les rotations  $\varphi$  sont positives si elles sont dans le sens horlogique, comptées depuis l'axe initial de la pièce non déformée jusqu'à l'axe déformé;
- les moments fléchissants sont positifs lorsqu'ils tendent les fibres inférieures de la pièce;
- les efforts tranchants sont positifs lorsqu'ils tendent à faire tourner chaque tronçon dans le sens horlogique.
- la pièce est décomposée en tronçons, chaque tronçon ayant une rigidité flexionnelle constante :  $E I_z = \text{cte.}$  et une charge linéique invariable. Falk avait prévu de traiter les pièces à charges linéiques linéairement variables ce qui ajoute une ligne à la matrice de tronçon.

Dans un système élastique composé de  $n$  tronçons, les équations matricielles exprimant la valeur des vecteurs successifs s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{V_1\} &= [M_1] \cdot \{V_0\}, \\ \{V_2\} &= [M_2] \cdot \{V_1\} = [M_2] [M_1] \cdot \{V_0\}, \\ \{V_3\} &= [M_3] \cdot \{V_2\} = [M_3] [M_2] [M_1] \cdot \{V_0\}, \end{aligned}$$

et finalement :  $\{V_n\} = [M_n] \cdot \{V_{n-1}\} = [M_n] [M_{n-1}] \dots [M_2] [M_1] \cdot \{V_0\}.$

Cette dernière expression permet d'émettre l'algorithme de calcul des efforts et des déformations dans chacun des tronçons : Pour trouver les efforts et déformations à droite du tronçon, le vecteur de gauche de ce tronçon est prémultiplié par la matrice de tronçon.

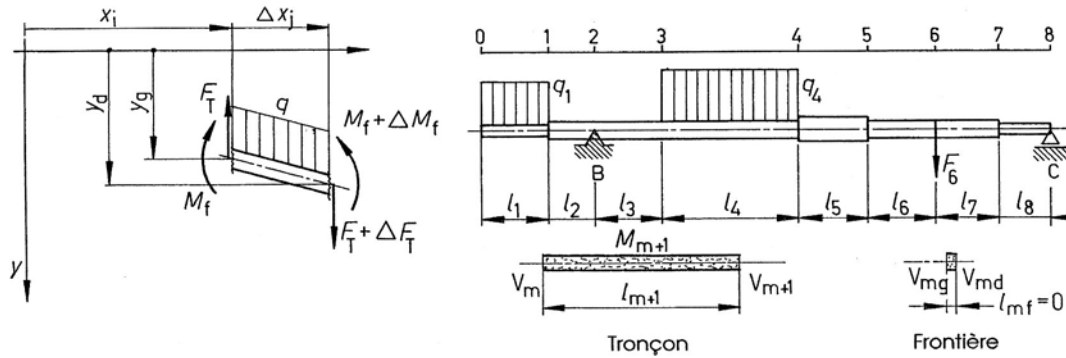


Figure 10.2 Conventions de signe et découpage en tronçon d'une pièce rectiligne isostatique

### 10.2.1.3 DISCONTINUITÉS

Très souvent, la poutre est sollicitée par des forces concentrées, des couples et l'effet d'un appui. Ces discontinuités sont introduites dans les relations matricielles au moyen d'un vecteur de frontière  $\{V_{\text{frontière}}\}$  ou par simplification par la somme de vecteurs de frontière. Pour passer du côté gauche au côté droit d'une frontière, il faut ajouter au vecteur gauche un vecteur exprimant la variation de l'effort ou de la déformation en cette section :

$$\begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_d = \begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_g + \begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_{\text{frontière}} = \begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_g + \Delta y \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta \varphi \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta M_f \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta F_T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10.4.1)$$

Le vecteur de frontière  $\{V_{\text{frontière}}\}$  peut s'introduire dans le produit matriciel sous la forme :

$$\{V_{m+1}\} = [M_{m+1}] \cdot (\{V_m\} + \{V_{\text{frontière}}\}).$$

Cette dernière relation matricielle montre qu'il est possible de remplacer le vecteur de frontière par quatre vecteurs de frontière pour chacun des efforts et déformations pris séparément.

### 10.2.1.4 UTILISATION DE LA MÉTHODE

L'application de la matrice de tronçon est réservée au calcul numérique informatisé et la programmation de cette matrice est très simple. La présence d'un ou de plusieurs appuis sur la pièce introduit chaque fois une ou plusieurs inconnues dans la solution.

#### 1. Appui fixe indéformable

La déformation linéaire au point d'appui suivant la normale est nulle et la rotation de la pièce est conservée de la gauche à la droite de la frontière. Le moment fléchissant ne varie pas mais par contre la réaction d'appui modifie brusquement la valeur de l'effort tranchant. Le vecteur à droite de la frontière B se trouve par :

$$\{V_{md}\} = \{V_{mg}\} + \{U_B\}^T, \quad (10.4.2)$$

avec :  $\{U_B\} = (0 \ 0 \ 0 \ F_B \ 0)$ .

## 2. Force concentrée

Les forces concentrées, comme les charges linéiques, sont comptées positivement vers le bas. La présence d'une force concentrée  $F$  modifie seulement la valeur de l'effort tranchant. Le vecteur à droite de la frontière vaut :

$$\{V_{md}\} = \{V_{mg}\} + \{T_F\}^T, \quad (10.4.3)$$

avec :  $\{T_F\} = (0 \ 0 \ 0 \ -F \ 0)$ .

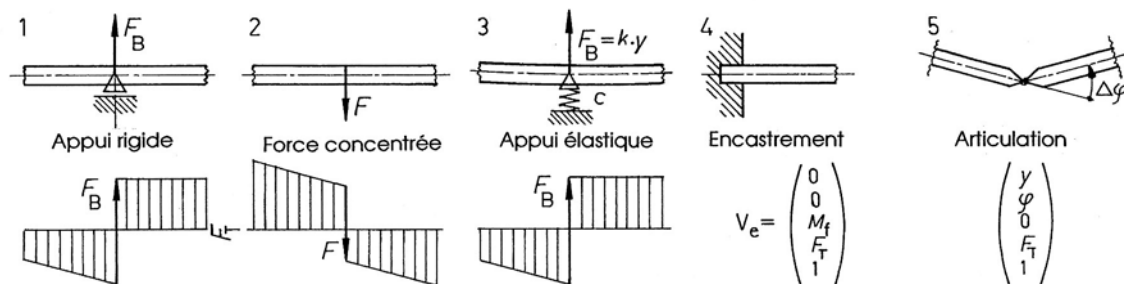


Figure 10.3 Discontinuités dans la poutre : effet des appuis et des forces concentrées

## 3. Appui élastique

La présence d'un appui élastique, donc déformable, de raideur  $k$  impose la présence d'une frontière et une déformation linéaire proportionnelle à la réaction d'appui en ce point :

$$F_B = k y.$$

Les autres grandeurs mécaniques restent inchangées. Le passage de la frontière peut s'exprimer par le produit matriciel :

$$\{V_{md}\} = [M_k] \{V_{mg}\},$$

L'appui élastique, exprimé sous cette forme, n'introduit pas d'inconnue supplémentaire dans la solution car la variation de l'effort tranchant est fonction de la déformation. Cette propriété intéressante permet de résoudre des problèmes hyperstatiques facilement. Sous forme développée, l'expression s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M_f \\ F_T \\ 1 \end{Bmatrix}_g. \quad (10.4.4)$$

## 4. Encastrement indéformable

Dans un encastrement, soit en début de pièce, soit en fin de pièce, les déformations linéaire et angulaire sont nulles tandis que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls. Le vecteur correspondant possède la structure représentée sur la figure 10.3.

$$\{V_e\} = \{U_e\}^T, \quad (10.4.5)$$

avec :  $\{U_e\} = (0 \ 0 \ M_f \ F_T \ 1)$ .

Les deux efforts  $M_f$  et  $F_T$  sont les réactions dans l'encastrement.

### 5. Articulation sans frottement

Au passage d'une articulation sans frottement, la déformation linéaire à droite de la frontière est égale à celle à gauche de la frontière et l'effort tranchant reste conservé. Le moment fléchissant est nul dans cette section tandis que la rotation subit une variation brusque au droit de la rotule. En imposant  $M_f = 0$ , il est possible de trouver  $\Delta\varphi$  au passage de la frontière.

#### 10.2.1.5 SOLUTION

En supposant le vecteur initial  $\{V_0\}$  connu, il est possible de trouver le vecteur final  $\{V_n\}$  par l'expression :

$$\{V_n\} = [M_{\text{pièce}}] \{V_0\}, \quad (10.4.6)$$

la matrice  $[M_{\text{pièce}}]$  étant la matrice produit de tous les tronçons composant la pièce. Les deux vecteurs possèdent huit termes dont quatre peuvent être inconnus. La solution du système linéaire correspondant permet de trouver finalement tous les vecteurs de la pièce. Si le problème comprend un système de forces dans l'espace, la déformation totale se trouve à partir des déformations partielles trouvées dans deux plans rectangulaires et combinaison de ces déformations.

Tableau 10.2  
**Déformations limites admissibles dans les axes et les arbres**

<i>Flèche admissible</i>	
Conception de machines	$f_{\max}/l = 1/3000$
Machines-outils	$f_{\max}/l = 1/5000$
Inclinaison de la ligne élastique	
Aux paliers et appuis	$\varphi = 0,001 \text{ radian}$
<i>Attention :</i>	
Si des conditions plus sévères de service sont imposées choisir ces critères comme base de conception	

#### 10.2.1.6 DÉFORMATIONS LIMITES

Dans beaucoup d'organes de transmission élancés, la déformation radiale admissible impose les dimensions transversales. Le tableau 10.2 donne les valeurs limites usuelles. La déformation de l'axe ou de l'arbre ne doit en aucun cas mettre en danger la fonction exigée pour les autres éléments fixés sur l'axe ou l'arbre, comme par exemple les erreurs de voile des roues dentées fixées par les systèmes de tolérances.

### 10.2.2 RIGIDITÉ FLEXIONNELLE CORRIGÉE

Les méthodes de calcul proposées conviennent aux arbres et axes de petites dimensions, travaillant dans la plupart des machines courantes. Les compléments d'information exposés ici permettent de cerner un peu mieux les problèmes existant dans les grandes machines ou pour des pièces tournant à très haute vitesse. Le calcul de la déformation en flexion des arbres et

des axes ou de la vitesse critique en flexion présuppose que chaque tronçon de la pièce obéit à la déformation en flexion donnée par l'expression différentielle :

$$M_f(x) = -E I_z \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

La transmission de la déformation au droit d'un épaulement ne s'effectue pas brusquement, mais progressivement. Ces épaulements sont particulièrement importants dans les arbres avec roues dentées taillées dans l'arbre ou dans les rotors de turbomachines. Pour obtenir un résultat à peu près conforme à la réalité, l'épaulement est remplacé par un tronçon imaginaire tronconique d'angle égal à  $45^\circ$ . La correction est effectuée lorsque le rapport entre les moments quadratiques de deux sections cylindriques successives est supérieur à 2, soit un rapport de diamètre supérieur à 1,19. La figure 10.4 montre l'organigramme pour le choix du diamètre de calcul et de la longueur du tronçon.

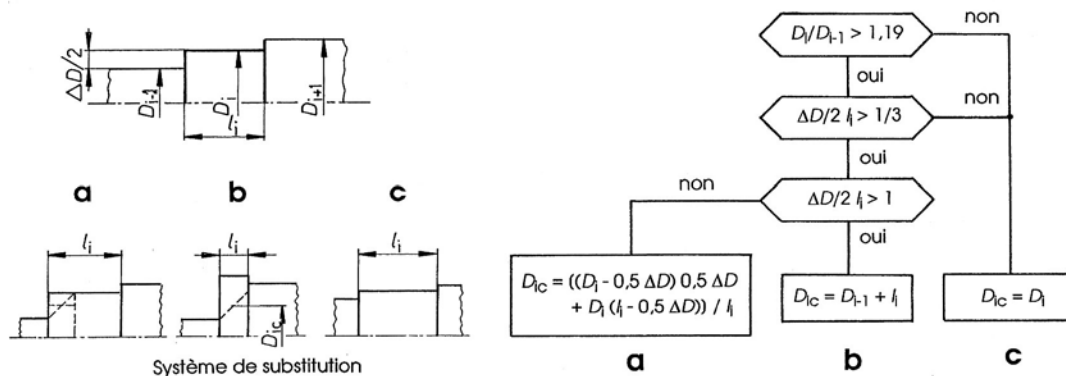


Figure 10.4 Rigidité flexionnelle des arbres avec épaulements

Les arbres avec une géométrie particulière comme les pièces creuses peuvent se décomposer en tronçons équivalents en rigidité flexionnelle. L'application directe des relations pour tronçons cylindriques pleins aux tronçons cylindriques évidés peut engendrer des dimensions irréalistes. Dans ce cas, il faut veiller à corriger le résultat en appliquant correctement la règle du cône à  $45^\circ$ . Dans la matrice de tronçon des pièces en flexion, les relations proposées pour le calcul de la déformation radiale ne tiennent pas compte de l'énergie produite par l'effort tranchant le long de la pièce. Un autre problème difficile à modéliser est l'effet des appuis : ces éléments ne sont jamais à action ponctuelle et produisent toujours des charges réparties. Toutes les simplifications introduites dans la recherche des déformations engendrent des erreurs sur les résultats dont il faut tenir compte dans son appréciation.

### 10.2.3 DÉFORMATION EN TORSION

La déformation angulaire d'un arbre circulaire de diamètre constant  $d$  et de longueur  $l$  soumis à l'action d'un couple de torsion constant  $M_t$  sur toute la longueur  $l$  est :

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{G I_p}. \quad (10.5.1)$$

avec :  $I_p = \pi d^4/32$  le moment quadratique polaire de la section transversale,  
 $G$  le module de glissement du matériau.



Habituellement, les arbres ne sont pas à section constante sur toute leur longueur et le couple de torsion varie également d'une extrémité à l'autre de la pièce. L'expression générale de la déformation en torsion s'écrit :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G I_p}. \quad (10.5.2)$$

La déformation angulaire totale entre deux sections droites placées aux abscisses  $x_1$  et  $x_2$  se calcule par :

$$\varphi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_{ti}}{G I_{pi}} dx. \quad (10.5.3)$$

Il peut arriver que le diamètre de l'arbre soit imposé par la déformation angulaire admissible par unité de longueur. Le diamètre de l'arbre est lié aux autres grandeurs géométriques et mécaniques par :

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_t l}{\pi G \varphi_{adm}}}. \quad (10.5.4)$$

En admettant une déformation de  $0,25^\circ$  par mètre dans un arbre à section constante et en exprimant la puissance à transmettre  $P$  en kW, la vitesse de rotation  $n$  en tours par minute, le diamètre de l'arbre  $d$  exprimé en cm se trouve par la formule pratique :

$$d[\text{cm}] = 13 \sqrt[4]{\frac{P[\text{kW}]}{n[\text{t/min}]}.$$

*Remarque importante :*

La résistance mécanique de l'acier utilisé n'a pratiquement aucune influence sur la déformation angulaire de l'arbre puisque le module de glissement est pratiquement indépendant des caractéristiques mécaniques des aciers.

## 10.3 FRÉQUENCE PROPRE ET VITESSE CRITIQUE

Chaque axe ou arbre peut être considéré comme un système vibratoire constitué par au moins une masse, un ressort et un amortisseur. Les vibrations en torsion sont excitées par les variations de couple, celles en flexion par les forces extérieures variables et les vitesses critiques de flexion par les masses en rotation soumises à l'effet centrifuge.

### 10.3.1 CONSIDÉRATIONS SUR LES VIBRATIONS EN TORSION

Considérons un système mécanique composé d'un arbre à section constante, diamètre  $d$ , longueur  $l$ , encastré à gauche, libre à l'autre et relié en ce point à un volant de moment d'inertie  $J_a$ . La raideur de l'arbre en torsion est désignée par  $k$ . Le moment d'inertie de l'arbre est supposé négligeable vis à vis de celui du volant. Imprimons au volant une déformation angulaire initiale  $\varphi_0$ . Le couple à produire sur le volant, proportionnel à la déformation, vaut :

$$M_t = k \varphi_0 = (G I_p / l) \varphi_0.$$

Abandonnons ensuite le système à lui-même; en négligeant l'amortissement du guidage et de la matière, le mouvement du disque est donné par la relation différentielle :

$$J_a \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{G I_p}{l} \varphi = 0. \quad (10.6.1)$$

Le mouvement pris par le volant est circulaire oscillatoire harmonique et la pulsation se trouve par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G I_p}{l J_a}}. \quad (10.6.2)$$

En supposant un mouvement harmonique du volant donné par la relation générale :

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t),$$

l'accélération angulaire subie par cette pièce vaut :

$$\alpha = -\varphi_0 \omega^2 \cos(\omega t) = -\varphi \omega^2.$$

Ainsi le couple extérieur périodique modifiant la vitesse du disque peut s'exprimer par la relation générale de la dynamique des corps en rotation autour d'un axe fixe :

$$M(t) = M_0 \cos(\omega t) = J_a \alpha = J_a (-\varphi \omega^2).$$

Si ce système mécanique est sollicité par un couple extérieur variable, périodique ou non, l'ensemble mécanique correspond à un système en vibrations forcées. La fréquence de résonance est atteinte lorsque la pulsation du couple extérieur est égale à la pulsation  $\omega_0$ , l'amortissement réel des arbres en acier restant toujours très faible. La pulsation propre de ce système élémentaire en torsion est donc :

$$\omega_{pr} = \sqrt{\frac{G I_p}{l J_a}}. \quad (10.6.3)$$

avec :  $G$  module de glissement du matériau de l'arbre,  
 $I_p = \pi d^4/32$ , moment quadratique polaire de l'arbre,  
 $l$  longueur de l'arbre,  
 $J_a$  moment d'inertie du volant par rapport à son axe.

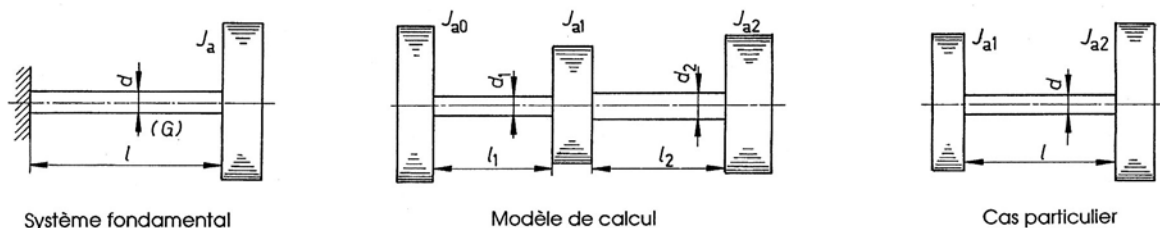


Figure 10.5 Systèmes mécaniques élémentaires pouvant être activés en torsion

### 10.3.2 FRÉQUENCES PROPRES D'UN ARBRE EN TORSION

Le problème réel à résoudre se compose habituellement de masses réparties dans l'arbre présentant une certaine rigidité torsionnelle. Le calcul de la pulsation ou fréquence propre ne peut s'effectuer qu'en remplaçant la structure à analyser par un modèle de calcul convenable. Ce sous-chapitre traite une méthode élémentaire permettant de trouver cette caractéristique importante du comportement des arbres.

#### 10.3.2.1 MODÈLE DE CALCUL

Le modèle de calcul se compose de  $n$  disques rigides, de moment d'inertie de masse  $J_{ai}$ , séparés les uns des autres par des tronçons d'arbre élastique, sans masse. L'amortissement

engendré par l'hystérésis du matériau ou par les frottements extérieurs est négligé. La raideur en torsion du tronçon d'arbre, placé entre deux disques, se trouve par :

$$k_i = G I_{pi} / l_i,$$

en supposant le diamètre de l'arbre constant dans le tronçon i.

### 10.3.2.2 MATRICE DE TRONÇON

Dans un tronçon élémentaire constitué d'un arbre à section constante de longueur  $l$  et d'un disque de moment d'inertie de masse  $J_a$ , la déformation angulaire et le couple de torsion aux deux extrémités gauche et droite, compte tenu de l'inertie du volant, sont reliés par :

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ M_t \end{matrix} \right\}_d \\ \{Z_d\} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{G I_p} \\ -J_a \omega^2 & 1 - \frac{J_a l \omega^2}{G I_p} \end{pmatrix} \\ [M_1] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ M_t \end{matrix} \right\}_g \\ \{Z_g\} \end{matrix} \quad (10.7.1)$$

La matrice carrée  $[M_1]$  est nommée matrice de tronçon en torsion. Pour un système vibratoire constitué de  $n-1$  tronçons, la déformation angulaire et le couple final peuvent se trouver en fonction de la déformation et du couple initial par :

$$\{Z_n\} = [M_n] [M_{n-1}] \dots [M_3] [M_2] [M_1] \cdot \{Z_0\}. \quad (10.7.2)$$

Dans cette expression,  $\{Z_0\}$  et  $\{Z_n\}$  sont les vecteurs initial et final,  $[M_i]$  sont les matrices de chacun des tronçons en torsion.

### 10.3.2.3 RECHERCHE DES PULSATIONS PROPRES

Supposons un système mécanique, ne présentant aucun encastrement, constitué par un certain nombre de disques séparés par des arbres élastiques. Les couples initial et final sont nuls puisque le système est libre. La relation générale des matrices de tronçon de ce système peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_n = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_0 \quad (10.7.3)$$

En développant la seconde ligne, la relation est satisfaite si le terme  $m_{21}$  est nul, soit :

$$0_d = m_{21} \cdot \varphi + m_{22} \cdot 0_g. \quad (10.7.4)$$

En calculant la valeur de cet élément en fonction de la pulsation, soit  $m_{21} = m_{21}(\omega_i)$ , il est possible de trouver les pulsations pour lesquelles le terme  $m_{21}$  s'annule. Ce sont les pulsations propres du système.

### 10.2.3.4 COMPORTEMENT D'UNE TRANSMISSION ÉLÉMENTAIRE

Le modèle d'une transmission directe élémentaire se compose d'un moteur, moment d'inertie de masse  $J_{a1}$ , d'un arbre intermédiaire de raideur  $k = G I_p / l$  et d'un récepteur de moment d'inertie de masse  $J_{a2}$ . Le premier tronçon comprend seulement le disque  $J_{a1}$  de telle sorte que la mise en équation devient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\varphi}{0} \end{Bmatrix}_d = \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{G I_p} \\ -J_{a1} \omega^2 & 1 - \frac{J_{a2} l \omega^2}{G I_p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -J_{a1} \omega^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\varphi}{0} \end{Bmatrix}_g \quad (10.7.5)$$

En développant la seconde ligne, on obtient l'égalité :

$$m_{21} = \omega^2 (-J_{a1} - J_{a2} + J_{a1} J_{a2} l \omega^2 / G I_p) = 0.$$

La pulsation propre du système se trouve finalement par :

$$\omega_{pr} = \sqrt{\frac{G I_p}{l} \left( \frac{1}{J_{a1}} + \frac{1}{J_{a2}} \right)}. \quad (10.7.6)$$

Dans le cas de trois masses, de moment d'inertie  $J_{a1}$ ,  $J_{a2}$  et  $J_{a3}$ , séparées par deux arbres, le système mécanique possède deux pulsations propres. Un système libre composé de  $n$  disques séparés par  $n-1$  arbres présente  $n-1$  pulsations propres.

### 10.3.3 VITESSE CRITIQUE DE FLEXION

Les conditions d'équilibre dynamique d'un disque de masse  $m$ , placé au centre des appuis d'un arbre de raideur  $k$  en flexion, animé d'une vitesse angulaire  $\omega$ , imposent une flèche supplémentaire :

$$f_{dyn} = m e \omega^2 / (k/m - \omega^2),$$

avec :  $e$  l'excentricité du balourd de la masse  $m$ .

Quelle que soit la grandeur de l'excentricité  $e$ , la flèche dynamique de l'arbre devient infiniment grande lorsque :

$$\omega^2 = k/m.$$

La vitesse angulaire pour laquelle cette condition est atteinte porte le nom de vitesse critique en flexion. Elle vaut :

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.8.1)$$

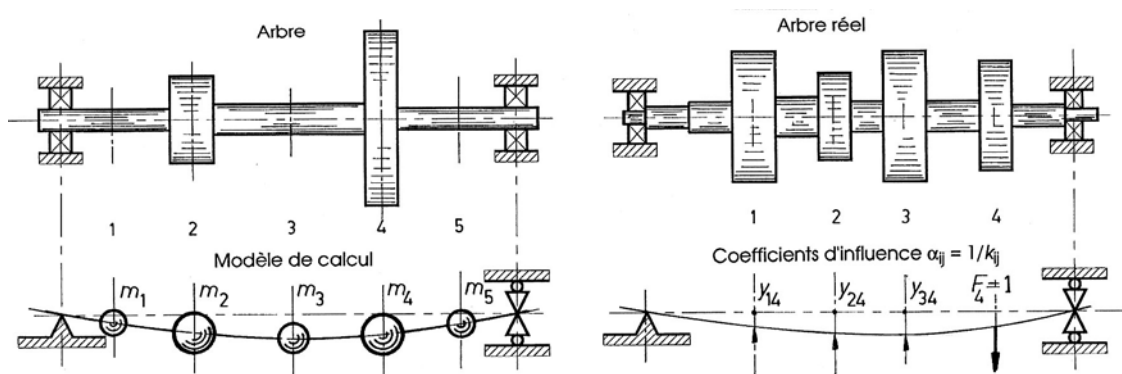


Figure 10.6 Vitesse critique en flexion d'un arbre sur deux appuis

## 10.3.3.1 RECHERCHE SIMPLIFIÉE DE LA VITESSE CRITIQUE

Lorsque la vitesse angulaire est inférieure à la valeur critique, la flèche dynamique de l'arbre dans le domaine hypocritique augmente progressivement pour atteindre une valeur stable pour autant que les caractéristiques du matériau le permettent. Quant la vitesse angulaire est plus grande que la valeur critique, la déformation diminue et l'arbre a tendance à se centrer autour de son centre de masse. Pour un arbre à section variable ou un arbre à plusieurs masses, la vitesse angulaire critique en flexion peut se trouver approximativement à partir de la flèche statique maximale *sous l'effet de son poids propre* et de toutes les masses fixées sur cette pièce. La vitesse critique est alors donnée par :

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{m_{eff} g}{f_{s max} m_{eff}}} = \sqrt{\frac{g}{f_{s max}}}. \quad (10.8.2)$$

avec :  $m_{eff}$  masse effective intervenant dans la déformation et la vitesse critique,  
 $g$  accélération de la pesanteur terrestre,  
 $f_{s max}$  déformation statique maximale sous l'effet du poids propre.

Il faut adopter une vitesse angulaire  $\omega$  franchement hypocritique ou éventuellement hypercritique. La conditions à remplir, dans la conception d'un arbre, est :

$$\omega < 0,7 \omega_{cr} \quad \text{ou} \quad \omega > 1,5 \omega_{cr}.$$

Le régime hypercritique peut s'utiliser si le passage de la vitesse critique de flexion est suffisamment rapide à l'accélération et à la décélération.

## 10.3.3.2 ARBRE À PLUSIEURS MASSES

Considérons un arbre placé sur deux appuis articulés sans frottement équipé de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  et supposons l'arbre de masse négligeable, l'effet gyroscopique n'étant pas pris en compte, animé d'une vitesse angulaire  $\omega$ . La déformation radiale de l'arbre au niveau de la masse  $m_i$  est désignée par  $y_i$ . Les forces centrifuges aux points 1 et 2 valent :

$$F_{c1} = m_1 y_1 \omega^2 \quad \text{et} \quad F_{c2} = m_2 y_2 \omega^2.$$

Sous l'effet de ces deux forces, la déformation au droit des masses est produite par l'action conjuguée des deux forces. En introduisant les coefficients d'influence  $\alpha_{ij} = 1/k_{ij}$ , les déformations s'expriment par :

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 = \omega^2 (\alpha_{11} m_1 y_1 + \alpha_{12} m_2 y_2), \\ y_2 &= \alpha_{21} F_1 + \alpha_{22} F_2 = \omega^2 (\alpha_{21} m_1 y_1 + \alpha_{22} m_2 y_2). \end{aligned}$$

Cherchons la valeur des déformations inconnues  $y_1$  et  $y_2$  en ordonnant ces deux équations et en introduisant les expressions précédentes des forces :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \alpha_{12}m_2 \\ \alpha_{21}m_1 & \alpha_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (10.8.3)$$

C'est un système de deux équations linéaires homogènes dont la solution non triviale est imposée par un déterminant nul. La recherche du polynôme caractéristique et de la valeur propre de la matrice permet de trouver les deux vitesses critiques en flexion de l'arbre.

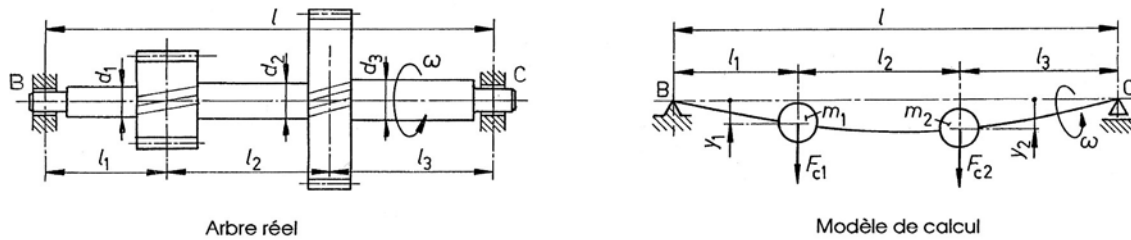


Figure 10.7 Modèle de calcul de la vitesse critique d'un arbre à section variable équipé de deux masses

*Généralisation :*

Pour un système de  $n$  masses placées sur un arbre élastique, la déformation linéaire au droit de la masse  $m_i$  est donnée par l'expression générale :

$$y_i = \omega^2 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} m_j y_j. \quad (10.8.4)$$

Le calcul des coefficients d'influence s'effectue par les méthodes exposées en résistance des matériaux. Dans un système linéaire,  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  en vertu du principe de réciprocité de Maxwell. L'écriture de la matrice carrée comporte les termes :

- sur la diagonale principale :  $\alpha_{ii} m_i - 1/\omega^2$ ,
- tous les autres éléments :  $\alpha_{ij} m_j$ .

Le calcul des valeurs propres de la matrice carrée, par exemple en recherchant le polynôme caractéristique, permet de trouver les pulsations critiques en flexion.

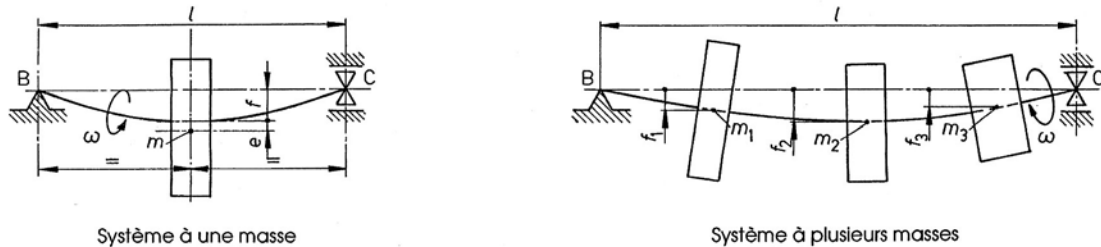


Figure 10.8 Principe de la présence d'une vitesse critique de flexion sur un système à une masse  
Arbre ou axe à plusieurs masses sur deux appuis isostatiques

### 10.3.4 ÉLASTICITÉ ET AMORTISSEMENT DES APPUIS

Le comportement d'un arbre ou d'un axe dépend non seulement de sa géométrie et des caractéristiques mécaniques de cette pièce, mais également du comportement des pièces adjacentes comme les appuis constitués par des paliers déformables. Si l'arbre charge les paliers par l'effet du poids et des efforts appliqués, les paliers réagissent par des forces opposées aux forces actives. Sous l'effet de ces charges, les appuis et leur support se déforment. Les turbo-machines sont équipées de paliers lisses avec une couche de lubrifiant séparant l'arbre des coussinets. Le comportement d'un palier lisses peut se simuler en introduisant les composantes rectangulaires de son élasticité et de sa faculté d'amortissement. La théorie et la pratique des paliers lisses montrent que ces deux grandeurs dépendent de la géométrie du palier et du nombre de Sommerfeld. Désignons par  $k$  la raideur et par  $c$  l'amortissement; les composantes rectangulaires sont :

- dans le plan  $Oxy$  :  $k_{xx}$  et  $c_{xx}$  ,
- dans le plan  $Oyz$  :  $k_{zz}$  et  $c_{zz}$  .

Malheureusement, les raideurs et les amortissements dans les paliers lisses ont un comportement non linéaire. Afin de pouvoir estimer le comportement de l'ensemble, ces grandeurs sont habituellement linéarisées pour de petits déplacements autour du point de fonctionnement. La solution générale des vibrations forcées d'un arbre placé sur deux ou plusieurs appuis, sollicité par des couples ou des forces variables en fonction du temps, peut s'écrire sous la forme matricielle générale :

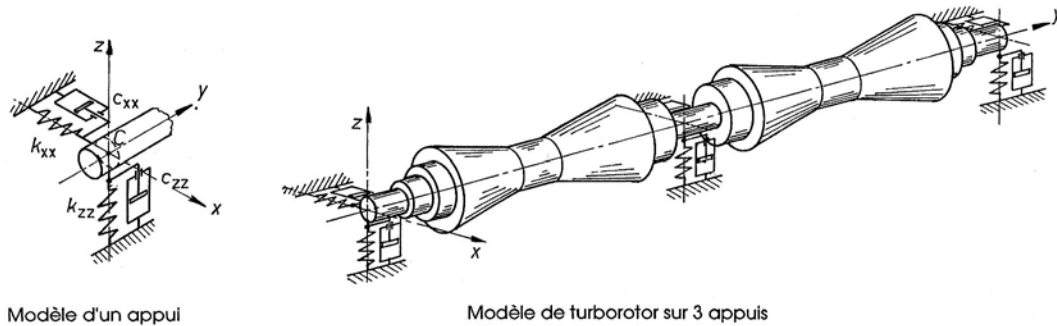


Figure 10.9 Comportement d'un arbre centré dans des appuis déformables

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F_0\}(t).$$

Les fréquences propres et les modes propres correspondants sont trouvés par la solution du système homogène sans amortissement, tirée de la relation matricielle de l'analyse modale. La solution  $\{u\}(t)$  dépend des propriétés du modèle de calcul et des conditions initiales.

## 10.4 EXEMPLE DE CONTRÔLE D'UN ARBRE

L'exemple proposé traite le contrôle d'un arbre intermédiaire d'une transmission par roues dentées, au point de vue contraintes nominales et maximales, de la déformation sous charge, de la première vitesse critique en flexion et des pulsations propres en torsion.

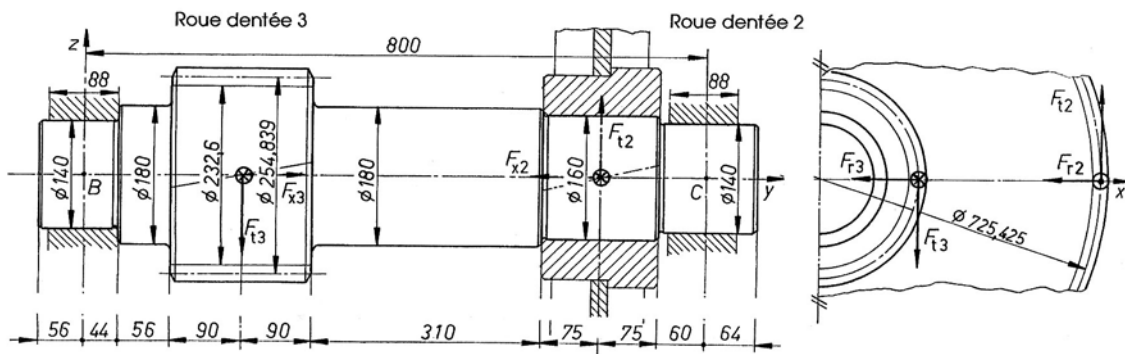


Figure 10.10 Arbre intermédiaire d'un réducteur de vitesse à engrenages

### 10.4.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Un réducteur de vitesse à engrenages doit transmettre une puissance  $P = 1\,250\text{ kW}$  à la fréquence de rotation de 25 t/s à l'entrée. Les nombres de dents adoptés pour les deux engrenages sont :

$$\begin{array}{lll} \text{Engrenage I :} & z_1 = 27 & z_2 = 88, \\ \text{Engrenage II :} & z_3 = 25 & z_4 = 68. \end{array}$$

L'arbre intermédiaire à contrôler, sur lequel sont montées les roues 2 et 3, présente les dimensions données sur la figure 10.10. La roue 2 est emmanchée sur l'arbre, le pignon 3 est taillé dans l'arbre. Ce dernier est en acier de cémentation au carbone Ck 15.

### 10.4.2 ÉQUILIBRE DE L'ARBRE

#### 1. DIMENSIONS GÉOMÉTRIQUES DES ROUES DENTÉES

Le réducteur de vitesse est équipé de roues dentées à denture hélicoïdale déportée, l'entraxe de fonctionnement étant 474 mm. Les dimensions nécessaires au calcul des efforts sont :

	Roue 2	Roue 3
- diamètre de fonctionnement	$d_2' = 725,425$	$d_3' = 254,839$
- angle de pression apparent	$\alpha_{t1}' = 21,5874^\circ$	$\alpha_{t2}' = 20,8728^\circ$
- angle d'hélice de fonctionnement	$\beta_1' = 12,0922^\circ$	$\beta_2' = 10,0379^\circ$
- largeur de la denture	$b_1 = 120$	$b_2 = 180$

Les coefficients de déport adoptés permettent d'obtenir une résistance semblable pour les deux roues formant cet engrenage.

#### 2. EFFORTS SUR LA DENTURE

Il est admis que la transmission entre les dentures s'effectue sans pertes par frottement des flancs et brassage du lubrifiant dans le carter. Les divers efforts se trouvent par les calculs suivants :

- couple moteur sur l'arbre d'entrée :  $M_1 = 1\,250\,000\text{ W} / (2\pi \cdot 25\text{ s}^{-1}) = 7957,75\text{ mN}$ ,
- couple sur l'arbre intermédiaire :  $M_{23} = 7\,957,75\text{ mN} \cdot 88/27 = 25\,936,4\text{ mN}$ ,
- forces tangentielles :  $F_{t2} = 25\,936,4\text{ mN} / (0,5 \cdot 0,725425\text{ m}) = 71\,506,7\text{ N}$ ,  
 $F_{t3} = 25\,936,4\text{ mN} / (0,5 \cdot 0,254839\text{ m}) = 203\,550,9\text{ N}$ .
- forces radiales :  $F_{r2} = 71\,506,7\text{ N} \cdot \tan 21,5874^\circ = 28\,293,3\text{ N}$ ,  
 $F_{r3} = 203\,550,9\text{ N} \cdot \tan 20,8728^\circ = 77\,617,8\text{ N}$ ,
- forces axiales :  $F_{x2} = 71\,506,7\text{ N} \cdot \tan 12,0922^\circ = 15\,319,5\text{ N}$ ,  
 $F_{x3} = 203\,550,9\text{ N} \cdot \tan 10,0379^\circ = 36\,030,4\text{ N}$ .

#### 3. ÉQUILIBRE DE L'ARBRE INTERMÉDIAIRE

L'équilibre de l'arbre est recherché dans les deux vues : vue de face et vue de dessus, en posant les relations usuelles de la statique.

*Vue de face : plan B y z*

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 : & \quad F_{By} + F_{x3} + F_{x2} = 0; \quad \Rightarrow \quad F_{By} = -20\,710,9\text{ N}, \\ \Sigma M_{(B)} = 0 : & \quad F_{Cz} = (190\text{ mm } F_{t3} - 665\text{ mm } F_{t2})/800\text{ mm} = -11\,096,6\text{ N}, \\ \Sigma M_{(C)} = 0 : & \quad F_{Bz} = (610\text{ mm } F_{t3} - 135\text{ mm } F_{t2})/800\text{ mm} = 143\,140,8\text{ N}, \\ \text{Contrôle : } \Sigma F_z = 0 : & \quad 143\,140,8\text{ N} - 203\,550,9\text{ N} + 71\,506,7\text{ N} - 11\,096,6\text{ N} = 0 \\ & \quad \Rightarrow \text{équilibre en ordre pour la vue de face.} \end{aligned}$$

*Vue de dessus : plan B x y*

$$\begin{aligned} \Sigma M_{(B)} = 0 : & \quad F_{Cx} = (190\text{ mm } F_{r3} + 127,42\text{ mm } F_{x3} + 655\text{ mm } F_{r2} - 362,71\text{ mm } F_{x2})/800\text{ mm} = \\ & \quad F_{Cx} = 40\,746,1\text{ N}, \\ \Sigma M_{(C)} = 0 : & \quad F_{Bx} = (610\text{ mm } F_{r3} - 127,42\text{ mm } F_{x3} + 135\text{ mm } F_{r2} + 362,71\text{ mm } F_{x2})/800\text{ mm} = \\ & \quad F_{Bx} = 65\,165\text{ N}, \\ \text{Contrôle : } \Sigma F_x = 0 : & \quad 65\,165\text{ N} - 77\,617,8\text{ N} - 28\,293,3\text{ N} + 40\,746,1\text{ N} = 0 \end{aligned}$$



## 10. Axes et arbres de transmission

⇒ équilibre en ordre pour la vue de dessus.

*Réactions radiales totales :*

Point B :  $F_{rB} = 157,28 \text{ kN } (65,5^\circ)$ ,

Point C :  $F_{rC} = 42,23 \text{ kN } (-15,2^\circ)$ .

### 4. RÉPARTITION DE LA CHARGE SUR L'ARBRE

La charge sur chaque pièce portante est répartie uniformément sur la surface de contact dans chacune des vues : vue de face, vue de dessus. La longueur portante des appuis ou paliers en B et C est 88 mm. L'arbre est décomposé en 14 tronçons. Les charges réparties, la longueur des tronçons et le diamètres correspondant de chaque tronçon sont donnés dans le tableau 4.24 . Avant de calculer les efforts et les déformations, il faut trouver les charges linéiques à appliquer sur chaque tronçon.

*Vue de face*

Appui B :  $q_B = 143\,140,8 \text{ N/88 mm} = 1626,6 \text{ N/mm } (-)$ ,

Appui C :  $q_C = 11\,096,6 \text{ N/88 mm} = 126,1 \text{ N/mm } (+)$ ,

Roue 3 :  $q_3 = 203\,550,9 \text{ N/180 mm} = 1130,8 \text{ N/mm } (+)$ ,

Roue 2 :  $q_2 = 71\,506,7 \text{ N/150 mm} = 476,7 \text{ N/mm } (-)$ .

*Vue de dessus*

Couple de basculement : Roue 3 :  $M_{b3} = 0,5 \cdot 254,839 \text{ mm} \cdot 36\,030,4 \text{ N} = 4\,590\,976 \text{ mm}\cdot\text{N}$ ,

Roue 2 :  $M_{b2} = 0,5 \cdot 725,425 \text{ mm} \cdot 15\,319,5 \text{ N} = 5\,556\,574 \text{ mm}\cdot\text{N}$ .

Appui B :  $q_B = 65\,165 \text{ N/88 mm} = 740,5 \text{ N/mm } (+)$ ,

Appui C :  $q_C = 40\,746,1 \text{ N/88 mm} = 463,0 \text{ N/mm } (+)$ ,

Roue 3 :  $q_{3g} = |77\,617,8 \text{ N/180 mm} - 4\,590\,976 \text{ mm}\cdot\text{N}/(902 \text{ mm}^2)| = 135,6 \text{ N/mm } (+)$ ,

$q_{3d} = |77\,617,8 \text{ N/180 mm} + 4\,590\,976 \text{ mm}\cdot\text{N}/(902 \text{ mm}^2)| = 998,0 \text{ N/mm } (-)$ ,

Roue 2 :  $q_{2g} = |28\,293,3 \text{ N/150 mm} + 5\,556\,574 \text{ mm}\cdot\text{N}/(752 \text{ mm}^2)| = 1\,176,5 \text{ N/mm } (-)$ ,

$q_{2d} = |28\,293,3 \text{ N/150 mm} - 5\,556\,574 \text{ mm}\cdot\text{N}/(752 \text{ mm}^2)| = 799,2 \text{ N/mm } (+)$ .

En introduisant ces diverses charges dans les matrices de tronçon, la pièce doit rester en équilibre. Le calcul fait apparaître des erreurs de l'ordre de 5 N aux appuis, points 2 et 12 de la poutre, provenant des arrondis numériques.

Tableau 10.3

### Géométrie, charges réparties, efforts dans l'arbre de machine

Tronçon Numéro	Long. en mm	Charge		Diamètre en mm	Efforts calculés			
		$q_f$ N/mm	$q_d$ N/mm		$F_{Tf}$ kN	$F_{Td}$ kN	$M_{ff}$ m·N	$M_{fd}$ m·N
0	0	0	0	--	0	0	0	0
1	12	0	0	140	0	0	0	0
2	44	-1626,6	740,5	140	71,79	-32,58	1574,5	-716,8
3	44	-1626,6	740,5	140	143,36	-65,16	6308,0	-2867,2
4	56	0	0	180	143,36	-65,16	14336,4	-6516,4
5	90	1130,8	135,6	232,6	41,59	-77,37	22659,4	-12930,4
6	90	1130,8	-998,0	232,6	-60,18	12,45	21822,9	-15851,7
7	155	0	0	180	-60,18	12,45	12494,9	-13921,7
8	155	0	0	180	-60,18	12,45	3166,9	-11991,7
9	75	-476,7	-1176,5	160	-25,10	100,69	-31,2	-7748,9
10	75	-476,7	799,2	160	9,97	40,75	-598,5	-2444,9
11	16	0	0	140	9,97	40,75	-438,9	-1793,0
12	44	126,1	463	140	5,55	20,37	-122,1	-448,2
13	44	126,1	463	140	0	0	0	0
14	20	0	0	140	0	0	0	0
Indices des efforts : f vue de face d vue de dessus								

### 10.4.3 EFFORTS ET CONTRAINTES DANS L'ARBRE

Ce problème de forces dans l'espace nécessite le tracé de six diagrammes composants. Sur la figure 10.11, les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants sont tracés sur la même partie de la figure, chacun à la même échelle.

#### 1. RECHERCHE DES SECTIONS À CONTRÔLER

Les valeurs maximales et minimales des efforts sont données sur la figure. L'examen simultané de la variation des efforts le long de l'axe de l'arbre et de la forme de l'arbre permet de cerner les sections les plus sollicitées au droit d'épaulements. Ce sont :

- section  $m$  à la frontière entre les tronçons 6 et 7,
- section  $n$  à la frontière entre les tronçons 8 et 9.

La forme des raccordements est visible sur le fig. 10.12 : diamètres de part et d'autre de la section, rayon de raccordement. Les efforts peuvent se lire dans le tableau 4.4 ou sur la représentation des diagrammes correspondants.

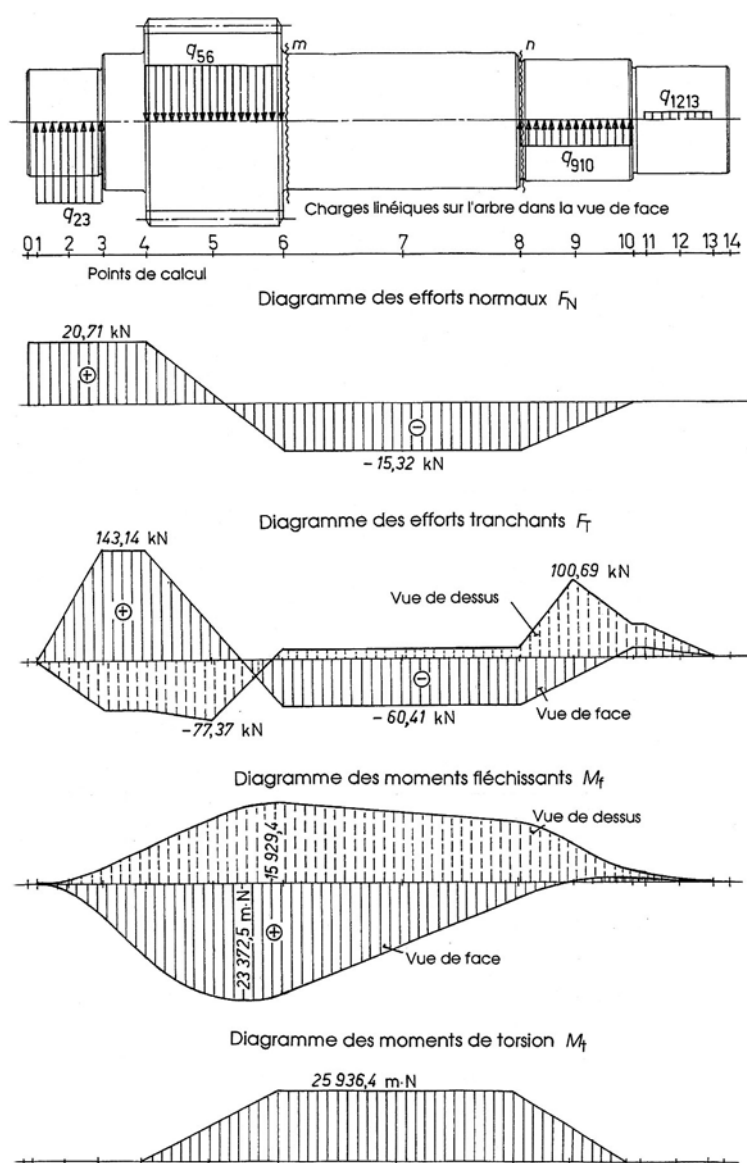


Figure 10.11 Charges réparties et diagrammes des efforts :  $F_N$ ,  $F_T$ ,  $M_f$  et  $M_t$  dans l'arbre

## 2. CONTRAINTES SIMPLES

Les contraintes simples sont calculées dans la section  $m$  qui paraît à première vue plus sollicitée que la section  $n$ .

### 1. Efforts

Effort normal :  $F_N = -15,32 \text{ kN}$ ,  
 Effort tranchant :  $F_T = -60,41 \text{ kN}$  et  $12,45 \text{ kN} \Rightarrow F_{T \text{ tot}} = 61,68 \text{ kN}$ ,  
 Moment fléchissant :  $M_f = 21759,1 \text{ m.N}$  et  $-15851,7 \text{ m.N} \Rightarrow M_{f \text{ tot}} = 26920,9 \text{ m.N}$ ,  
 Moment de torsion :  $M_t = 25936,4 \text{ m.N}$ .

### 2. Caractéristiques de la section

Diamètre de la section de contrôle :  $d = 180 \text{ mm}$ ,  
 Diamètre de l'épaulement :  $D = 232,6 \text{ mm}$ ,  
 Rayon de raccordement :  $R = 5 \text{ mm}$ ,  
 Epaulement :  $t = (232,6 \text{ mm} - 180 \text{ mm})/2 = 26,3 \text{ mm}$ ,  
 Rapports :  $d/D = 180 \text{ mm}/232,6 \text{ mm} = 0,774$ ,  
 $R/t = 5 \text{ mm}/26,3 \text{ mm} = 0,19$ ,  
 Aire de la section :  $A = \pi 180^2 \text{ mm}^2/4 = 25447 \text{ mm}^2$ ,  
 Modules de résistance :  $W_z = \pi 180^3 \text{ mm}^3/32 = 572555 \text{ mm}^3$ ,  
 $W_p = \pi 180^3 \text{ mm}^3/16 = 1145111 \text{ mm}^3$ .

### 3. Contraintes simples

Compression :  $\sigma_n = -15320 \text{ N}/25447 \text{ mm}^2 = -0,6 \text{ N/mm}^2$ ,  
 Cisaillement maximal :  $\tau_c = 4 \cdot 61680 \text{ N}/(3 \cdot 25447 \text{ mm}^2) = 3,2 \text{ N/mm}^2$ ,  
 Flexion :  $\sigma_f = 26920900 \text{ mm.N}/572555 \text{ mm}^3 = 47,0 \text{ N/mm}^2$ ,  
 Torsion :  $\tau_t = 25936400 \text{ mm.N}/1145111 \text{ mm}^3 = 22,6 \text{ N/mm}^2$ .

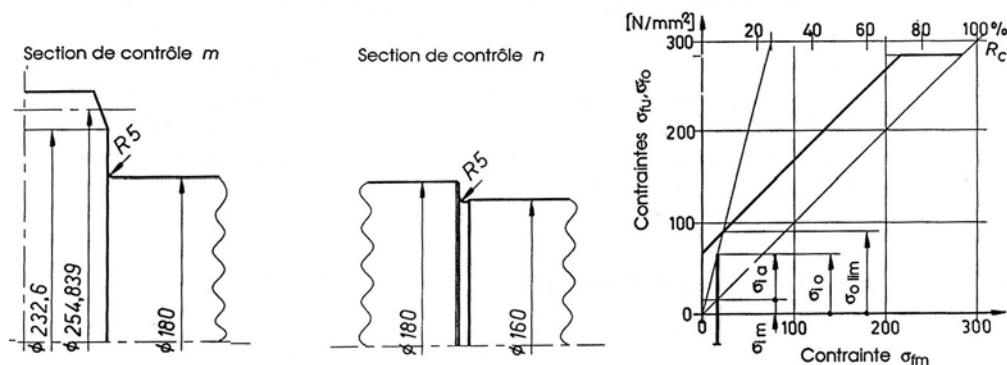


Figure 10.12 Détail géométriques des sections à contrôler

## 3. COEFFICIENT DE SÉCURITÉ

La contrainte de flexion est alternée puisque l'arbre tourne sous l'effet de forces extérieures à positions fixes; la contrainte de torsion est supposée agir d'une manière pulsante entre la valeur nulle et la valeur calculée. Le contrôle ne tient pas compte d'un facteur de service : on l'admet égal à 1,0 !

### 1. Caractéristiques mécaniques de l'acier nuance Ck 15

(selon tableau 3.1)

Résistance statique :  $R_m = 420 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_e = 230 \text{ N/mm}^2$ ,  
 $R_{pf} = 360 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{pt} = 160 \text{ N/mm}^2$ ,  
 Résistance alternée :  $R_{fa} = 210 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{ta} = 150 \text{ N/mm}^2$ ,  
 Module d'élasticité :  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ ,  
 Coefficient de contraction :  $\nu = 0,3$ .

### 2. Coefficients de forme et d'entaille

Coefficients de forme : en flexion  $\alpha_{kf} = 2,6$ ,  
 (selon figure 3.3) en torsion  $\alpha_{kt} = 1,8$ ,

## Orgnes de transmission directe

Facteur de soutien :	en flexion	$s = (5 - 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,32)(2 - 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,32) = 2,9$ .
	en torsion	$s = 1$ ,
Longueur complémentaire :		$\rho^* = 0,12 \text{ mm}$ ,
Rayon de courbure fictif :	en flexion	$\rho_{FF} = 5 \text{ mm} + 2,9 \cdot 0,12 \text{ mm} = 5,35 \text{ mm} \Rightarrow$ $\rho_{FF}/t = 0,203$ ,
	en torsion	$\rho_{Ft} = 5 \text{ mm} + 1 \cdot 0,12 \text{ mm} = 5,12 \text{ mm} \Rightarrow \rho_{Ft}/t = 0,195$ ,
Coefficient de correction :		$f_v = [1 - 0,3 + 0,3^2]^{1/2} = 0,89$ .
Coefficients corrigés :	en flexion	$\alpha_{kpFF} = 2,5$ ,
	en torsion	$\alpha_{kpFt} = 1,75$ .
Coeff. d'effet d'entaille :	en flexion	$\beta_{kf} = 0,89 \cdot 2,5 = 2,23$ ,
	en torsion	$\beta_{kt} = 0,89 \cdot 1,75 = 1,55$ .
Coefficient de surface, d'échelle, :		$c_s = 0,93$ pour N6 $c_g = 0,79$ ,
d'anisotropie, de forme de section :		$c_a = 1,0$ $c_f = 1,0$ .
Admis : température inférieure entre 20°C et 100°C.		
Coefficient de correction de la contrainte idéale calculée par rapport à :		
traction - torsion :	statique	$\alpha_{0m} = 230 / [(3)^{1/2} \cdot 160] = 0,83$ .
flexion - torsion :	dynamique	$\alpha_{0a} = 210 / [(3)^{1/2} \cdot 150] = 0,81$ .
Contraintes idéales :	statique	$\sigma_{im} = [0,6^2 + 3(0,83 \cdot 11,3)^2]^{1/2} \text{ N/mm}^2 = 16,3 \text{ N/mm}^2$ ,
	dynamique	$\sigma_{ia} = [47^2 + 3(0,81 \cdot 11,3)^2]^{1/2} \text{ N/mm}^2 = 49,6 \text{ N/mm}^2$ .
	supérieure	$\sigma_o = 16,3 \text{ N/mm}^2 + 49,6 \text{ N/mm}^2 = 65,9 \text{ N/mm}^2$ .
Rapport des contraintes :		$R_c = 16,3 / 65,9 = 0,25$ .
Contrainte alternée limite en flexion :		$R_{fa \text{ lim}} = 210 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,93 \cdot 0,79 / 2,23 = 69,2 \text{ N/mm}^2$ .
Contrainte moyenne au point d'intersection :		$69,2 + \sigma_{fm} \cdot 1,0 = \sigma_{fm} / 0,25 \Rightarrow \sigma_{fm} = 23,1 \text{ N/mm}^2$ .
Contrainte supérieure limite :		$\sigma_{o \text{ lim}} = 23,1 \text{ N/mm}^2 / 0,25 = 92,4 \text{ N/mm}^2$ .
Coefficient de sécurité :		$S_D = 92,4 \text{ N/mm}^2 / 65,9 \text{ N/mm}^2 = 1,4$ !

Ce coefficient de sécurité n'est pas suffisant selon la figure du chapitre 3, car pour un taux de charge de 25% et un rapport des contraintes de 0,25, le coefficient devrait être 1,5. Cet exemple montre qu'un calcul élémentaire des contraintes ne suffit pas à trouver la sécurité d'un arbre. L'augmentation du coefficient de sécurité peut s'obtenir en modifiant le rayon de raccordement pour diminuer l'effet d'entaille.

### 10.4.4 DÉFORMATIONS LINÉAIRES ET ANGULAIRES

Les déformations linéaires et angulaires sont calculées dans les deux vues au moyen de la matrice de tronçon selon Falk.

Tableau 10.4  
Déformations linéaires et angulaires de l'arbre

Point de Calcul No	x	Déformation linéaire			Déformation angulaire en °		
		Vue			Vue		
		De face	de dessus	résult.	de face	de dessus	résult.
0	0	-0,0207	0,0177	0,0272	0,0212	-0,0181	0,0279
1	12	-0,0162	0,0139	0,0213	0,0212	-0,0181	0,0279
2	56	0,0000	0,0000	0,0000	0,0209	-0,0180	0,0276
3	100	0,0153	-0,0135	0,0204	0,0185	-0,0169	0,0251
4	156	0,0321	-0,0294	0,0435	0,0155	-0,0155	0,0219
5	246	0,0541	-0,0526	0,0755	0,0122	-0,0139	0,0185
6	336	0,0701	-0,0724	0,1008	0,0083	-0,0113	0,0140
7	491	0,0718	-0,0861	0,1121	-0,0057	0,0009	0,0058
8	646	0,0459	-0,0689	0,0826	-0,0121	0,0116	0,0168
9	721	0,0294	-0,0491	0,0572	-0,0128	0,0182	0,0223

## 10. Axes et arbres de transmission

10	796	0,0128	-0,0230	0,0263	-0,0124	0,0212	0,0212
11	812	0,0094	-0,0170	0,0194	-0,0123	0,0217	0,0249
12	856	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0121	0,0223	0,0254
13	900	-0,0093	0,0172	0,0196	-0,0121	0,0224	0,0255
14	920	-0,0135	0,0251	0,0285	-0,0121	0,0224	0,0255
Déformation angulaire aux appuis							
- Appui B : $\varphi_B = 0,00048 \text{ rad} = 0,0275^\circ$							
- Appui C : $\varphi_C = 0,00044 \text{ rad} = 0,0254^\circ$							

### 1. DÉFORMATIONS EN FLEXION

Le tableau 10.4 donne la déformation en flexion dans les deux vues et la déformation résultante. La déformation maximale aux points de calcul vaut 0,112 mm, à  $x = 491 \text{ mm}$ . La déformation maximale de l'arbre se trouve entre les points 6 et 7.

La déformation angulaire aux appuis est donnée en fin de tableau. Elle est admissible selon les valeurs proposées dans le tableau 10.2.

### 2. DÉFORMATION EN TORSION

La déformation en torsion est engendrée par la transmission du couple moteur entre les deux roues dentées, c'est-à-dire du point 4 au point 10. Sur la portée des dentures des roues, le couple de torsion est supposé se répartir linéairement de :

$$M_t = 0 \text{ à } M_{t \max} = 25\,936,4 \text{ mN}.$$

Le module de glissement de calcul est :  $G = 81\,000 \text{ N/mm}^2$ .

Déformation totale en torsion :  $\Delta\varphi = (M_{t \max}/G) \sum (l_i/I_{pi})$ , soit :

$$\Delta\varphi = (25\,936\,400 \text{ mmN}/81\,000 \text{ N/mm}^2) \cdot (32/\pi)(90/232,6^4 + 310/180^4 + 75/160^4) \text{ mm}^{-3} =$$

$$\Delta\varphi = 0,001437 \text{ radian ou } 0,082^\circ.$$

Raideur entre les deux roues dentées :  $k = M_{t \max}/\Delta\varphi = 25\,936,4 \text{ mN}/0,001437 = 18,05 \cdot 10^6 \text{ mN/rad}$ .

## 10.4.5 FRÉQUENCE PROPRE ET VITESSE CRITIQUE

### 1. FRÉQUENCE PROPRE EN TORSION

Le calcul simplifié de la fréquence propre en torsion de cet arbre se limite à un modèle simple composé de seulement deux masses concentrées reliées par un arbre élastique. L'inertie du tronçon intermédiaire, diamètre 180 mm, est répartie par moitié sur les deux roues dentées.

Masses : roue dentée 2 avec son arbre :  $m_2 = 228 \text{ kg}$  et  $J_2 = 11,6 \text{ kg m}^2$  (trouvés par le logiciel),

roue dentée 3 :  $m_3 = (\pi/4) \cdot 2,548^2 \text{ dm}^2 \cdot 1,8 \text{ dm} \cdot 7,85 \text{ kg/dm}^3 = 72 \text{ kg}$ .

arbre diamètre 180 x 310 :  $m_a = (\pi/4) \cdot 1,82 \text{ dm}^2 \cdot 3,1 \text{ dm} \cdot 7,85 \text{ kg/dm}^3 = 61,9 \text{ kg}$ .

Moments d'inertie de masse par rapport à l'axe de rotation :

arbre diamètre 180 x 310 :  $J_a = 0,5 m r^2 = 0,5 \cdot 61,9 \text{ kg} \cdot 0,09^2 \text{ m}^2 = 0,25 \text{ kg m}^2$ .

roue dentée 2 avec son arbre :  $J_2 = 11,6 \text{ kg m}^2 + 0,125 \text{ kg m}^2 = 11,7 \text{ kg m}^2$ .

roue dentée 3 :  $J_3 = 0,5 \cdot 72 \text{ kg} \cdot 0,1274^2 \text{ m}^2 + 0,125 \text{ kg} = 0,71 \text{ kg m}^2$ .

Raideur de l'arbre :  $k = 18,05 \cdot 10^6 \text{ mN/rad}$ .

Fréquence propre :  $\omega_{pr} = [18,05 \cdot 10^6 (1/11,7 + 1/0,71)]^{1/2} = 5\,193 \text{ s}^{-1}$ ,

$$f_{pr} = 826,5 \text{ Hz}.$$

Les fréquences excitatrices engendrées par les dentures sont :

$$f_2 = 25 \text{ s}^{-1} \cdot 27 = 675 \text{ Hz} \Rightarrow \text{Rapport : } f_2/\omega_{pr} = 675/826,5 = 0,82.$$

$$f_3 = 25 \text{ s}^{-1} \cdot 27/88 \cdot 25 = 192 \text{ Hz} \Rightarrow \text{Rapport : } f_3/\omega_{pr} = 192/826,5 = 0,23.$$

Le calcul des dentures selon chapitre sur les engrenages et roues dentées permet de trouver la raideur des engrenages et les fréquences propres entre les roues dentées.

## 2. VITESSES CRITIQUES DE FLEXION

Le calcul simplifié de la vitesse critique de flexion part de la déformation de l'arbre sous l'effet de son poids propre. La matrice de transmission peut s'utiliser dans ce but. L'autre possibilité consiste à introduire les dimensions de l'arbre et à placer des masses ponctuelles. En concentrant seulement trois masses, les vitesses critiques de flexion calculées sont :

- |                       |                                    |               |                          |
|-----------------------|------------------------------------|---------------|--------------------------|
| - première vitesse :  | $\omega_{cr\ 1} = 2\ 554\ s^{-1}$  | $\Rightarrow$ | $n_{cr1} = 406\ t/s,$    |
| - seconde vitesse :   | $\omega_{cr\ 2} = 8\ 740\ s^{-1}$  | $\Rightarrow$ | $n_{cr2} = 1\ 391\ t/s,$ |
| - troisième vitesse : | $\omega_{cr\ 3} = 23\ 041\ s^{-1}$ | $\Rightarrow$ | $n_{cr3} = 3\ 667\ t/s.$ |

*Fin de l'exemple*

## CHAPITRE 11

# GÉNÉRALITÉS SUR LES BUTÉES ET LES PALIERS

Les butées et paliers lisses sont des éléments de machines qui servent à supporter et à guider des axes ou des arbres soit dans la direction radiale  $\Rightarrow$  paliers, soit dans la direction axiale  $\Rightarrow$  butées. Les paliers lisses utilisent les propriétés physiques des lubrifiants afin d'éviter dans la mesure du possible le contact de parties solides entre les pièces mobiles et les surfaces de glissement. Si le fluide sépare entièrement ces composants, le coefficient de frottement dit équivalent est fortement abaissé et l'usure des surfaces devient presque toujours négligeable. La présence d'un fluide, le plus souvent liquide, déformable et visqueux, amortit les vibrations et les à-coups, diminue le bruit, réduit les jeux, évacue l'énergie calorifique produite par les pertes. Les butées et paliers lisses restent malgré tout des éléments exigeants dans l'entretien et le contrôle en fonctionnement. Ils concurrencent avantageusement les éléments à roulements à partir de 150 mm de diamètre ou dans des applications particulières comme les grandes vitesses, les centrages de haute précision, les rigidités élevées ou les faibles pertes. La classification des butées et paliers lisses est représentée sur le catalogue de la fig. 11.1, soit :

- butées et paliers simples;
- butées et paliers hydrostatique;
- butées et paliers hydrodynamiques.

En complément, ce chapitre traite aussi des guidages et autres éléments de machines dont le principe de fonctionnement est semblable à celui des butées et des paliers lisses.

## 11.1 BUTÉES ET PALIERS SIMPLES

La palier radial ordinaire, de forme cylindrique, est l'un des plus anciens éléments de machines et reste malgré tout encore partiellement inconnu dans son comportement exact. L'axe ou l'arbre se trouve plus ou moins en contact avec le coussinet car la quantité de lubrifiant et/ou la vitesse circonférentielle ne sont pas suffisantes pour assurer un régime de frottement hydrodynamique. Ce palier se caractérise par la simplicité de la géométrie : arbre et logement cylindriques, huile ou graisse perdues comme lubrifiant. Le développement des matières synthétiques permet d'offrir actuellement des revêtements de coussinets travaillant à sec, sans lubrifiant particulier.

Les charges axiales sont transmises vers les appuis fixes par l'intermédiaire de butées. Ces dernières sont soit des éléments distincts du palier radial, soit combinées avec le palier radial. L'alimentation en lubrifiant, très souvent de la graisse, nécessite la présence de rainures sur les surfaces de glissement. Le palier radial cylindrique s'utilise dans les bâtis en fonte grise, l'usinage du logement se faisant directement dans la fonte. Dans les pièces en acier et en fonte également, le coussinet est constitué par une douille en alliage de cuivre, en matière synthétique ou en matière composite. Le choix de la forme du coussinet, de la matière et du lubrifiant est imposé par les conditions de fabrication et de fonctionnement.

Le contrôle de ces deux types d'appuis reste toujours très primitif : pression moyenne, paramètre d'échauffement et température d'utilisation. Les exigences sont relativement modestes : fonctionnement correct entre deux apports de lubrifiant. Afin de simplifier la maintenance, ces paliers sont équipés de plus en plus de revêtement dit autolubrifiant, mais la présence d'une graisse améliore presque toujours les performances de ces paliers.

[illegible]

Figure 11.1 Catalogue des butées et paliers lisses

### 11.1.1 CONTRÔLE DES BUTÉE, PALIER RADIAL ET GUIDAGE

Les relations générales entrevues au chapitre 1 s'appliquent directement au contrôle simple de la butée axiale, du palier radial et des guidages.

#### 11.1.1.1 PRESSION ET FACTEUR D'ÉCHAUFFEMENT SUR LA BUTÉE

Le contrôle de la pression s'effectue en supposant une pression uniforme sur la surface circulaire de glissement. En introduisant la force axiale  $F_a$  sur la butée, les diamètres extérieur  $d_e$  et intérieur  $d_i$  de cette butée, la pression moyenne se calcule par :

$$\bar{p} = \frac{4 F_a}{\pi(d_o^2 - d_i^2)} \leq \bar{p}_{\text{admissible}}. \quad (11.1.1)$$

La vitesse de glissement, fonction de la vitesse angulaire et du rayon variable, est égale au produit du rayon moyen  $r_m = (d_e + d_i)/4$  par la vitesse angulaire  $\omega$ . Le facteur d'échauffement se trouve approximativement en multipliant la pression moyenne par cette vitesse, soit :



## 11. Généralités sur les butées et les paliers

$$\bar{p} \cdot v = \bar{p} \omega \frac{d_e + d_i}{4} \leq (\bar{p} \cdot v)_{\text{admissible}}. \quad (11.1.2)$$

### 11.1.1.2 PRESSION ET FACTEUR D'ÉCHAUFFEMENT DANS LE PALIER

La pression moyenne dans le palier radial cylindrique, diamètre du coussinet  $D$ , diamètre de l'arbre  $d$  avec  $d \approx D$ , longueur portante  $B$ , sollicité par une force radiale  $F_r$ , se trouve en divisant la charge radiale par la surface projetée du coussinet :

$$\bar{p} = \frac{F_r}{B D} \leq \bar{p}_{\text{admissible}}. \quad (11.1.3)$$

La pression admissible est donnée dans le tableau 11.1. La vitesse de glissement de l'arbre mobile dans le coussinet fixe est :  $v = \pi d n$  et la vitesse angulaire  $\omega = 2 \pi n$ . Le produit de la pression moyenne par la vitesse de glissement permet de limiter la charge sur la surface de frottement. Ce produit vaut :

$$\bar{p} \cdot v = \bar{p} \omega \frac{d}{2} = \frac{F_r \omega}{2 B} \leq (\bar{p} \cdot v)_{\text{admissible}}. \quad (11.1.4)$$

### 11.1.1.3 GUIDAGES

Les guidages peuvent être soit plans, soit cylindriques et autoriser des mouvements de translation et/ou de rotation. La pression moyenne se trouve comme précédemment en divisant l'effort normal par la surface projetée du guidage. La détermination du produit  $p \cdot v$  s'effectue au moyen des mêmes relations. Si le mouvement de la pièce cylindrique ou circulaire guidée est oscillatoire, la vitesse moyenne se trouve approximativement par :

$$v_m = 2 \varphi f d_m / 2 = \varphi f d_m, \quad (11.1.5)$$

avec :  $\varphi$  angle total d'oscillation (en radians),

$f$  fréquence d'oscillation,

$d_m$  diamètre moyen de contact.

Le produit  $p \cdot v$  se trouve en multipliant la pression moyenne par la vitesse moyenne  $v_m$ .

### 11.1.1.4 PUISSANCE PERDUE ET ÉCHAUFFEMENT

Le moment de frottement de l'arbre dans le palier radial ou le couple de frottement sur la butée sont donnés par deux relations identiques :

Butée axiale	Palier radial	
$M_{\text{fr}} = d_m / 2 \cdot \mu F_a,$	$M_{\text{fr}} = d / 2 \cdot \mu F_r.$	(11.1.6)

La puissance perdue par frottement doit s'évacuer vers l'extérieur à travers les divers composants, en particulier à travers les parois et l'arbre. En supposant la charge et la vitesse constantes, nous pouvons écrire :

$$P_{\text{fr}} = M_{\text{fr}} \omega = \alpha A_{\text{ext}} (\vartheta_{\text{palier}} - \vartheta_{\text{ambiante}}), \quad (11.1.7)$$

avec :  $\alpha$  coefficient global de transmission de chaleur à travers la paroi :

$\alpha = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$  palier placé dans un local sans courant d'air,

$\alpha = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$  palier placé dans un local avec de l'air en circulation;

$A_{\text{ext}}$  aire extérieure de la butée ou du palier,

$\vartheta_{\text{palier}}$  température du palier,

$\vartheta_{\text{ambiante}}$  température ambiante.

Le contrôle de la température est inutile pour les paliers utilisés rarement ou seulement par intermittence. La recherche précise de la température d'équilibre d'une butée ou d'un palier est un problème difficile à résoudre. Il sera traité plus en détail dans le calcul des paliers hydrodynamiques.

#### 11.1.1.5 CORRECTIONS APPORTÉES SUR LE PRODUIT $p \cdot v$

Le contrôle de l'échauffement par le produit  $p \cdot v$  est très approximatif et ne donne pas entièrement satisfaction dans le calcul des éléments offerts par les fournisseurs. Chaque fabricant de ce genre d'éléments donne des formules avec un certain nombre de facteurs de correction. En désignant par  $p \cdot v_{\text{nominal}}$  le produit défini dans les relations 11.1.2 et 11.1.4, le produit de contrôle se trouve par :

$$p \cdot v_{\text{contrôle}} = (C_1 C_2 C_3 \dots) p \cdot v_{\text{nominal}},$$

avec :  $C_1, C_2, C_3, \dots$  des facteurs de correction.

Ces facteurs tiennent compte de la durée de vie, de l'usure admissible, de la vitesse de glissement, de la température d'utilisation, de la rugosité des surfaces, etc.

### 11.1.2 CHOIX DES MATÉRIAUX POUR BUTÉES ET PALIERS

Le système tribologique des butées et des paliers comporte les quatre composants : arbre, surface de glissement, lubrifiant si présent et milieu ambiant. Le choix correct des matériaux assure une fonction efficace de ces éléments de machines. Les propriétés générales des matériaux pour les surfaces de frottement sont :

1. une résistance suffisante aux pression exercées par l'arbre ou le pivot et par le lubrifiant,
2. un comportement neutre avec la contre pièce sans risques de grippage,
3. une élasticité ou même une plasticité assez grande afin de supporter les déformations sous la charge,
4. une capacité de rodage pendant la mise en exploitation du palier,
5. une résistance à l'usure afin de conserver la forme géométrique adéquate pendant toute la durée de vie,
6. une marge de sécurité suffisante de fonctionnement pendant un temps relativement court, en présence d'une avarie, comme par exemple un manque de lubrifiant,
7. une excellente possibilité d'adhésion entre la surface de glissement et le lubrifiant si ce dernier est souhaité,
8. une excellente capacité de transmission de chaleur.

Le choix industriel, donc pratique, impose un certain nombre de compromis : efficacité du palier pour un prix de revient aussi faible que possible.

#### 11.1.2.1 MATÉRIAUX POUR LE PIVOT OU L'ARBRE

Les aciers de construction sont utilisés pour la fabrication des arbres placés dans les paliers radiaux. Ils doivent présenter une résistance mécanique suffisante pour transmettre les efforts, une dureté 3 à 5 fois supérieure à celle du revêtement des coussinets ou des butées, un état de surface à rugosité très faible obtenu par rectifiage et/ou rodage. Les aciers au nickel ayant tendance à gripper, il sont à éviter. Par contre, les aciers aux chrome ou les revêtements de chrome dur améliorent notablement les conditions de glissement.

### 11.1.2.2 MATÉRIAUX POUR LES SURFACES DE GLISSEMENT

Deux grandes catégories de matériaux sont utilisés pour la fabrication des butées, des paliers et des guidages : les matériaux métalliques et les matériaux non métalliques. Les propriétés exigées sont principalement : les facilités de fabrication et l'aptitude à l'obtention de surfaces lisses, la bonne résistance à la pression locale, un coefficient de dilatation linéaire voisin de celui de l'arbre, une insensibilité au glissement de surfaces solides peu ou pas lubrifiées du tout, une résistance suffisante aux chocs. Citons les principales propriétés des matériaux pour butées, paliers et guidages simples.

#### 1. *Matériaux métalliques*

La fonte grise peut s'employer comme matériau pour butées et paliers à très faibles charges et petites vitesses de glissement; elle est très sensible aux pressions locales. L'acier durci superficiellement par traitement thermique, suffisamment lubrifié et l'acier fritté trouvent application dans les petits paliers. Les alliages à base de cuivre, comme les bronzes, les laitons, les alliages cupro-étain, cupro-plomb et cupro-aluminium, sont introduits comme pièces d'usure sous formes tubulaire, circulaire et plane. Les conditions de transmission de chaleur sont excellentes mais ces alliages nécessitent toujours une bonne lubrification. Les revêtements en métal blanc, à base d'étain, de plomb, de cuivre et d'antimoine, possèdent d'excellentes propriétés de glissement et de rodage. Ils sont peu sensibles à la présence de particules solides microscopiques. L'étain est parfois remplacé par le zinc ou le plomb dans les paliers ordinaires afin d'abaisser les coûts du métal et de fabrication.

#### 2. *Matériaux non métalliques*

Les matériaux non métalliques s'emploient dans les paliers non lubrifiés ou dits lubrifiés à vie, en petite mécanique dans l'appareillage, en présence d'atmosphère corrosive, pour faciliter la maintenance et diminuer le niveau sonore d'un entraînement. Ce sont principalement :

##### 2.1 *Matières synthétiques*

Les matières synthétiques les plus courantes sont : les polyamides PA 6 et PA 66 de base ou chargés de fibre de verre ou de carbone avec adjonction de matières plus ou moins autolubrifiantes, les polyoxyméthylènes, sigle POM, possédant une bonne compatibilité avec l'acier, les polytétrafluoréthylènes, sigle PTFE, présentant une très bonne résistance à l'attaque de produits chimiques, une bonne résistance mécanique jusqu'à des températures de 100°C et plus, un faible coefficient de frottement si les surfaces sont lubrifiées. Les inconvénients principaux des matières synthétiques sont : un fluage important sous charge, une mauvaise conductibilité thermique et un grand coefficient de dilatation linéaire. Les caractéristiques mécaniques et les propriétés au frottement peuvent s'améliorer par adjonction de graphite, de bisulfure de molybdène, de silicones et de revêtement en PTFE. Un autre avantage non négligeable des matières synthétiques est de pouvoir fabriquer par injection de thermoplastes le palier ou la butée dans l'élément de machine lui-même comme par exemple dans les petites roues dentées, les petites cames, etc. Les caractéristiques peuvent s'améliorer, surtout dans les pièces fabriquées par extrusion, par adjonction de matières autolubrifiantes et de charges. Ces matériaux modifiés possèdent alors une augmentation de la résistance à l'usure et à la pression, de meilleures propriétés thermiques et mécaniques, une très bonne stabilité dimensionnelle alliée à une facilité de fabrication.

##### 2.2 *Les élastomères*

Les élastomères comme les caoutchoucs naturels et/ou synthétiques durcis : ils sont utilisés en présence d'une lubrification à l'eau (exemple : les essuie-glaces de voiture).

##### 2.3 *Les charbons synthétiques*

Les charbons synthétiques sous forme de matériaux poreux avec le plus souvent des adjonctions de produits lubrifiants. Ils supportent des températures très élevées, jusqu'à 400°C, mais sont sensibles aux efforts mécaniques localisés.

### 3. *Matériaux frittés*

Fabriquées à partir de poudres métalliques en grains fins par pressage et frittage, les pièces pour paliers et butées contiennent des pores servant de réservoir de lubrifiant (huile).

### 4. *Matériaux composites*

Ce sont habituellement des feuilles d'acier ou de bronze revêtues de plusieurs couches à base de métal et de matières synthétiques. Le but de cette solution est d'obtenir un compromis entre d'une part la résistance mécanique élevée des matériaux métalliques, une bonne conductibilité thermique améliorant la transmission de chaleur et d'autre part appliquer les excellentes propriétés de glissement des matières synthétiques.

Les propriétés mécaniques des matériaux métalliques feront l'objet d'un tableau détaillé de valeurs à la fin des chapitres traitant les paliers hydrodynamiques. Les propriétés des matières synthétiques dépendent de plusieurs facteurs comme par exemple :

- du procédé de fabrication, de la présence ou de l'absence d'éléments lubrifiants,
- du comportement en fonction de la température et de l'humidité de l'air,
- du fluage en fonction des contraintes provoquées surtout par des pressions très localisées.

Les renseignements fournis par les fabricants de semi-finis ou de paliers de catalogue permettent d'effectuer un premier choix parmi toutes les variantes proposées (parfois plusieurs dizaines de compositions différentes !).

## 11.1.3 VALEURS DE CONTRÔLE

Les valeurs données dans le tableau 11.1 sont applicables aux paliers cylindriques peu sollicités ne travaillant jamais en lubrification hydrostatique ou hydrodynamique. Les matériaux utilisés pour les butées et les guidages sont identiques, mais les valeurs admissibles sont légèrement plus faibles.

Les valeurs admissibles dépendent en particulier :

- de la vitesse de glissement entre les pièces,
- de la circulation du lubrifiant dans le palier ou la butée,
- des possibilités d'évacuation de l'énergie thermique produite vers l'extérieur,
- de la nature de la pièce en contact avec la surface de glissement : dureté, état de surface avec  $R_a = 0,4$  à  $0,8 \mu\text{m}$  ou N5 à N6, des erreurs dans la géométrie et les alignements, des jeux entre les pièces fixe ou mobile,
- des possibilités de déformation de l'arbre ou du pivot en contact avec la surface glissante,
- de l'épaisseur de la pièce de friction, en particulier pour les matières synthétiques.

## 11. Généralités sur les butées et les paliers

Tableau 11.1

### Pressions moyennes, facteurs d'échauffement admissibles Frottement dans les paliers cylindriques simples

Matériaux du coussinet	Pression Moyenne N/mm <sup>2</sup>	Plage des vitesses m/s	Produit $p \cdot v$ W/mm <sup>2</sup>	Frottement	
				$\mu$ en %	Lubri- fiant
<b>Métalliques</b>					
Fonte grise GG15	2,0 à 0,5	0 à 1,0	0,5	5 à 12	G & H
Bronze CuSn10	5,0 à 2,0	0 à 6,0	1,0 à 3,0	4 à 10	H & G
Cupro-zinc	2,0 à 1,0	0 à 4,0	0,5 à 1,0	4 à 10	H & G
Alliages ZnAlCu	10,0 à 2,0	0 à 5,0	0,5 à 5,0	3 à 12	H & G
Bronze fritté	2,0 à 1,0	0 à 3,0	1,0 à 2,5	5 à 10	H & G
<b>Synthétiques</b>					
Polyamide PA 6	1,5 à 0,08	0,001 à 1,5	0,2 à 1,1	5 à 28	G (H)
Polyamide PA 66	1,5 à 0,08	0,001 à 1,5	0,5	5 à 19	G (H)
PTFE (téflon)	0,2 à 0,04	0,001 à 2,0	0,6	4 à 25	G (H)
PTFE chargé	2,0 à 0,5	0,001 à 2,0	1,0	4 à 25	G (H)
<b>Composites</b>					
Glacier DU	120 à < 1	0,001 à 2,0	1,75	3 à 20	S (G)
Glacier DX	140 à 5	0,001 à 2,0	0,3 à 1,0	4 à 20	A + G
Permaglide P1x	250 à < 1	0,001 à 2,0	1,8	3 à 25	S (G)
Permaglide P2x	250 à < 1	0,001 à 3,0	0,5 à 1,5	3 à 20	A + G
Glycodur F	100 à 0,1	0,001 à 2,0	1,0 à 2,0	5 à 25	S + G
Glycodur A	100 à 0,1	0,001 à 2,0	1,0 à 2,0	5 à 25	A + G
Symboles pour le lubrifiant :					
G graisse H huile S sec donc sans lubrifiant					
A surface avec alvéoles A + G alvéoles et graisse					
( à ) lubrifiant complémentaire					

#### Remarques importantes

1. Les valeurs proposées sont des moyennes qui peuvent être dépassées dans des conditions de service très soignées.
2. Les coefficients de frottement dépendent fortement de la présence ou de l'absence de lubrifiant.
3. Les caractéristiques maximales de deux propriétés différentes ne doivent pas se combiner, en particulier la pression maximale ne peut pas se multiplier par la vitesse maximale sans tenir compte du produit  $p \cdot v$ .
4. Le comportement des matières synthétiques à la pression dépend fortement de l'épaisseur du coussinet.

#### Coussinets composites

Les fournisseurs ou fabricants de coussinets et bagues composites sont :

Glacier DU et DX The Glacier Metal Company Limited, Alperton Wembley Middlesex England

Permaglide P1x et P2x INA Wälzlager Schaeffler KG, Industriestrasse 1-3, D-8522 Herzogenaurach

Glycodur SKF, Roulements à billes, Lausanne et Zürich

Les paliers lisses sans entretien se composent essentiellement de trois couches :

- un support en acier ou en bronze,
- et encore en addition
- une couche de bronze poreux à l'étain ou au zinc, épaisseur 0,2 à 0,35 mm, fritté sur le support,
- un revêtement antifricition en PTFE additionné de plomb, d'épaisseur 0,01 à 0,03 mm, pressé contre le bronze lors d'une opération de roulage.

Les matériaux de guidage à entretien réduit se composent également de trois couches, le revêtement antifricition étant un mélange de PVDF, PTFE et de plomb. La surface de glissement comporte des alvéoles de graissage servant de réservoir à lubrifiant.

Les catalogues de fabricants ou des représentants donnent des renseignements étendus sur les propriétés de ces diverses couches, les méthodes de montage et de contrôle, la détermination de la durée de vie probable en fonction de la charge et de l'usure ainsi que les conditions d'utilisation. Il est vivement recommandé de lire attentivement cette documentation avant de procéder à un choix définitif.

### 11.1.4 PALIER RADIAL SIMPLE ET COUSSINETS

La forme adoptée pour le coussinet dépend du genre de palier : métallique, synthétique ou composite.

#### 11.1.4.1 PALIER RADIAL MÉTALLIQUE

Si l'arbre peut être glissé dans le palier radial, le coussinet est constitué simplement par un alésage ou par une pièce tubulaire chassée dans le bâti. Des précautions particulières doivent être prises pour le montage de ces coussinets : léger chanfrein à 15° dans l'alésage de la pièce massive et sur le cylindre extérieur du tube, lubrification de la surface de glissement, outillage approprié pour l'introduction du coussinet dans le logement. Sous l'effet de la pression d'emmanchement, le diamètre intérieur du coussinet se modifie; en tenir compte lors de la fixation du jeu final entre l'arbre et le palier. Les dilations thermiques, souvent importantes, interviennent aussi dans le choix des dimensions définitives.

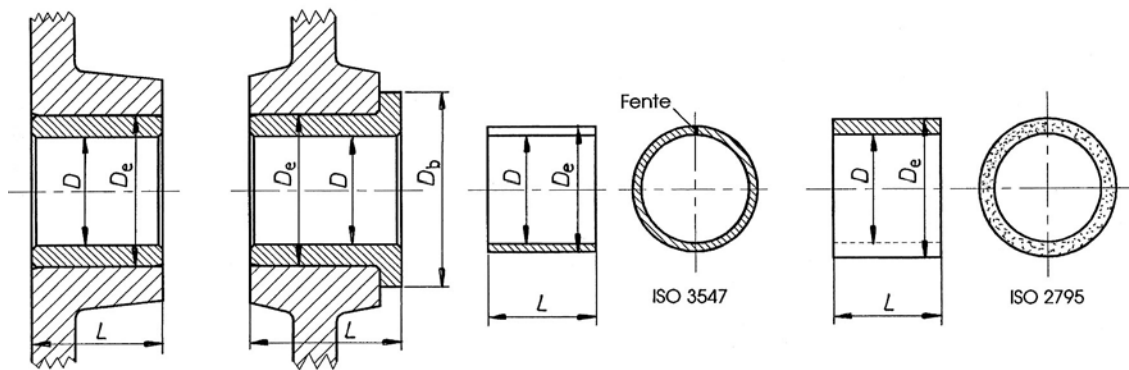


Figure 11.2 Coussinets métalliques pour palier radial simple : radial, combiné radial axial, Bague roulée selon ISO 3547, coussinet fritté selon ISO 2795

Le jeu entre l'arbre et le coussinet dépend du diamètre et des conditions de fonctionnement. Il est compris entre 1 et 3‰ du diamètre de l'arbre. Attention : les coussinets en matériaux frittés n'autorisent pas de modification de forme par usinage avant ou après le montage.

#### 11.1.4.2 COUSSINETS EN MATIÈRE SYNTHÉTIQUE

Les particularités physiques et mécaniques des matières synthétiques imposent quelques règles élémentaires à appliquer lors du choix des dimensions des coussinets :

1. Sous l'effet de charges radiales dynamiques importantes, l'épaisseur de la paroi du coussinet sera mince afin de faciliter l'évacuation de l'énergie calorifique produite.
2. Sous l'effet d'une charge statique importante, il faut également opter pour un coussinet à paroi mince afin de diminuer l'effet des déformations élastiques et le fluage sous charge.
3. Sous l'effet de charges importantes appliquées par à-coups, il faut adopter un coussinet à paroi épaisse. L'amortissement des à-coups sera meilleur par la présence d'une paroi suffisante.
4. En présence d'humidité prononcée et suivant la nature du matériau utilisé, l'action de l'eau peut amener une modification des dimensions primitives. Choisir dans ces cas dans la gamme de produits les nuances les moins sensibles à l'eau.
5. Sous l'effet de l'augmentation de la température, les matières synthétiques, tout comme les métaux, se dilatent, le coefficient de dilatation linéaire étant un multiple de celui des

métaux (environ 5 à 10 fois). Prévoir un jeu radial à froid suffisant ou limiter la température maximale de fonctionnement.

6. Le jeu diamétral entre l'arbre et la surface cylindrique du coussinet sera choisi aussi grand que possible sans toutefois compromettre la fonction et les exigences posées par le palier.

La fig. 11.3 montre quelques exemples de paliers fabriqués en matière synthétique. Ces éléments se caractérisent par une épaisseur relativement grande de la paroi et de ce fait ne supportent que des charges radiales modestes.

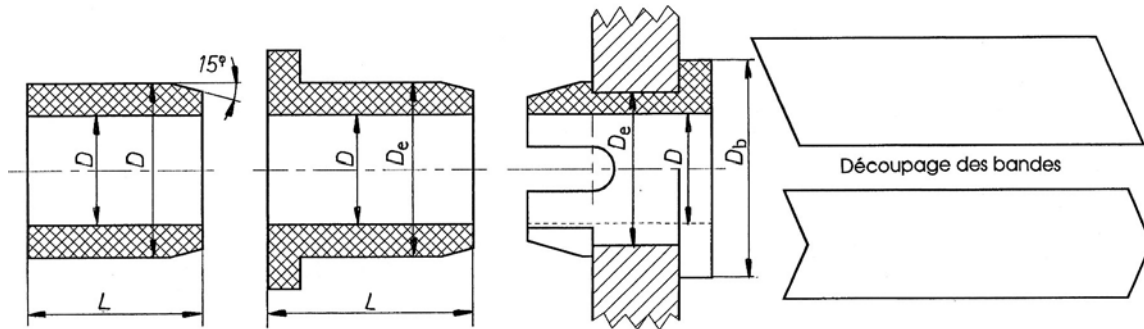


Figure 11.3 Coussinet en matière synthétique pour paliers cylindriques simples  
Découpage des bandes en matière synthétique pour paliers et guidages

Le coussinet le plus simple se compose d'une feuille de matière synthétique enroulée autour de l'arbre et retenue par le support de palier. Le coefficient de frottement pour les matières synthétiques sèches et non lubrifiées est relativement important, de 0,22 à 0,55. La présence d'un lubrifiant abaisse fortement ces valeurs. Par exemple, le coefficient de frottement du PTFE est 0,25 à sec et passe à 0,04 avec un lubrifiant, huile ou graisse. Si le palier est en charge continue, il est nécessaire de contrôler la température atteinte par le coussinet compte tenu de toutes les conditions de transmission de chaleur à travers les diverses parois vers le milieu ambiant.

#### 11.1.4.3 PALIER RADIAL COMPOSITE

Les bagues roulées servant de palier peuvent être : soit avec surface cylindrique intérieure continue, cette solution étant peu fréquente, soit des bagues avec une fente ce qui facilite la fabrication et le montage. Elles existent avec un support en acier, en bronze ou en laiton, avec un revêtement intérieur contenant presque toujours du PTFE. Les températures admissibles à sec peuvent s'étendre de -200°C à +280°C suivant le type. Pendant la période de rodage, une partie de la couche superficielle se reporte sur l'arbre. La surface obtenue contribue à l'obtention d'un coefficient de frottement faible et une usure minimale. L'usure est forte pendant le rodage, jusqu'à 0,01 mm puis croît très lentement par la suite. En fonctionnement continu, le produit  $p \cdot v$  donné dans la table ne devrait pas être dépassé; le produit  $p \cdot v$  peut être doublé pour des charges temporaires mais la durée de vie est alors réduite. La vitesse de glissement ne devrait pas dépasser 2 m/s. Les paliers sans entretien ne doivent jamais être lubrifiés avec du  $\text{MoS}_2$  car les bonnes propriétés des surfaces seraient détruites. Il faut éviter l'introduction de poussières et corps étrangers en soignant la conception du logement ou en prévoyant de simples étanchéités. La surface des arbres devra être rectifiée avec une rugosité  $R_a = 0,4$  à  $0,6 \mu\text{m}$ , soit la classe de rugosité N5.

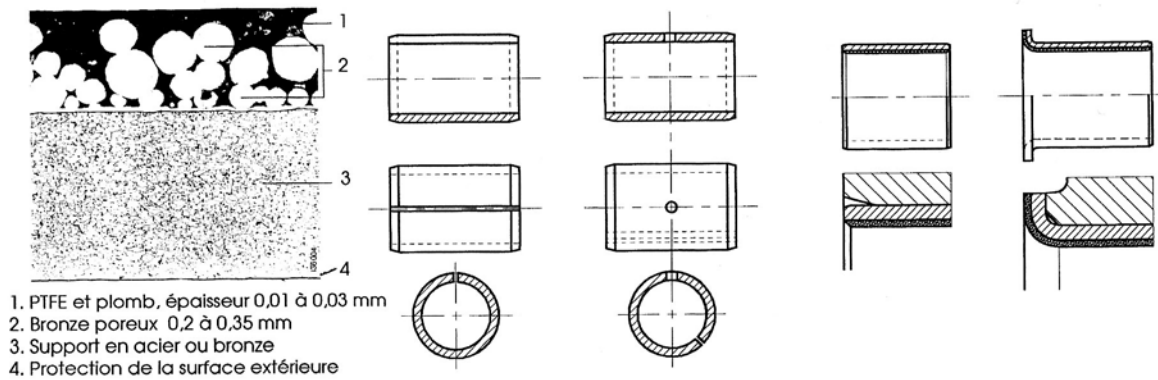


Figure 11.4 Constitution de la couche de friction sur les paliers composites  
 Paliers DU et DX, Permaglides et exemples de montage dans une pièce massive

Les coussinets peuvent se monter dans les parties fixes par emmanchement, par éléments vissés, par goupille ou par collage. Veiller à ce que la température de montage ne dépasse pas la température maximale admissible et que la surface de glissement ne soit pas souillée par des produits étrangers. Il est nécessaire d'aligner avec précision les axes du palier et de l'arbre, l'erreur maximale admissible ne devant pas dépasser 0,02 mm. Il faut également éviter les effets de bord en dégagant par exemple l'alésage recevant le coussinet, voir le détail sur la figure 11.4. Après lecture de la documentation technique dans les catalogues, le contrôle de la durée de ces paliers consiste soit :

- à déterminer le produit  $p \cdot v$  et comparer cette valeur avec les valeurs admissibles,
- à déterminer la durée de vie probable à l'aide des diverses formules et abaques fournis par le fabricant, compte tenu des divers facteurs de correction dépendant des conditions de fonctionnement et de la pression,
- à introduire les principes du calcul du palier radial en régime de lubrification hydrodynamique si le palier est lubrifié avec de l'huile en circulation et si la vitesse de glissement est suffisamment élevée.

### 11.1.5 BUTÉES SIMPLES

Les butées simples sont constituées par des surfaces annulaires planes équipées éventuellement de rainures de lubrification. La pièce d'usure peut être métallique comme un alliage de cuivre, ou en matière synthétique ou composite. Toutes les remarques et conseils donnés pour les paliers sont applicables aux butées des divers types.

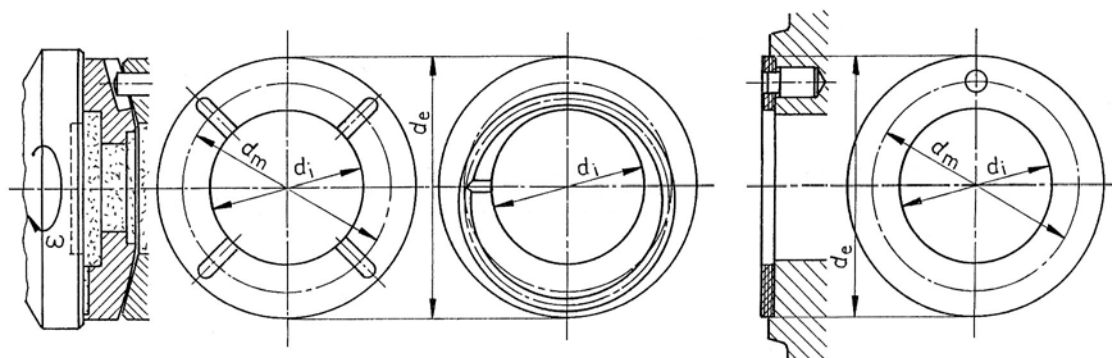


Figure 11.5 Bagues planes métalliques ou en matière synthétique pour butées simples



Les points particuliers à soigner sont : la planéité des surfaces en contact, le parallélisme obtenu éventuellement par un appui sphérique, la sécurité contre toute rotation de la bague sur son support, l'amenée et l'évacuation du lubrifiant, la dispersion de l'énergie calorifique produite. Les coussinets épaulés combinent le palier radial avec une butée axiale; ils possèdent également une jointure sur la face frontale.

### 11.1.6 GUIDAGES

Les guidages sont constitués par des bandes et selon les applications, ces bandes peuvent se façonner par cintrage, estampage, emboutissage, découpage ou perçage. En cas de découpage et de perçage, il est recommandé d'usiner en partant du côté de la surface de glissement. Les bavures ne risquent pas de faire saillie dans la couche rapportée. Il existe des bandes avec support en acier, avec support en bronze ou sans support mais avec une armature métallique en alliage d'aluminium. Cette dernière est enrobée par frittage d'un mélange de PTFE, plomb et fibre de verre (Permaglide P30).

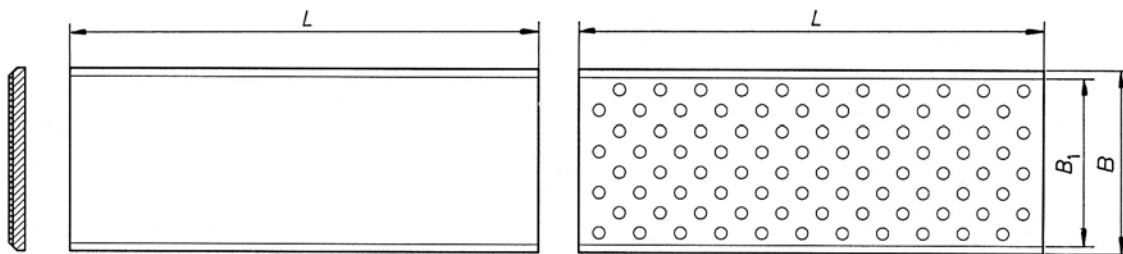


Figure 11.6 Bande de glissement sans entretien avec support métallique  
Bande de glissement à entretien réduit avec alvéoles pour réserve de graisse

La fixation des bandes planes peut s'effectuer par collage et l'état de surface des pièces en contact doit présenter une rugosité comprise entre  $R_a = 0,4$  à  $0,8 \mu\text{m}$ . Les recommandations données pour le palier radial s'appliquent aussi aux bandes de glissement.

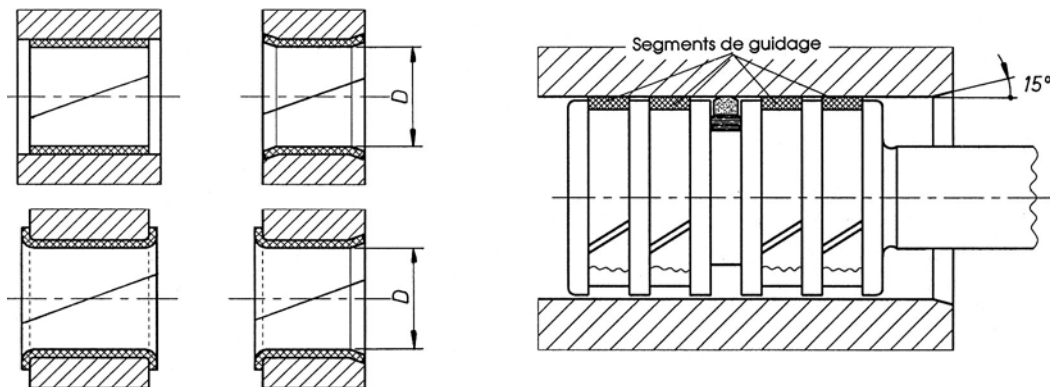


Figure 11.7 Implantation de bandes de glissement dans les paliers cylindriques :  
emmanchées ou collées, sertissage bilatéral, sertissage unilatéral, bords repliés.  
Segments de guidage pour piston et pour tige

Les segments de guidage pour tiges et pistons sont une autre application courante de bandes de glissement. Ces bandes servent à guider les tiges et pistons et à reprendre éventuellement des forces composantes radiales. Elles empêchent le contact métallique entre le piston et le cylindre ou entre la tige et la douille. Le nombre de bandes de guidage est

fonction de l'intensité des forces transversales. En règle générale, ces éléments sont montés dans des gorges fermées. La vitesse de glissement de ces bandes peut atteindre jusqu'à 15 m/s et des pressions jusqu'à 30 N/mm<sup>2</sup> (bandes de guidage TURCITE B). Le coefficient de frottement statique ou dynamique se situe entre 0,04 et 0,08 ; il dépend de la pression, de la vitesse, de la lubrification et de la rugosité des parties métalliques.

Les revêtements de glissement surmoulés à base de résine époxyde peuvent aussi servir de guidage.

### 11.1.7 LUBRIFICATION DES BUTÉES, PALIERS ET GUIDAGES

La discussion porte ici seulement pour les butées, paliers et guidages travaillant dans le domaine du frottement sec, onctueux ou mixte. Si l'apport de lubrifiant est absent, souhaité ou même nécessaire, tous ces éléments fonctionnent : sans entretien ou par apport unique de lubrifiant, par lubrification périodique. La lubrification unique consiste à déposer une quantité déterminée de lubrifiant de façon à assurer la fonction pendant la durée de vie de l'élément. Les paliers sans entretien contiennent des substances auto-lubrifiantes, habituellement de la poudre de MoS<sub>2</sub> ou du graphite. Les paliers frittés contiennent des huiles minérales qui sont déposées en permanence.

La lubrification à la graisse est toujours la plus simple dans ces cas car elle assure non seulement de faibles pertes, mais protège les surfaces de souillures. Le choix de la consistance dépendra des exigences : dans le cas général des graisses de la consistance NGLI-0 à 3 . Pour les faibles jeux et/ou des vitesses élevées, adopter des graisses molles NGLI-0 et pour des jeux plus grands ou la protection du palier, des graisses de la classe NGLI-2 à 3. Les butées et paliers métalliques sont équipés de rainures de lubrification. La forme des rainures de graissage dépend du mouvement de la pièce mobile par rapport à la pièce fixe. Il faut toujours éviter de placer des rainures dans la partie chargée des surfaces de glissement.

La lubrification est assurée par la présence de graisseurs ou d'huileurs, de conduites de lubrifiant à distribution centralisée. Dans les coussinets en alliage de cuivre, la répartition de la graisse est facilitée par des rainures d'alimentation dans la zone non sollicitée, figure 11.8.

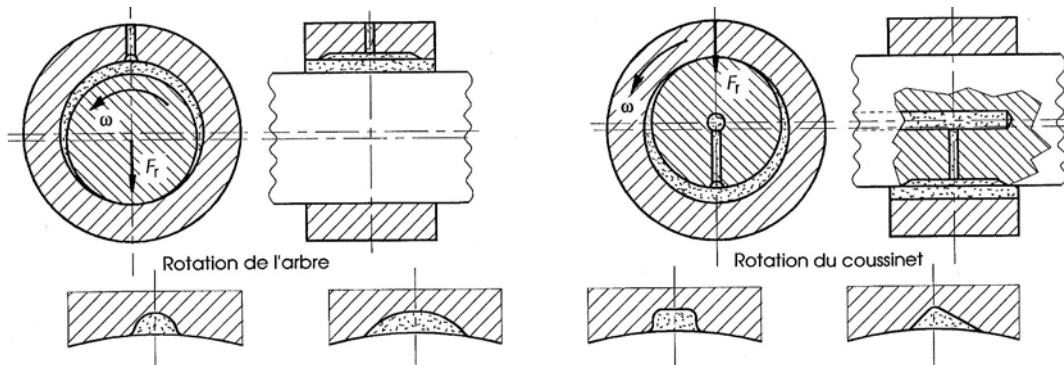


Figure 11.8 Position des rainures de graissage dans les paliers métalliques simples  
Profils usuels pour rainures de graissage

## 11.2 ROTULES LISSES ET EMBOUTS

Les rotules lisses et les embouts sont des éléments de machines offerts par la plupart des grands fabricants de roulements. Leur conception autorise la transmission de déplacements ou d'efforts dans des montages pour lesquels les conditions d'alignement donnent lieu à des mouvements d'oscillation en basculement ou en rotation. Leur origine vient de la construction aéronautique et de véhicules routiers. Grâce aux progrès réalisés dans les traitements de surface anti-usure, le domaine d'application de ces mécanismes s'est étendu dans toute la technique mécanique.

### 11.2.1 DESCRIPTION DES PRINCIPAUX TYPES DE ROTULES

Cette description comprend principalement les types les plus courants : rotules lisses acier sur acier, en matière frittée avec additifs, avec surface de glissement en tissu de PTFE, avec ou sans joints, pour efforts radiaux ou axiaux. L'intensité et la direction de la charge sont déterminantes pour le choix de la dimension de la rotule : charges radiale, axiale et combinée, continue et discontinue. Les rotules se composent d'une bague intérieure avec surface extérieure sphérique et une bague extérieure avec surface intérieure sphérique correspondante. Les rotules radiales conviennent principalement dans les mécanismes avec difficulté d'alignement ou avec mouvements de basculement.

#### 11.2.1.1 ROTULES ACIER SUR ACIER

Les rotules sont fabriquées en acier à roulement de qualité supérieure. Les bagues sont trempées et les surfaces de glissement subissent une finition particulièrement soignée. Un traitement au bisulfure de molybdène confère aux surfaces en contact une excellente résistance à l'usure et de très bonnes propriétés au frottement de glissement. En règle générale, une lubrification périodique est nécessaire bien que le traitement initial pourrait suffire dans une utilisation sans entretien. Les rotules radiales sont destinées à supporter principalement de fortes charges radiales. Toutes les bagues extérieures sont fendues en un point déterminé permettant l'ouverture pour la mise en place de la bague intérieure. Cette dernière est emboîtée par déformation élastique. Les deux bagues de ces rotules ne sont pas séparables. La plupart des rotules sont équipées de rainure et de trous de lubrification. Les rotules de l'exécution 2RS sont équipées, des deux côtés, de joints à lèvres.

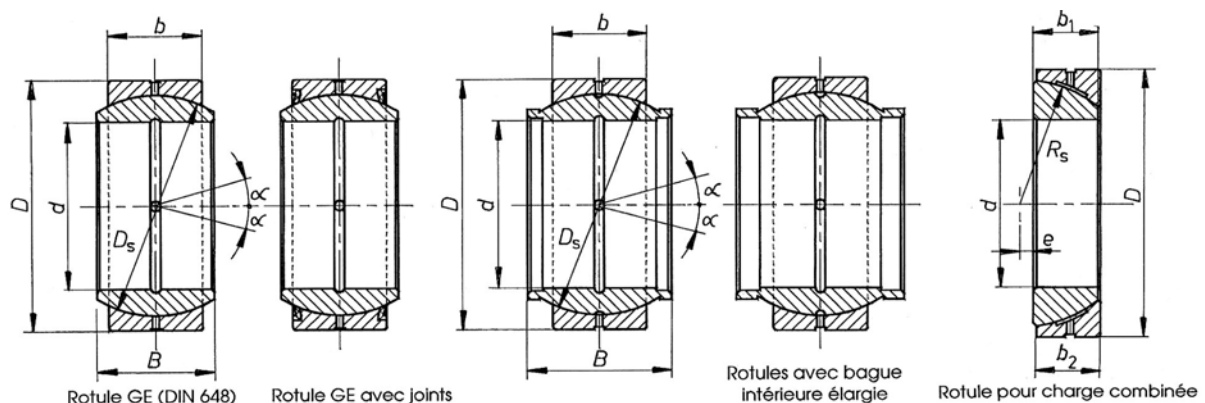


Figure 11.9 Rotules à contact acier sur acier : charges radiales et charge combinée

Les rotules à contact oblique, prévues pour des charges combinées, se composent d'une bague intérieure et d'une bague extérieure avec surface sphérique inclinée. Le centre de la

sphère se situe à l'extérieur de l'appui des bagues. La normale moyenne des surfaces de contact présente une certaine inclinaison par rapport à l'axe de la rotule. Ceci est particulièrement avantageux pour supporter des charges combinées. Toutefois, la charge axiale ne peut s'exercer que dans un sens. L'effort axial induit par une composante radiale doit se compenser par un effort dans l'autre sens. Ces rotules sont démontables (figure 11.9 à droite).

Les rotules axiales permettent de supporter principalement des charges axiales. La rondelle d'arbre est de forme convexe sphérique, la rondelle logement de forme sphérique concave. La conception et les dimensions permettent de combiner ces éléments avec des rotules radiales.

### 11.2.1.2 ROTULES SANS ENTRETIEN

Les rotules dites sans entretien sont caractérisées par des surfaces de glissement avec traitement et revêtement qui ont une influence prépondérante sur leur fonctionnement. Ces rotules autolubrifiantes utilisent des matériaux modernes comme le bronze fritté composite ou du tissu de PTFE. Ces éléments trouvent emploi dans des applications exigeant une longue durée sans entretien ou lorsque les conditions locales empêchent l'introduction des rotules acier sur acier. Elles supportent surtout de fortes charges continues.

Les rotules radiales lisses autolubrifiantes à contact acier / tissu de PTFE existent en différentes versions avec une bague extérieure revêtue de tissu de PTFE. Les bagues intérieures en acier à roulement sont trempées, rectifiées et la surface de glissement est chromée dur. Les rotules à contact acier / bronze fritté ont une bague extérieure constituée d'un support en acier et d'une couche de glissement en bronze imprégnée de PTFE et de bisulfure de molybdène. La bague extérieure est roulée autour de la bague intérieure et présente un plan de joint. La bague intérieure est en acier à roulement, trempée et rectifiée, chromée dur. Le choix des matériaux pour les surfaces de glissement dépend du fabricant.

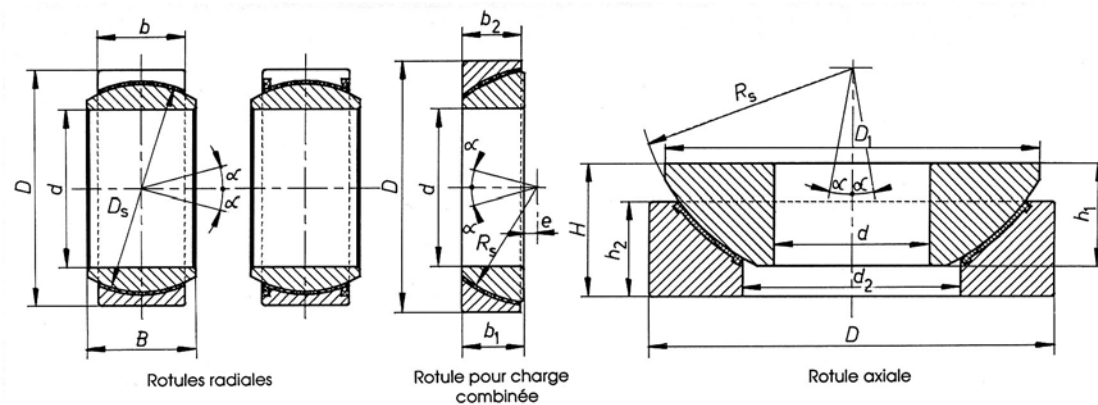


Figure 11.10 Rotules sans entretien : pour charges radiales, combinée et axiale

Les rotules lisses à contact oblique, autolubrifiantes, sont destinées à supporter des charges combinées continues et ne nécessitent pas d'entretien. Toutefois, il est recommandé dans certains cas de les garnir au montage d'une graisse au lithium antirouille, de consistance 2 ou 3, pour les protéger de la corrosion et renforcer l'étanchéité. Un seul graissage au montage augmente la durée de vie des rotules.

Les rotules axiales présentent des surfaces de glissement avec une inclinaison encore plus marquée que dans les rotules pour charge combinée. La rondelle intérieure est en acier à roulement, trempé, rectifié et chromé dur, et la bague extérieure est équipée d'un revêtement en

PTFE composite. Cette couche de glissement, en matière plastique renforcée de fibres de verre et contenant du PTFE, est moulée dans la rondelle logement.

### 11.2.1.3 EMBOUTS

Les embouts à rotule sont des éléments de machines prêts au montage. Ils sont constitués d'une rotule sertie dans un embout en acier. Ils comportent généralement un filetage intérieur ou extérieur, à droite ou à gauche, de qualité moyenne. Les dimensions sont normalisées selon DIN 648 ou ISO 6126. Les fabricants proposent divers modèles et plusieurs combinaisons de contact :

1. Acier sur acier ou acier sur bronze pour les charges alternées, avec possibilité d'appoint de graisse par l'axe ou par un graisseur hydraulique.
2. Chrome dur sur composite PTFE ou sur tissu PTFE pour les charges unidirectionnelles ou faiblement variables, avec des joints à lèvres.
3. Embouts à rotule pour vérins hydrauliques et pneumatiques à contact acier sur acier.
4. Embouts à rotule avec tige à section circulaire à souder.

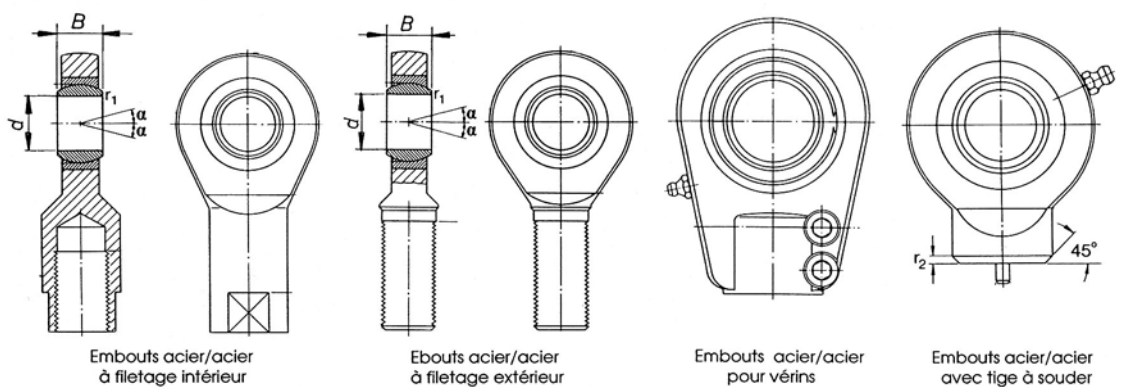


Figure 11.11 Embouts à rotule de types divers : standard, pour vérins et à souder

Les embouts peuvent fonctionner sans entretien dans certains cas. En règle générale, il est recommandé de les lubrifier périodiquement.

### 11.2.1.4 LUBRIFICATION

Une bonne lubrification des rotules permet d'augmenter la durée de vie et d'éviter la corrosion. Les rotules acier sur acier sont pourvues de trous et rainures de graissage permettant une lubrification des surfaces portantes par la bague extérieure ou la bague intérieure. Les surfaces acier sur acier sont phosphatées et traitées au bisulfure de molybdène ( $\text{MoS}_2$ ). Pour la lubrification de ces rotules, il est recommandé d'utiliser des graisses au savon de lithium EP et de préférence avec additif  $\text{MoS}_2$ . Il est recommandé de suivre scrupuleusement les prescriptions des fabricants.

La gamme de température admissible dépend essentiellement du comportement de la graisse; elle se situe entre  $-50^\circ\text{C}$  et  $+180^\circ\text{C}$  pour le contact acier sur acier. Les embouts auto-lubrifiants à glissement acier sur tissu de PTFE peuvent fonctionner entre  $-30^\circ\text{C}$  et  $+120^\circ\text{C}$  en raison de la matière des joints d'étanchéité (polyester élastomère). Les embouts à glissement acier sur matière plastique, contenant du PTFE, peuvent s'employer entre  $-30^\circ\text{C}$  et  $+90^\circ\text{C}$ . Des températures de  $+110^\circ\text{C}$  sont admissibles pendant de courts instants.

## 11.2.2 CHARGE ET CONTRÔLE DES ROTULES

La durée de fonctionnement d'une rotule est le nombre d'oscillations ou le nombre d'heures atteint, sous une charge constante, sans qu'il y ait usure ou fatigue apparente. Elle suppose une charge purement radiale dans les rotules radiales ou purement axiale et centrée dans les rotules axiales. Comme les rotules sont confectionnées par les fabricants de roulements, la méthode de contrôle utilise des définitions et relations semblables à celles du calcul des roulements. La capacité de la rotule s'exprime par la charge dynamique de base  $C$  et par la charge statique de base  $C_0$  figurant dans les tableaux de dimensions des catalogues. Les valeurs des charges de base dépendent de leur définition et peuvent différer d'un fabricant à l'autre. L'exposé de la méthode de contrôle, ici selon SKF, se limite au contact acier sur acier ou acier sur bronze.

### 11.2.2.1 CHARGES

L'intensité et la direction de la charge sont déterminantes pour le choix et le contrôle des rotules lisses. Il est possible de distinguer :

1. *Charge radiale* : la charge appliquée sur les surfaces de frottement est principalement dans la direction radiale; une faible composante axiale est négligeable.
2. *Charge combinée* : la charge sur les surfaces de frottement est la résultante d'une composante radiale et d'une composante axiale. Si cette dernière est relativement faible, la charge peut être supportée par une rotule radiale. Si par contre elle est importante, elle doit être reprise par une rotule axiale.
3. *Charge statique* : la charge agit toujours dans la même direction et le même sens. Cette charge constante intervient dans le contrôle statique de la rotule.
4. *Charge variable* : la charge agit sur deux ou plusieurs zones de la rotule et varie en fonction du temps ou de la position des surfaces en contact.

L'angle de basculement admissible  $\alpha$ , donné dans les catalogues, dépend de la série de dimensions, de la taille de la rotule et de l'exécution.

### 11.2.2.2 CHARGE DYNAMIQUE ÉQUIVALENTE

La charge dynamique équivalente intervient dans le contrôle de toutes les rotules sollicitées par des forces variables ou obliques. Les rotules radiales et à contact oblique sont conçues pour supporter des charges radiales, mais elles admettent dans une certaine mesure des charges axiales. Si la force résultante est constante, la charge dynamique équivalente sur une rotule radiale ou oblique est donnée par la formule :

$$F_P = y \cdot F_r \quad (11.2.1)$$

avec :  $F_P$  charge dynamique équivalente (désignée habituellement par  $P$ ),  
 $F_r$  composante radiale de la charge,  
 $y$  coefficient de correction dépendant du rapport  $F_a/F_r$ , voir figure 11.12.

Dans les rotules axiales, la composante radiale  $F_r$  ne doit pas excéder 50% de la charge axiale  $F_a$  agissant en même temps. La charge dynamique équivalente se trouve par :

$$F_P = y \cdot F_a \quad (11.2.2)$$

avec :  $F_P$  charge dynamique équivalente (désignée habituellement par  $P$ ),  
 $F_a$  composante axiale de la charge,  
 $y$  coefficient de correction dépendant du rapport  $F_r/F_a$ , voir figure 11.12.

## 11. Généralités sur les butées et les paliers

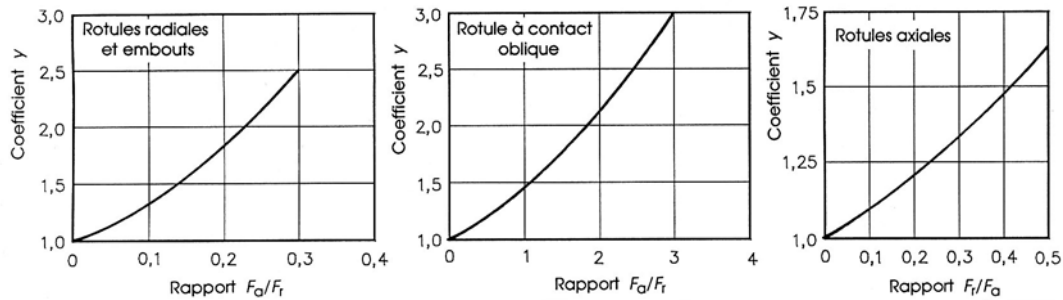


Figure 11.12 Coefficient de correction  $y$  pour les rotules radiale, combinée et axiale

La charge axiale maximale admissible sur un embout est limitée par les contraintes de flexion dans la tige de l'embout. Cette contrainte doit toujours se vérifier. De plus, il faut veiller à ce que la charge dynamique équivalente ne soit pas supérieure à la charge admissible donnée par la relation générale :

$$F_{adm} = C_0 b_3 b_7, \quad (11.2.3)$$

avec :  $F_{adm}$  charge admissible sur l'embout,  
 $C_0$  charge statique de base, donnée dans les catalogues,  
 $b_3$  coefficient de température, voir formule (11.3.3) et description,  
 $b_7$  coefficient du type de charge sur l'embout :  
 $b_7 = 1$  charge statique constante,  
 $b_7 = 0,5 (0,35)$  charge dynamique pulsante ou alternée (entre parenthèses : valable pour les embouts avec trou ou raccord de lubrification).

Si l'intensité de la charge ou la vitesse de glissement ou les deux à la fois ne sont pas constantes, il est nécessaire de calculer la durée d'utilisation. Il faut trouver d'abord les valeurs isolées de durée, avec dans chaque cas, une intensité de charge et une vitesse de glissement constantes. La durée totale d'utilisation peut se trouver approximativement par l'expression :

$$G = \frac{1}{t_1 / TG_1 + t_2 / TG_2 + t_3 / TG_3 + \dots}, \quad (11.2.4)$$

avec :  $G$  durée nominale d'utilisation totale en heures de fonctionnement,  
 $t_1, t_2$  périodes dans lesquelles se produisent  $p_1$  et  $v_1$ ,  $p_2$  et  $v_2$ , etc. ,  
 $T$  durée totale d'un cycle :  $T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots$  ,  
 $G_1, G_2$  durée d'utilisation, en heures, obtenue dans les conditions  $p_1 \cdot v_1$ ,  $p_2 \cdot v_1$ , etc.

### 11.2.2.3 PRESSION SPÉCIFIQUE

La pression spécifique s'exerçant dans une rotule est donnée par la formule :

$$p = K \frac{F_p}{C}, \quad (11.3.1)$$

avec :  $p$  pression spécifique, exprimée en  $N/mm^2$ ,  
 $F_p$  charge dynamique équivalente,  
 $C$  charge dynamique de base,  
 $K$  coefficient de pression spécifique en  $N/mm^2$  :  

$K = 100$	acier sur acier,	$K = 50$	acier sur bronze
$K = 100$	acier sur bronze fritté,	$K = 150$	acier sur tissu de PTFE,
$K = 50$	acier sur matière plastique.		

Valeurs indicatives pour le rapport  $C/F_p$  lors du choix de la rotule :

acier sur acier et acier sur bronze :	2,0
acier sur bronze fritté :	1,6
acier sur tissu de PTFE :	1,75
acier sur matière plastique :	1,25.

#### 11.2.2.4 VITESSE MOYENNE DE GLISSEMENT

Le déplacement angulaire total dans un mouvement oscillatoire relatif des surfaces en contact étant désigné par  $2\beta$ , la vitesse moyenne de glissement de ces surfaces vaut :

$$v = 0,5 d_m \cdot 4 \beta \cdot f = 2 d_m \beta f, \quad (11.3.2)$$

avec :  $d_m$  diamètre moyen de glissement sur la surface sphérique :

pour les rotules radiales :  $d_m = D_s$ ,

pour les rotules à contact oblique :  $d_m = 1,8 R_s$ ,

pour les rotules axiales :  $d_m = 1,4 R_s$ .

$\beta$  amplitude angulaire du mouvement oscillatoire en rad; en rotation  $\beta = \pi/2$ .

$f$  fréquence d'oscillation ou de rotation en  $s^{-1}$ .

$D_s$  diamètre de la rotule sphérique avec  $R_s = D_s/2$  (catalogue  $D_1$ ).

#### 11.2.2.5 DURÉE NOMINALE D'UTILISATION

Le contrôle du choix d'une rotule à contact acier sur acier ou acier sur bronze peut s'effectuer au moyen de la valeur  $p \cdot v$ . La figure 11.13 montre les zones admissibles de la pression en fonction de la vitesse moyenne de glissement et des conditions d'utilisation.

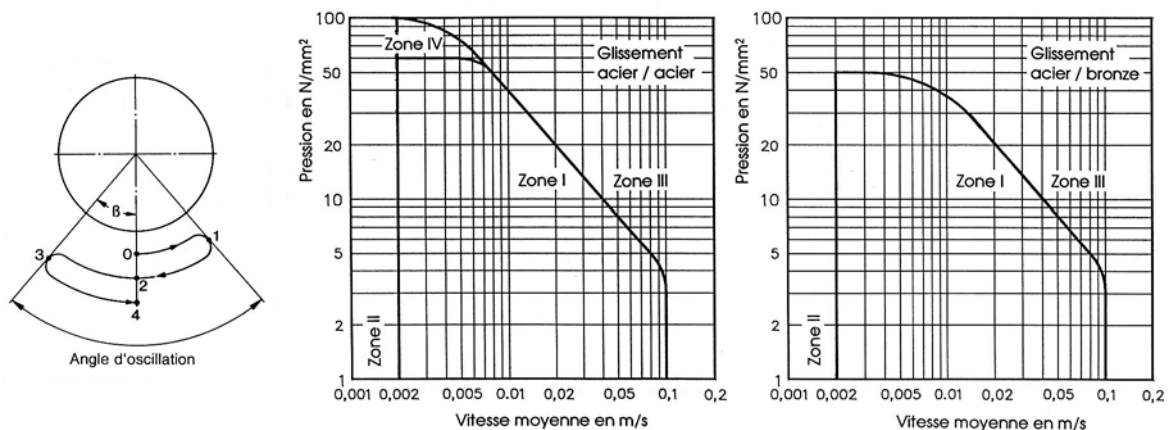


Figure 11.13 Amplitude angulaire du mouvement oscillatoire des surfaces glissantes

Diagrammes  $p = f(v)$  pour les contacts acier sur acier et acier sur bronze

Zone I : zone de validité de la formule de durée (11.3.3)

Zone II : zone quasi-statique

Zone III : zone d'application possible avec bon graissage

Zone IV : extension de la zone de validité de la formule de durée pour charge discontinue.

La durée nominale d'utilisation des rotules et embouts à glissement acier sur acier ou acier sur bronze, nécessitant un seul graissage avant la mise en service, se trouve par la relation pratique suivante :



## 11. Généralités sur les butées et les paliers

$$G = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \frac{3,7 \cdot 3600}{p \cdot v} f,$$

ou

$$G_h = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \frac{3,7}{p \cdot v}, \quad (11.3.3)$$

avec :  $G$  durée nominale d'utilisation en nombre d'oscillations ou de tours,  
 $G_h$  durée nominale d'utilisation en heures de fonctionnement,  
 $f$  fréquence des oscillations ou de rotation en  $s^{-1}$ ,  
 $p$  pression spécifique selon relation (11.3.1) en  $N/mm^2$ ,  
 $v$  vitesse moyenne de glissement en  $m/s$ ,  
 $b_1$  coefficient de direction de charge : continue  $b_1 = 1$ , discontinue  $b_1 = 2$ ,  
 $b_2$  coefficient de charge selon figure 11.14,  
 $b_3$  coefficient de température :  $b_3 = 1$  jusqu'à  $180^\circ C$ ,  
 $b_4$  coefficient de glissement selon figure 11.14,  
 $b_5$  coefficient de vitesse selon figure 11.14,  
 $b_6$  coefficient d'angle d'oscillation selon figure 11.14.

### Durée d'utilisation en cas d'appoints de graissage

La durée nominale d'utilisation des rotules et embouts à surface de glissement acier sur acier ou acier sur bronze, devant être à nouveau lubrifiée périodiquement, est plus grande que celle donnée par les relations précédentes. L'augmentation de durée dépend de l'angle d'oscillation et de la fréquence des appoints. Cette durée peut se trouver par la relation suivante :

$$G_{hN} = G_h f_\beta f_H, \quad (11.3.4)$$

avec :  $G_{hN}$  durée nominale d'utilisation, en heures, pour une rotule lubrifiée périodiquement,

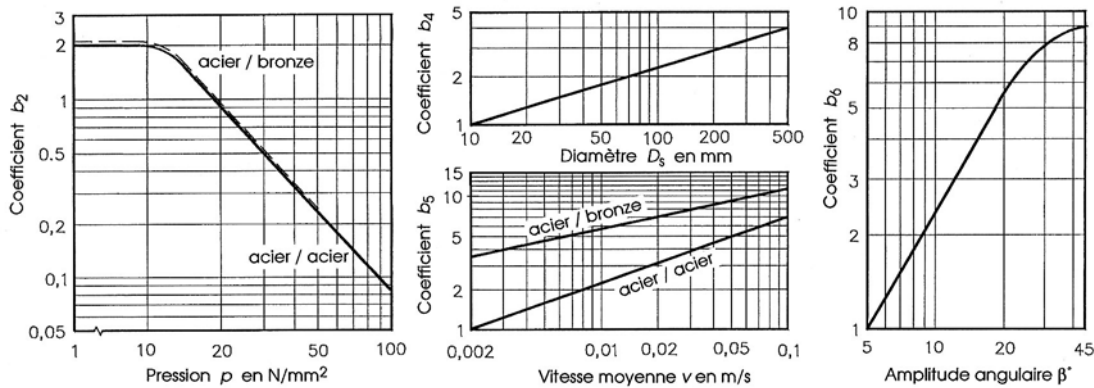


Figure 11.14 Coefficients de correction de la durée nominale d'utilisation : acier/acier; acier/bronze

$G_h$  durée nominale pour une rotule lubrifiée initialement, relation (11.3.3),

$f_\beta$  coefficient d'angle d'oscillation selon figure 11.15,

$f_H$  coefficient de fréquence d'appoint selon figure 11.15.

### Rotules et embouts avec surfaces de glissement autolubrifiantes

Le contrôle de ces rotules et embouts autolubrifiants est semblable à celui des rotules avec surfaces de contact acier sur acier. Les pressions, les vitesses de glissement et les divers coefficients de correction sont modifiés en conséquence. Les relations sont légèrement différentes

afin de tenir compte du comportement des matières synthétiques sous l'effet de la charge et du glissement relatif des surfaces en contact.

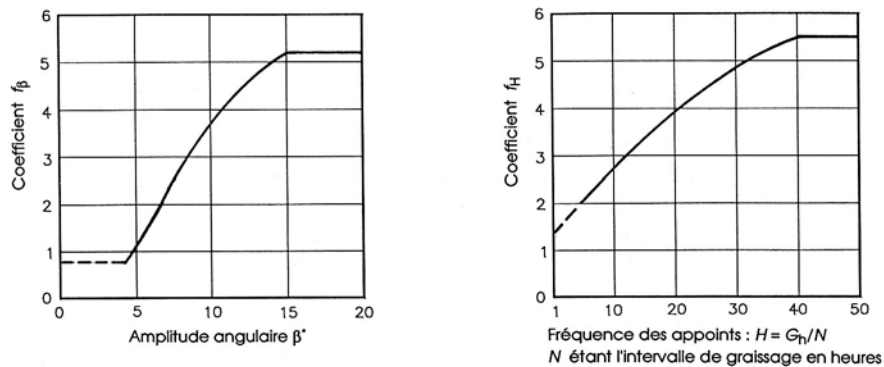


Figure 11.15 Coefficients de correction  $f_\beta$  et  $f_H$  pour une lubrification périodique

#### 11.2.2.6 CHARGE STATIQUE ÉQUIVALENTE

Si la rotule ou l'embout est sollicité par une charge à direction constante sans déplacement relatif des surfaces en contact, le contrôle consiste à déterminer la résistance des surfaces de glissement. Si la charge statique comprend des composantes radiale et axiale, il est nécessaire de convertir la charge oblique en charge statique équivalente au moyen du coefficient de correction  $\gamma$ .

#### 11.2.2.7 FROTTEMENT

Le frottement entre les surfaces en contact dans les rotules dépend en premier lieu de la nature des surfaces de glissement, de l'intensité de la charge, de la vitesse de glissement et du lubrifiant. Le moment de frottement peut se trouver au moyen de la loi de Coulomb :

$$M_{fr} = 0,5 d_m \cdot \mu F_P, \quad (11.3.5)$$

avec :  $M_{fr}$  moment de frottement dans la rotule ou l'embout,  
 $F_P$  charge dynamique équivalente,  
 $d_m$  diamètre moyen de glissement, voir définition dans la relation (11.3.2),  
 $\mu$  coefficient de frottement :  
 acier / acier :  $\mu = 0,08$  à  $0,20$       acier / bronze :  $\mu = 0,10$  à  $0,25$ ,  
 acier / matière plastique :  $\mu = 0,05$  à  $0,20$ ,      acier / bronze fritté :  $\mu = 0,05$  à  $0,20$ ,  
 acier / tissu de PTFE :  $\mu = 0,03$  à  $0,15$ .

Les valeurs minimales du coefficient de frottement s'appliquent aux rotules après rodage. Pendant le rodage, le frottement est supérieur. Pour les rotules autolubrifiantes à glissement acier / tissu de PTFE ou acier / bronze fritté, la valeur minimale du coefficient de frottement apparaît dès que le transfert de PTFE s'est effectué de la couche de glissement vers la surface conjuguée.

### 11.3 MÉCANIQUE DES FLUIDES POUR BUTÉES ET PALIERS

Les butées, paliers et guidages lisses suffisamment lubrifiés par un fluide généralement liquide supportent les charges provenant des pièces en mouvement en l'absence de contact solide sur solide. Dans les lubrifications hydrostatiques et hydrodynamiques, le lubrifiant sépare entièrement les deux composants rigides du système tribologique grâce à ses propriétés physiques. De plus, les butées et paliers sont très souvent sollicités par des charges dynamiques pulsantes voire même alternées. Sous l'effet de ces sollicitations, le film liquide placé sur l'appui, comme par exemple dans le coussinet du palier ou sur le segment d'une butée, et la pièce chargée, comme l'arbre ou le pivot, résiste à ces pressions variables. Il y a génération d'une pression hydraulique engendrée pendant l'écrasement du film fluide. Ces diverses formations d'une couche liquide portante peuvent s'expliquer au moyen des lois fondamentales de la mécanique des fluides visqueux.

#### 11.3.1 ÉCOULEMENT UNIDIMENSIONNEL ENTRE DEUX PAROIS FIXES

En complément des définitions générales et application du chapitre 2, ce sous-chapitre traite l'écoulement d'un fluide visqueux entre des parois fixes voisines.

##### 11.3.1.1 HYPOTHÈSES INITIALES

Soit deux parois parallèles de largeur  $b$ , longueur  $l$ , formant un canal à profil rectangulaire fermé, et soit une couche liquide d'épaisseur  $h$  avec :  $h \ll b$  et  $h \ll l$ ,  $b \gg l$ . Ces conditions géométriques permettent d'admettre un écoulement unidimensionnel dans l'étude. Le fluide est visqueux et il obéit à la loi de Newton entrevue au chapitre 2. L'écoulement laminaire est assuré par une différence de pression entre l'entrée et la sortie de la fente :

$$\Delta p = p_e - p_s,$$

avec :  $p_e$  la pression à l'entrée de la fente,  
 $p_s$  la pression à la sortie de la fente.

Le fluide est admis incompressible et à viscosité constante.

##### 11.3.1.2 DÉBIT DANS LA FENTE

Soit un système de référence  $Oxyz$ , l'axe  $Ox$  correspondant au sens de l'écoulement, l'axe  $Oz$  étant perpendiculaire à la fente. Isolons un volume de liquide, dimensions :  $b \cdot l \cdot 2z$  et exprimons l'équilibre en appliquant la loi des fluides newtoniens :

$$b \cdot 2z \cdot \Delta p = -2 b l \eta_v dv/dz.$$

Le produit de gauche représente l'effet de la poussée résultante, celui de droite l'effet du cisaillement sur les couches supérieure et inférieure due à la viscosité. Ce produit est négatif car le quotient différentiel  $dv/dz$  est négatif, la vitesse d'écoulement diminuant en fonction de la demi épaisseur positive  $z$ . Exprimons la variation élémentaire de vitesse :

$$dv = -\frac{\Delta p}{\eta_v l} z dz.$$

et intégrons cette expression dans les conditions particulières suivantes : pour  $z = \pm 0,5 h$ , la vitesse d'écoulement est nulle  $\Rightarrow v = 0$  si les parois parallèles sont immobiles.

$$v = \frac{\Delta p}{2 \eta_v l} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (11.4.1)$$

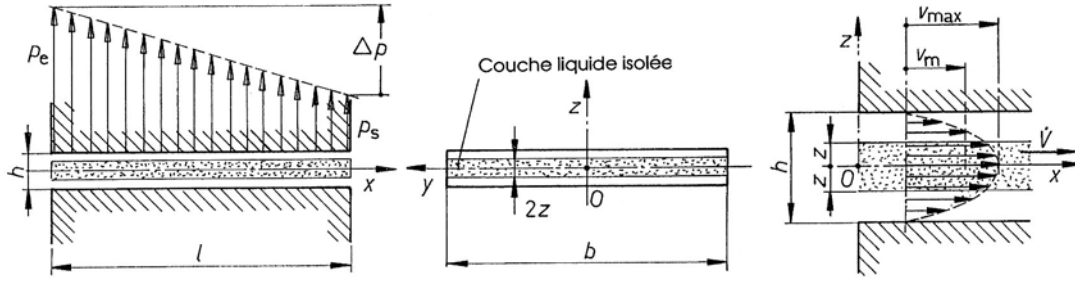


Figure 11.16 Mise en équation de l'écoulement dans une fente d'épaisseur constante

La répartition de la vitesse dans la fente est parabolique. Pour  $z = 0$ , la vitesse d'écoulement est maximale. Elle vaut :

$$v_{\max} = \frac{\Delta p h^2}{8 \eta_v l}.$$

La vitesse moyenne d'écoulement vaut les  $2/3$  de la vitesse maximale. Le débit total dans la fente se trouve par :

$$\dot{V} = \frac{2}{3} v_{\max} b h = \frac{b h^3}{12 \eta_v l} \cdot \Delta p. \quad (11.4.2)$$

Le débit dans la fente est proportionnel à la différence des pressions  $\Delta p$ , au cube de la hauteur de la fente  $h$  et inversement proportionnel à la longueur d'écoulement  $l$ , à la viscosité dynamique  $\eta_v$  du fluide. C'est la relation de Hagen Poiseuille.

### 11.3.1.3. PARTICULARITÉS DE L'ÉCOULEMENT

Pour une fente d'épaisseur constante, la contrainte de cisaillement  $\tau$  dans le fluide visqueux dépend du niveau  $z$  du plan de coupe imaginaire. La chute élémentaire de pression est donc proportionnelle à la longueur  $l$  de la fente :

$$dp = -\frac{\Delta p}{l} dx \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l} = \text{constante}. \quad (11.4.3)$$

Remplaçons  $\Delta p/l$  dans l'expression du débit et exprimons ce débit par :

$$\dot{V} = -\frac{b h^3}{12 \eta_v} \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (11.4.4)$$

L'équilibre de la couche complète de fluide en écoulement permet de trouver les deux forces tangentielles résultantes sur les faces supérieure et inférieure du liquide au contact avec les parois, soit :

$$F_T = 0,5 b h \Delta p,$$

pour chaque paroi mouillée.

### 11.3.2 ÉCRASEMENT D'UN FILM VISQUEUX

La présence d'un film liquide visqueux évite le contact métallique immédiat de deux corps solides sous l'effet d'efforts perpendiculaires à la couche séparatrice.

#### 11.3.2.1 FILM VISQUEUX SUR UNE SURFACE CIRCULAIRE

Soit un film de fluide visqueux, d'épaisseur initiale  $h_0$ , placé entre une surface circulaire de rayon  $R$  et un plan. Sous l'effet d'une force extérieure  $F$ , dirigée suivant l'axe perpendiculaire à la surface et passant par le centre de gravité, la surface circulaire se rapproche du plan et le fluide se trouve expulsé vers l'extérieur. Découpons un tube liquide élémentaire au rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$ , de hauteur instantanée  $h$  et exprimons le débit radial du fluide par :

$$\dot{V}_r = -\frac{2\pi r h^3}{12 \eta_v} \cdot \frac{dp}{dr}.$$

La pression  $p$  diminue vers l'extérieur et l'épaisseur  $h$  varie en fonction de la charge et du temps. Si  $v$  représente la vitesse d'approche d'une des parois par rapport à l'autre, alors la conservation du débit impose :

$$V_r = \pi r^2 v.$$

Egalons les deux expressions du débit au rayon  $r$  :

$$\dot{V}_r = \pi r^2 v = -\frac{2\pi r h^3}{12 \eta_v} \cdot \frac{dp}{dr}.$$

Proposons-nous de trouver l'expression de la pression en fonction du rayon  $r$  en supposant la vitesse  $v$  et la hauteur de la fente  $h$  connues :

$$dp = -\frac{6 \eta_v v}{h^3} \cdot r dr. \quad (11.5.1)$$

Intégrons cette équation différentielle, entre le centre et le rayon extérieur, en remarquant que pour  $r = R$ , la pression  $p$  est égale à la pression atmosphérique. Comme nous exprimons les pressions en valeurs relatives, alors  $p_R = 0$  et nous obtenons :

$$p_{(r)} = \frac{3 \eta_v v}{h^3} \cdot (R^2 - r^2). \quad (11.5.2)$$

La répartition de la pression dans le sens radial est donc parabolique. Elle est maximale au centre de la surface circulaire, au rayon  $r = 0$ . Elle vaut :

$$p_{\max} = \frac{3 \eta_v v R^2}{h^3}.$$

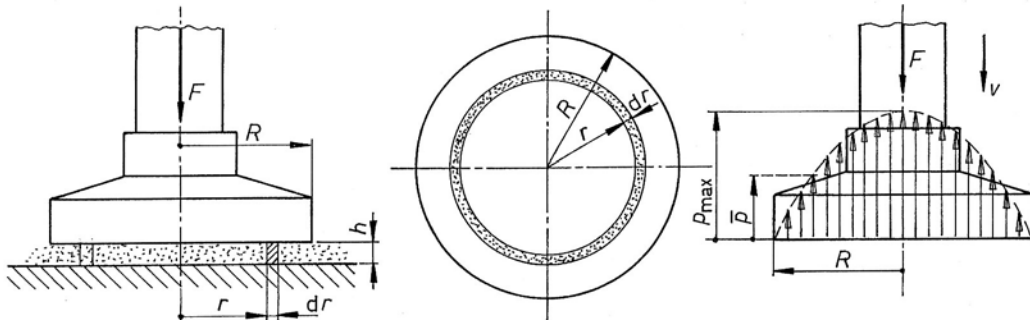


Figure 11.17 Ecrasement d'un film porteur visqueux sur une surface circulaire

La poussée résultante sur la surface circulaire est égale à la somme des poussées élémentaires calculable par :

$$F = \frac{1}{2} p_{\max} \pi R^2 = \frac{3 \pi \eta_v R^4}{2 h^3} \cdot v. \quad (11.5.3)$$

Cette relation générale sert à trouver par exemple le temps nécessaire à l'écrasement du film sous l'effet d'une force extérieure constante. En introduisant la vitesse sous la forme :  $v = dh/dt$  ; il est possible d'écrire :

$$dt = - \frac{3 \pi \eta_v R^4}{2 F} \cdot \frac{dh}{h^3}.$$

Intégrons cette relation différentielle pour une épaisseur de film de fluide variant de  $h_0$  à  $h_1$  :

$$\Delta t_{0,1} = \frac{3 \pi \eta_v R^4}{4 F} \cdot \left( \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2} \right).$$

Si l'intervalle de temps pendant lequel la force  $F$  est appliquée sur la surface est inférieur au temps calculé, les surfaces des deux pièces, séparées initialement par une couche de fluide  $h_0$ , ne viennent pas en contact. Si la distance  $h_1$  est plus petite que les aspérités des surfaces, alors il y a contact après un intervalle  $\Delta t$ .

### 11.3.2.2 FILM PORTEUR ENTRE UN TOURILLON ET UN ALÉSAGE

Une étude semblable peut s'effectuer pour un film porteur placé entre un tourillon et un alésage cylindriques. Les hypothèses initiales de la mise en équation sont :

- la viscosité du fluide reste constante,
- le régime d'écoulement est laminaire,
- les axes des deux cylindres restent parfaitement parallèles à chaque instant,
- l'écoulement dans le sens axial est négligeable,
- la pression engendrée par l'écrasement n'existe que sur des surfaces demi cylindriques.

La vitesse relative du tourillon par rapport à l'alésage est désignée par  $v$ . En appliquant la relation de Hagen-Poiseuille à la section rectangulaire repérée par l'angle  $\varphi$ , largeur  $B$ , longueur élémentaire  $r d\varphi$ , le débit s'exprime par :

$$\dot{V} = - \frac{b h^3}{12 \eta_v} \cdot \frac{dp}{r d\varphi}.$$

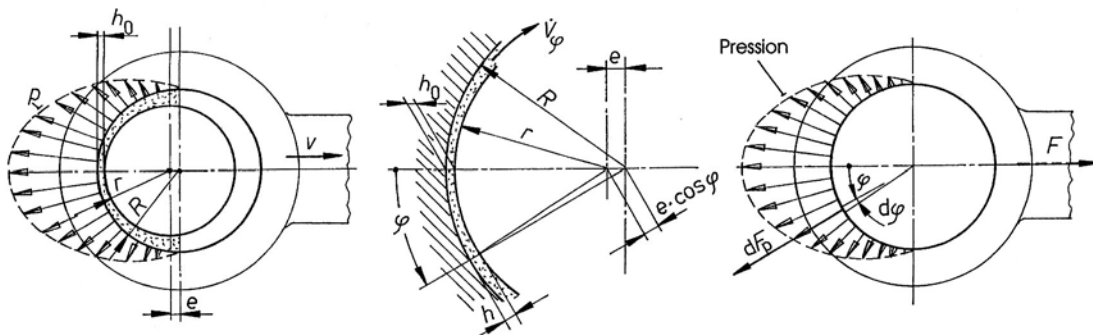


Figure 11.18 Ecrasement d'un film liquide entre un tourillon et un alésage cylindriques

La hauteur de la fente est variable; à partir de la figure 11.18, exprimons cette épaisseur en fonction de l'excentricité  $e$  et de la position angulaire  $\varphi$  :

## 11. Généralités sur les butées et les paliers

$$h = \Delta r - e \cos \varphi = \Delta r (1 - \varepsilon \cos \varphi),$$

avec :  $\Delta r = R - r$  jeu radial de l'assemblage,  
 $\varepsilon = e/\Delta r$  excentricité relative du tourillon,  
 $\psi = \Delta r/r$  jeu relatif de l'assemblage.

L'épaisseur minimale du film de fluide vaut :  $h_0 = h_{\min} = r \psi (1 - \varepsilon)$ . Introduisons l'expression de la hauteur du film de fluide dans l'expression proposée :

$$\dot{V}_{(\varphi)} = - \frac{B r^3 \psi^3 (1 - \varepsilon \cos \varphi)^3}{12 \eta_v r} \cdot \frac{dp}{d\varphi}.$$

Le débit traversant cette section rectangulaire peut s'écrire sous la forme :

$$V_{(\varphi)} = v B r \sin \varphi.$$

En égalant ces deux expressions du débit, nous obtenons :

$$dp = - \frac{12 \eta_v v}{r \psi^3} \cdot \frac{\sin \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} \cdot d\varphi.$$

Les conditions particulières sont :

- pour  $\varphi = 0$ ,  $\Rightarrow p = p_{\max}$ ,
- pour  $\varphi = \pi/2$ ,  $\Rightarrow p = 0$ .

L'intégration de cette expression donne finalement :

$$p = \frac{6 \eta_v v}{r \varepsilon \psi^3} \cdot \left[ \frac{1}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} - 1 \right]. \quad (11.6.1)$$

Calculons la poussée résultante sur le tourillon en projetant les poussées élémentaires sur l'axe de la direction de la force extérieure  $F$  puisque la répartition de la pression est symétrique :

$$F = 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} B r p \cos \varphi d\varphi = 2 B r \frac{6 \eta_v v}{\psi^3 r \varepsilon} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left[ \frac{1}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} - 1 \right] \cos \varphi d\varphi.$$

La force  $F$  se trouve par :

$$F = \frac{12 \eta_v B v}{\varepsilon \psi^3} \cdot \left[ \frac{1}{1 - \varepsilon^2} + \frac{2 \varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \arctan \left( \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - 1 \right]. \quad (11.6.2)$$

Exprimons à nouveau la vitesse d'écrasement du film liquide en dérivant l'expression de la hauteur de la fente par rapport au temps :

$$v = - \frac{dh}{dt} = r \psi \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Introduisons ensuite les deux hauteurs de film par :

$$h_{01} = r \psi (1 - \varepsilon_1),$$

$$h_{02} = r \psi (1 - \varepsilon_2),$$

et calculons le temps nécessaire pour passer de l'excentricité relative  $\varepsilon_1$  à  $\varepsilon_2$  :

$$\Delta t_{1,2} = \frac{24 \eta_v B r}{F \psi^2} \cdot \left[ \arctan \left( \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right]_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}. \quad (11.6.3)$$

Cette dernière relation permet de calculer l'intervalle de temps en supposant une force extérieure constante en sens et direction.

### 11.3.3 DÉPLACEMENT D'UNE SURFACE LUBRIFIÉE

Un autre problème important est l'étude du déplacement d'une surface lubrifiée en présence d'une couche liquide suffisante par rapport à une autre surface. La solution de ce problème sert de base dans le calcul des butées, paliers et guidages hydrodynamiques.

#### 11.3.3.1 HYPOTHÈSES INITIALES

Soit une surface à pente constante appartenant à un patin, largeur  $b$ , longueur  $l$ , immobile et un plan se déplaçant à la vitesse constante  $v$ . La recherche de la répartition de la pression entre le patin et la surface mobile fait intervenir un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui correspondent partiellement aux conditions réelles de fonctionnement. Ces diverses hypothèses sont :

1. *Viscosité du lubrifiant*

Cette propriété essentielle du fluide est supposée rester constante dans l'écoulement entre le patin et le plan, donc indépendante de la position, de la température et du temps. Comme la viscosité des huiles de lubrification varie fortement avec la température, le calcul pratique s'effectue généralement en introduisant une viscosité intermédiaire entre la viscosité à la température d'entrée et celle à la sortie du patin.

2. *Forces d'inertie*

Les forces d'inertie dans le liquide sont négligées par rapport aux forces de cisaillement dues à l'effet de la viscosité du lubrifiant.

3. *Etat des surfaces*

Le patin et la surface du plan possèdent des surfaces lisses, donc à rugosité nulle, en contact avec le fluide.

4. *Epaisseur de la couche liquide*

L'épaisseur de la couche liquide est très petite vis à vis des dimensions transversales du patin. Il en résulte :  $h_1 \ll b$ ,  $h_1 \ll l$ .

5. *Nature du fluide*

Le lubrifiant est un fluide newtonien. L'écoulement dans la fente obéit aux lois de l'écoulement laminaire des fluides visqueux.

6. *Vitesse verticale*

La variation de la composante de la vitesse du fluide dans le sens perpendiculaire au plan mobile est négligée.

7. *Mécanique des surfaces*

Les surfaces des deux constituants, patin et plan mobile, sont indéformables. Pratiquement, l'action de la pression variable sur les pièces mécaniques et du gradient de température provoque une modification de la géométrie de la fente. La théorie élastohydrodynamique tente de tenir compte des conditions réelles de fonctionnement.

8. *Constance de la charge*

Le patin est sollicité par une force constante alignée sur le centre de poussée.

9. *Variation de la pression*

La variation de la pression, dans la direction perpendiculaire au plan mobile, est négligée. La pression ne dépend donc que des coordonnées  $x$  et  $y$ .



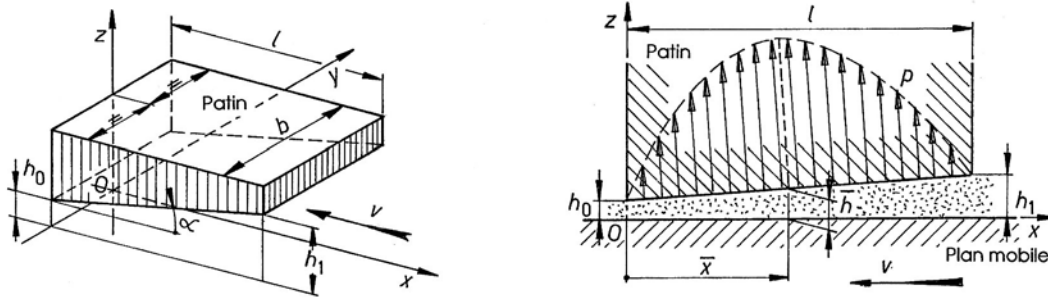


Figure 11.19 Déplacement du plan par rapport à un patin sur couche liquide visqueuse

Le système de coordonnées de référence  $Oxyz$  est trirectangle; la direction de chaque axe est définie de la manière suivante :

- axe  $Ox$  : dans la direction longitudinale de la fente,
- axe  $Oy$  : dans la direction transversale de la fente,
- axe  $Oz$  : dans la direction perpendiculaire au plan mobile.

Le profil longitudinal de la fente définissant la forme de la couche liquide peut être quelconque. Nous limiterons ici l'exposé à la fente à pente constante et nous admettrons également que la hauteur de la fente selon l'axe  $Oy$  reste constante. Cette dernière hypothèse permet de placer le plan  $Ozx$  exactement au milieu de la largeur  $b$  du patin. L'épaisseur maximale du film lubrifiant est désignée par  $h_1$ , la hauteur minimale par  $h_0$ .

### 11.3.3.2 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE REYNOLDS

Le développement du calcul des paliers hydrodynamiques a commencé par les travaux de plusieurs chercheurs au XIXème siècle. L'effet de coin liquide fut découvert par Tower en 1884 et le physicien anglais O. Reynolds trouva en 1886 la relation générale permettant de préciser la formation d'une pression par l'effet de la contrainte de cisaillement alliée à la forme de la fente. Il fallut attendre un quart de siècle pour que Gumbel démontra (1914 à 1925) l'utilisation pratique de la relation de Reynolds. Finalement, Falz publia en 1926 un livre sur les « Bases de la technique de la lubrification » qui confirmait les travaux de ses prédécesseurs. L'introduction du calcul informatisé permit de simuler le comportement des butées et des paliers à partir d'hypothèses simplificatrices s'approchant de plus en plus des conditions réelles de fonctionnement.

En supposant le patin immobile selon figure 11.19 et le plan se déplaçant à la vitesse constante  $v$ , la pression et l'épaisseur de la fente s'expriment par l'équation différentielle aux dérivées partielles proposée par Reynolds :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\eta_v} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\eta_v} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6 \left( v \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 2 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right). \quad (11.7.1)$$

- avec :
- $\eta_v$  viscosité dynamique du lubrifiant,
  - $\rho$  masse volumique du fluide,
  - $p$  pression au point de coordonnées  $(x,y)$ ,
  - $v$  vitesse du point appartenant au plan par rapport au patin,
  - $h$  épaisseur de la fente au point de coordonnées  $(x,y)$ ,
  - $t$  temps.

En admettant que la fente reste à hauteur constante, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de mouvement perpendiculaire au plan provoquant un écrasement du film, l'équation différentielle se simplifie en :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -6 \eta_v v \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (11.7.2)$$

Cette équation différentielle aux dérivées partielles n'est pas intégrable analytiquement. De nombreux auteurs ont proposé des solutions simplifiées en introduisant des hypothèses simplificatrices, en particulier un choix arbitraire de la répartition de la pression dans le sens de l'axe  $Oy$ . La complexité des solutions retenues dépasse largement le cadre de ce chapitre. Depuis quelques décennies, les méthodes numériques basées sur la décomposition de la surface du patin en surfaces élémentaires simples permettent de résoudre numériquement cette équation différentielle en substituant par exemple les différentielles par des différences finies, tout en tenant compte des conditions particulières de répartition de la pression sur le pourtour du patin.

### 11.3.4 PATIN INFINIMENT LARGE

Nous voulons développer analytiquement le problème de la répartition de la pression, de la poussée résultante, du débit et des pertes dans la fente au moyen de la relation différentielle de Reynolds. Pour pouvoir résoudre cette équation, nous sommes obligés de transformer l'étude bidimensionnelle dans le plan  $Oxy$  en une étude unidimensionnelle selon l'axe  $Ox$ . Afin d'atteindre ce but, nous devons admettre un patin infiniment large  $\Rightarrow b = \infty$ , car l'écoulement du fluide entre les deux surfaces solides s'effectue seulement selon l'axe  $Ox$ .

#### 11.3.4.1 RÉPARTITION DE LA PRESSION

Dans le cas particulier d'un patin à pente constante et infiniment large, la valeur de la pression ne dépend que de l'abscisse  $x$ , de la forme de la couche liquide, des caractéristiques du lubrifiant et de la vitesse du plan mobile. L'équation différentielle aux dérivées partielles de Reynolds se ramène à l'expression suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( h^3 \cdot \frac{dp}{dx} \right) = -6 \eta_v v \frac{dh}{dx}. \quad (11.7.3)$$

Le signe négatif dans le terme de droite provient du sens de la vitesse du plan mobile qui est vers la gauche, voir figure 11.19. Dans cette relation, la hauteur de la fente  $h$  est une fonction linéaire de l'abscisse  $x$  ; elle peut se donner sous la forme :

$$h = h_0 + k \cdot x,$$

avec :  $k = \tan \alpha = t/l = (h_1 - h_0)/l$ .

Aux abscisses  $x = 0$  et  $x = l$ , la pression doit correspondre à la pression existant autour du patin, pression que nous admettons égale à zéro. À l'abscisse  $x = \bar{x}$ , valeur inconnue pour l'instant, la pression est maximale. Il en résulte un gradient de pression nul, soit la condition particulière :  $dp/dx = 0$ . L'intégration de l'équation différentielle devient :

$$h^3 \frac{dp}{dx} = -6 \eta_v v h + C_1. \quad (11.8.1)$$

En tenant compte des conditions particulières citées, la constante d'intégration vaut :

$$C_1 = 6 \eta_v \bar{h},$$

avec :  $\bar{h} = h_0 + k \bar{x}$ .

Le gradient de pression prend les deux formes suivantes :

## 11. Généralités sur les butées et les paliers

$$\frac{dp}{dx} = -6 \eta_v v \frac{h - \bar{h}}{h^3},$$

ou encore :

$$\frac{dp}{dh} = -6 \frac{\eta_v v}{k} \frac{h - \bar{h}}{h^3}. \quad (11.8.2)$$

et encore :

$$\begin{aligned} - \text{pour } h < \bar{h} &\Rightarrow dp/dx > 0 ; \\ - \text{pour } h = \bar{h} &\Rightarrow dp/dx = 0 ; \\ - \text{pour } h > \bar{h} &\Rightarrow dp/dx < 0 . \end{aligned}$$

Intégrons la dernière relation exprimant la pression en fonction de la hauteur du film :

$$p = \frac{6 \eta_v v}{k} \left( \frac{1}{h} - \frac{\bar{h}}{2 h^2} \right) + C_2.$$

Comme la pression est nulle pour  $x = 0$  où la hauteur de la fente vaut  $h = h_0$ , la constante d'intégration  $C_2$  vaut :

$$C_2 = \frac{6 \eta_v v}{k} \left( \frac{\bar{h}}{2 h_0^2} - \frac{1}{h_0} \right).$$

En substituant cette valeur dans la relation trouvée et en choisissant le cas particulier pour  $h = h_1$  à l'entrée du patin, la hauteur pour laquelle la pression est maximale se trouve par :

$$\bar{h} = 2 \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1}. \quad (11.8.3)$$

Introduisons toutes ces grandeurs dans la solution de l'équation différentielle et exprimons la valeur de la pression en fonction de la hauteur de la fente :

$$p = \frac{6 \eta_v v}{k h^2} \cdot \frac{(h_1 - h)(h - h_0)}{h_0 + h_1}.$$

ou en introduisant la longueur  $l$  du patin :

$$p = \frac{6 \eta_v v l}{h^2} \cdot \frac{(h_1 - h)(h - h_0)}{h_1^2 - h_0^2}. \quad (11.8.4)$$

Dans la pratique, il est d'usage d'introduire des valeurs relatives dans les diverses expressions, soit les rapports :

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad m' = \frac{h_0}{h_1 - h_0}, \quad m = \frac{h_1 - h_0}{h_0} = \frac{1}{m'}.$$

La pression s'exprime finalement par :

$$p = \frac{6 \eta_v v l}{h_0^2} \cdot \frac{m'^2 (1 - \xi) \xi}{(1 + 2 m')(m' + \xi)^2}. \quad (11.8.5)$$

Afin de simplifier encore cette expression, remplaçons le second terme du produit de droite par  $C_p$  et écrivons la pression sous la forme :

$$p = \frac{6 \eta_v v l}{h_0^2} \cdot C_p.$$

avec :

$$C_p = \frac{m'^2 (1 - \xi) \xi}{(1 + 2 m')(m' + \xi)^2}. \quad (11.8.6)$$

Le facteur de pression  $C_p$  dépend du rapport  $m'$  et de l'abscisse relative  $\xi$ . Il peut se représenter pour diverses conditions de fonctionnement du patin. La figure 11.20 à gauche montre la valeur de  $C_p$  en fonction de l'abscisse relative  $\xi$  pour divers rapports  $m$ . La pression maximale se calcule en remplaçant la hauteur de la fente par sa valeur particulière  $\bar{h}$  dans l'expression générale, soit :

$$p_{\max} = \frac{3 \eta_v \nu l}{2 h_0 h_1} \cdot \frac{h_1 - h_0}{h_1 + h_0}. \quad (11.8.7)$$

Cette pression devient maximale lorsque  $h_1/h_0 = 1 + (2)^{0,5} = 2,414$ .

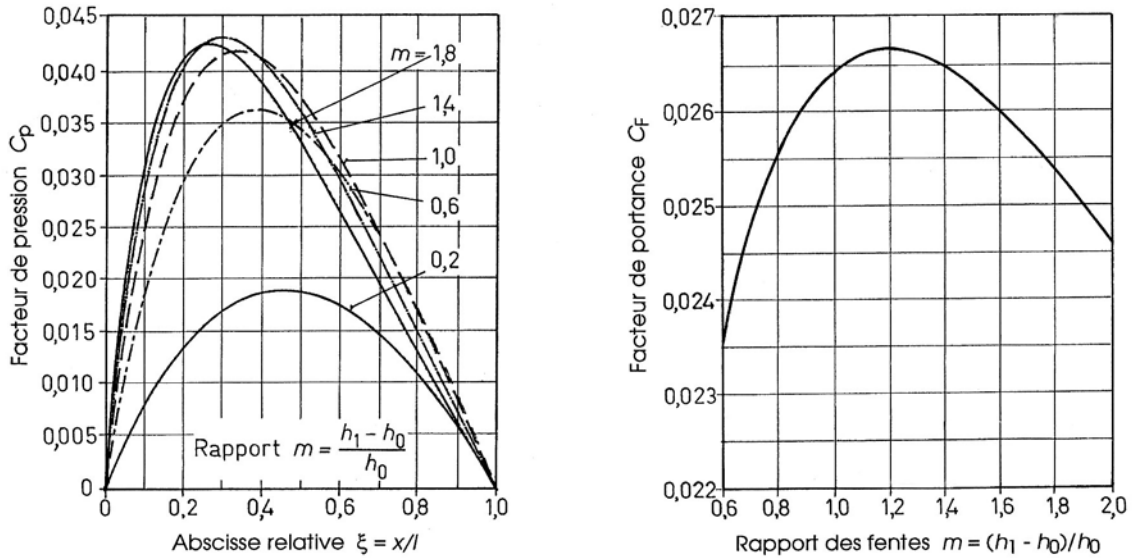


Figure 11.20 Facteurs de pression  $C_p$  et  $C_F$  de portance d'un patin à pente constante

#### 11.3.4.2 POUSSÉE PAR LARGEUR UNITAIRE

La poussée totale, engendrée par le fluide en circulation entre le patin et le plan, est égale à la somme intégrale des poussées élémentaires. Comme le patin est supposé infiniment large, le calcul s'effectue sur une largeur unitaire en introduisant le rapport  $F/b$  entre la force  $F$  et la largeur  $b$ . La portance par unité de largeur se trouve par :

$$\begin{aligned} \frac{F}{b} &= \int_0^l p(x) dx = \int_0^l p(h) \frac{1}{\tan \alpha} dh, \\ \frac{F}{b} &= \frac{6 \eta_v \nu l^2}{(h_1 - h_0)^2} \left( \ln \frac{h_1}{h_0} - 2 \frac{h_1 - h_0}{h_1 + h_0} \right). \end{aligned} \quad (11.9.1)$$

La portance optimale est atteinte lorsque  $h_1/h_0 = 2,189$ , figure 11.21 à droite. Transformons la relation en une expression plus simple :

$$\frac{F}{b} = \frac{6 \eta_v \nu l^2}{h_0^2} \left( \frac{h_0}{h_1 - h_0} \right)^2 \left( \ln \frac{h_1}{h_0} - 2 \frac{h_1 - h_0}{h_1 + h_0} \right). \quad (11.9.2)$$

ou encore :

$$\frac{F}{b} = \frac{6 \eta_v \nu l^2}{h_0^2} C_F. \quad (11.9.3.1)$$

Dans cette dernière expression,  $C_F$  représente le facteur de portance. Ce facteur peut aussi se donner en fonction du rapport géométrique de la fente  $m$  par :

$$C_F = \frac{1}{m^2} \left[ \ln(1+m) - 2 \frac{m}{2+m} \right]. \quad (11.9.3.2)$$

Finalement, la pression moyenne agissant sur le patin est égale à la poussée totale divisée par la surface du patin; elle peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{p} = \frac{F}{bl} = \frac{6 \eta_v v l}{h_0^2} C_F. \quad (11.9.4)$$

La position de la poussée sur le patin est décalée vers l'arrière et se trouve à  $x_F < 0,5 l$ .

#### 11.3.4.3 DÉBIT DANS LA FENTE

Le débit de lubrifiant dans la fente se trouve à partir de la vitesse moyenne  $v_x$  dans la fente. En partant de la relation simplifiée de Navier-Stokes limitée à l'axe  $Ox$  :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta_v \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2},$$

et après double intégration, la relation devient :

$$v_x = \frac{1}{2 \eta_v} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + C_1 z + C_2. \quad (11.10.1)$$

Les conditions particulières de l'écoulement sont :

- pour  $z = 0$ , la vitesse du fluide suivant l'axe  $Ox$  est égale à la vitesse du plan  $\Rightarrow v_x = -v$ ;
- pour  $z = h$ , la vitesse du fluide est nulle  $\Rightarrow v_x = 0$ .

En substituant ces valeurs particulières dans la solution générale, la vitesse d'écoulement peut s'exprimer en fonction de la hauteur  $z$  par :

$$v_x = \frac{1}{2 \eta_v} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + v \left( \frac{z}{h} - 1 \right). \quad (11.10.2)$$

Le premier terme de la vitesse provient de l'écoulement engendré par la variation de pression; le second fait intervenir l'effet du cisaillement de la couche liquide. Comme la pente du patin est supposée constante, nous pouvons écrire pour la butée infiniment large :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh} \cdot \frac{dh}{dx},$$

et calculer la vitesse d'écoulement en fonction de la pression, soit :

$$v_x = \frac{3v}{h^3} \left( 2 \frac{h_1 h_0}{h_1 + h_0} - h \right) (z^2 - zh) + v \left( \frac{z}{h} - 1 \right). \quad (11.10.3)$$

Le débit dans la fente peut se trouver par intégration des débits élémentaires sur des tranches de hauteur  $dz$  :

$$\dot{V} = b \int_0^h v dz = b h v_x.$$

En introduisant l'expression de la vitesse selon l'axe  $Ox$  et après intégration, le débit par unité de largeur s'exprime par :

$$\frac{\dot{V}}{b} = - \frac{1}{12 \eta_v} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^3 - \frac{vh}{2} = - \frac{1}{12 \eta_v} \cdot \frac{dp}{dh} \cdot \frac{h_1 - h_0}{l} \cdot h^3 - \frac{vh}{2}.$$

Le signe négatif exprime un débit s'effectuant dans le sens inverse de celui de l'axe de référence  $Ox$ . Pour la hauteur particulière  $h$  au point où le gradient de pression est nul, le débit s'exprime par :

$$\frac{\dot{V}}{b} = -\frac{vh}{2} = -\frac{v}{2} \cdot 2 \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1}. \quad (11.10.4)$$

Finalement, en introduisant le rapport géométrique  $m = (h_1 - h_0)/h_0$  dans la relation, le débit se trouve par :

$$\frac{\dot{V}}{b} = -vh_0 \frac{1+m}{2+m}. \quad (11.10.5)$$

Le rapport :  $(1+m)/(2+m)$  varie presque linéairement avec  $m$  dans le domaine pratique d'utilisation. Pour  $m = 0$ , c'est-à-dire pour des surfaces parallèles, ce rapport vaut exactement 0,5, confirmant ainsi la relation de Newton. À l'entrée de la fente, la vitesse locale devient partiellement positive sous l'effet de la pression, partiellement négative sous l'effet du déplacement du plan mobile, fig. 11.21.

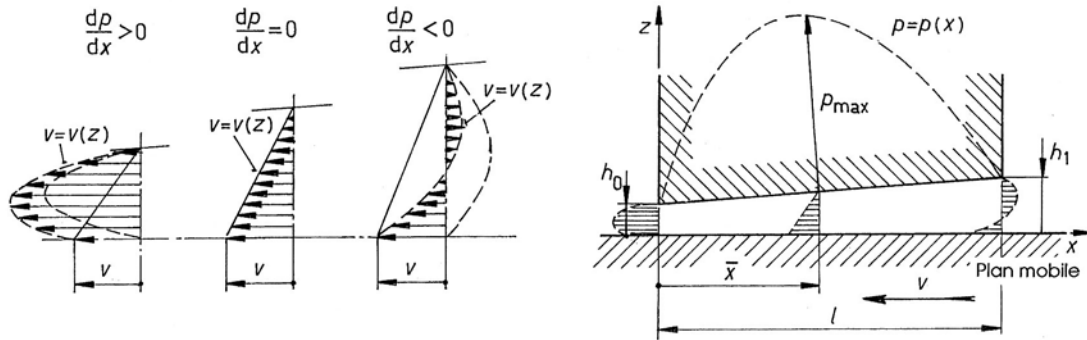


Figure 11.21 Répartition des vitesses d'écoulement dans la fente entre le patin et le plan mobile

#### 11.3.4.4 PERTES

Les pertes par cisaillement du film visqueux se laissent trouver par la relation de Newton. Pour une surface d'aire élémentaire  $dA = b \, dx$ , la force de frottement vaut :

$$dF_R = \tau dA = \eta_v \frac{dv_x}{dz} \cdot dA = \eta_v b \cdot \frac{dv_x}{dz} \cdot dx.$$

Introduisons la valeur de la vitesse  $v_x$  selon l'axe  $Ox$  en déterminant le gradient de vitesse  $dv_x/dz$  et écrivons la valeur de la force de frottement élémentaire :

$$dF_R = b \left[ 0,5 \frac{dp}{dx} (2z - h) + \eta_v \frac{v}{h} \right] dx. \quad (11.11.1)$$

Remplaçons  $dx$  par  $[l / (h_1 - h_0)] \, dh$  et  $dp/dx$  par sa valeur; la force de frottement élémentaire s'exprime par :

$$dF_R = \frac{\eta_v b l v}{h_1 - h_0} \cdot \left[ \frac{3}{h^3} \left( 2 \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} - h \right) (2z - h) + \frac{1}{h} \right] dh. \quad (11.11.2)$$

##### 1. Force de frottement sur le plan mobile

La force de frottement totale sur le plan mobile se déplaçant à la vitesse constante  $v$ , la surface mouillée étant située à la hauteur  $z = 0$ , se trouve par intégration de l'expression de la force élémentaire par rapport à  $h_0$  et  $h_1$  :

$$F_R = \frac{\eta_v b l v}{h_1 - h_0} \cdot \left[ 6 \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) - 4 \ln \frac{h_1}{h_0} \right].$$

En introduisant le rapport géométrique des fentes  $m$  dans cette relation, la force de frottement se trouve par :

$$F_R = \frac{\eta_v b l v}{h_0} \left[ \frac{4}{m} \ln(1+m) - \frac{6}{2+m} \right] = \frac{\eta_v b l v}{h_0} \cdot C_{\text{piv}}. \quad (11.11.3)$$

avec :

$$C_{\text{piv}} = \frac{4}{m} \ln(1+m) - \frac{6}{2+m}.$$

un facteur dépendant seulement du rapport géométrique  $m$ .

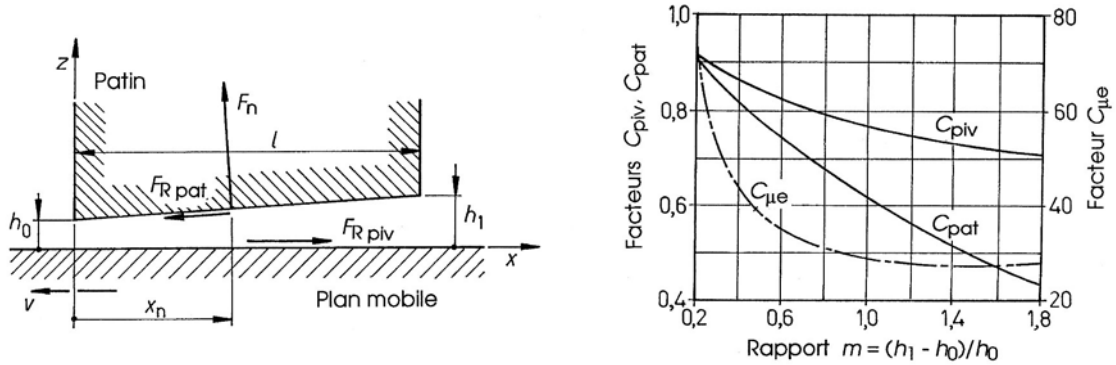


Figure 11.22 Forces sur le patin et le plan mobile. Facteurs des diverses pertes

## 2. Force de frottement sur le patin

La force de frottement totale sur le patin, supposé immobile dans la mise en équation de l'ensemble, se trouve à partir de la relation générale en introduisant  $z = h$ ; après intégration, la force de frottement vaut :

$$F_R = \frac{\eta_v b l v}{h_1 - h_0} \cdot \left[ -6 \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) - 2 \ln \frac{h_1}{h_0} \right].$$

et en introduisant également le rapport géométrique  $m$ , la force devient :

$$F_R = \frac{\eta_v b l v}{h_0} \left[ \frac{6}{2+m} - \frac{2}{m} \ln(1+m) \right] = \frac{\eta_v b l v}{h_0} C_{\text{pat}}. \quad (11.11.4)$$

avec :

$$C_{\text{pat}} = \frac{6}{2+m} - \frac{2}{m} \ln(1+m).$$

un facteur dépendant seulement du rapport géométrique  $m$ .

## 3. Coefficient de frottement équivalent

Le coefficient de frottement équivalent, défini seulement pour les pertes sur le plan mobile, se trouve par le rapport :

$$\mu_e = \frac{F_R}{F_n} = \frac{h_0}{6l} \cdot \frac{(4/m) \ln(1+m) - 6/(2+m)}{[\ln(1+m) - 2m/(2+m)]/m^2} = \frac{h_0}{6l} \cdot C_{\mu_e}. \quad (11.11.5)$$

avec :

$$C_{\mu_e} = \frac{(4/m) \ln(1+m) - 6/(2+m)}{[\ln(1+m) - 2m/(2+m)]/m^2}.$$

Ce facteur  $C_{\mu_e}$  varie fortement lorsque  $0,1 \leq m \leq 1$ , tandis que pour  $1 \leq m \leq 2$ , il reste pratiquement constant. La figure 11.22 montre les forces de frottement sur le plan et le patin ainsi que les divers facteurs pour un patin infiniment large.

Organes de transmission directe



## CHAPITRE 12

# BUTÉES ET PALIERS HYDROSTATIQUES

Les butées, paliers et guidages hydrostatiques se caractérisent par les propriétés générales suivantes :

- la séparation des deux composants solides du système tribologique se réalise grâce à la présence d'un fluide sous pression.
- cette séparation des deux composants est déjà possible à vitesse relative nulle.
- la pression hydrostatique est générée par une ou plusieurs pompes hydrauliques, habituellement de type volumétrique, c'est-à-dire à débit pratiquement indépendant de la pression.
- le fluide sous pression est dirigé vers des poches et de là s'écoule à travers des fentes grâce à la présence de seuils. Au point de vue mécanique des fluides, l'alimentation s'effectue à travers deux résistances : la première fixe, la seconde variable, la pression utile se trouvant entre ces deux résistances, voir le couplage de la figure 12.1.
- les pertes dans les butées, paliers et patins se composent de deux parties : l'énergie perdue dans l'entraînement de la pompe et les pertes dues au cisaillement du fluide visqueux.

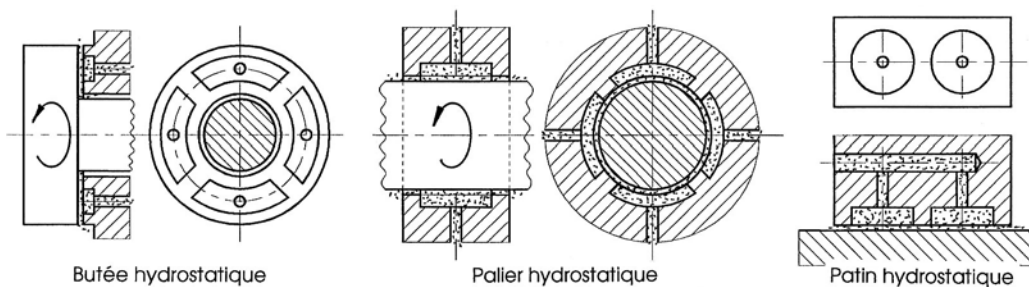


Figure 12.1 Butée, palier et patin de type hydrostatique

La butée hydrostatique est un organe de machine supportant une charge axiale en rotation grâce à un fluide sous pression séparant les deux parties solides, un appui généralement fixe et d'un pivot, animées de vitesses circonférentielles différentes. Cette séparation peut avoir lieu au repos comme en rotation. Par extension, le guidage hydrostatique se compose d'un ou de plusieurs patins alimentés en fluide sous pression évitant le contact solide sur solide des parties fixes et mobiles.

## 12.1 PATINS RECTANGULAIRES DE GUIDAGE

Le principe introduit dans tous les éléments hydrostatiques comme les butées et les paliers peut également s'appliquer aux patins de guidage rectangulaires. Le patin de guidage va permettre de découvrir le comportement d'appuis hydrostatiques à plusieurs poches dans un cas très simple.

### 12.1.1 CARACTÉRISTIQUES DU PATIN À UNE SEULE POCHE

Le patin de guidage se compose d'une poche centrale et d'un seuil rectangulaire que nous supposons de même largeur sur les deux côtés diamétralement opposés selon figure 12.2. De plus, pour simplifier la discussion, nous admettons une variation linéaire de la pression perpendiculairement aux côtés des seuils. Le fluide s'écoule de la poche vers l'extérieur à travers des seuils. Les hypothèses simplificatrices introduites sont :

1. l'étude de l'écoulement est simplifiée en considérant une fente de hauteur constante  $h$  et de largeur égale à la longueur moyenne des seuils.
2. l'écoulement obéit à la loi de Hagen-Poiseuille des écoulements laminaires dans les tubes et les fentes.
3. Si plusieurs patins constituent le guidage, les surfaces du patin et de la pièce guidée restent parallèles sur chacune des poches.
4. Si les surfaces se déplacent l'une par rapport à l'autre, la relation fondamentale des fluides newtoniens est applicable au cisaillement de la couche liquide visqueuse.
5. Le fluide est supposé incompressible.
6. Les dimensions géométriques du patin sont :

- |                            |                                     |                           |
|----------------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| - largeurs du patin :      | intérieure : $B_i$                  | extérieure : $B_e$ ,      |
| - longueurs du patin :     | intérieure : $L_i$                  | extérieure : $L_e$ ,      |
| - profondeurs des seuils : | $s_B = 0,5 (B_e - B_i)$             | $s_L = 0,5 (L_e - L_i)$ , |
| - dimensions moyennes :    | $B_m = B_i + s_B$                   | $L_m = L_i + s_L$ ,       |
| - aire de calcul du patin  | $A_m = B_m L_m$ ,                   |                           |
| - largeur de la fente :    | $b_f = 2 (B_m + L_m) .$             |                           |
| - pressions :              | de la pompe : $p_P$                 |                           |
|                            | extérieure : $p_{ext} = 0$ (admis). |                           |

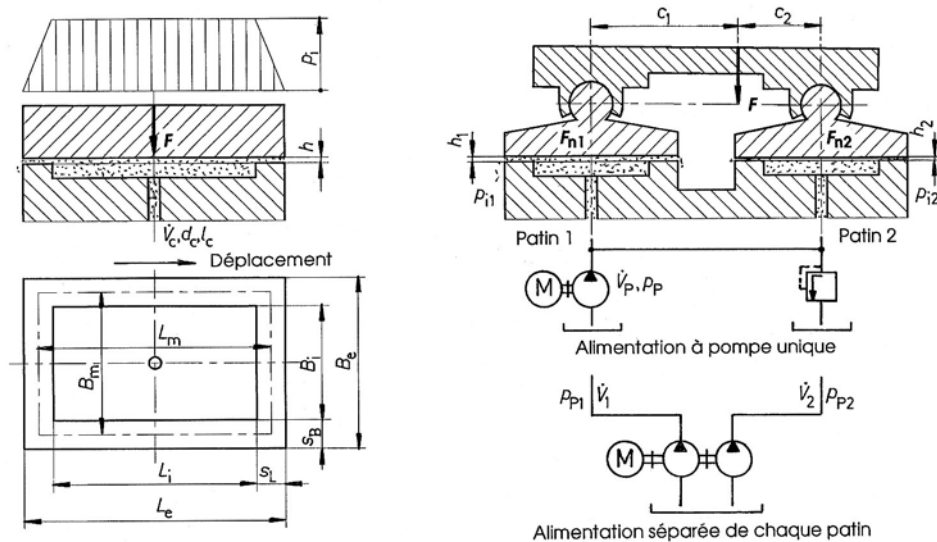


Figure 12.2 Dimensions géométriques et pression sur un patin hydrostatique à une poche  
Charge et couplage de l'alimentation d'un guidage à deux patins hydrostatiques

#### 1. Equilibre du patin

La pièce guidée est sollicitée par une force centrée  $F$  et l'équilibre au repos de cette pièce impose :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_n - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_n = F.$$

## 12. Butées et paliers hydrostatiques

La poussée hydraulique sur le patin peut s'exprimer en fonction de la pression intérieure  $p_i$  dans la poche et la surface efficace  $A_m$  par :

$$F_n = p_i A_m = p_i B_m L_m.$$

La poche est alimentée en fluide visqueux, viscosité dynamique  $\eta_v$ , par une pompe volumétrique à travers une résistance d'entrée constituée par un capillaire, diamètre  $d_c$ , longueur  $l_c$ . Le capillaire constitue la résistance hydraulique d'entrée, les seuils du patin la résistance de sortie.

### 2. Débits dans le capillaire et les seuils

La conservation du débit : débit dans le capillaire  $\dot{V}_c$  = débit dans les seuils  $\dot{V}_s$  permet d'écrire les deux relations :

1. Débit dans le capillaire, exprimé par la relation de Poiseuille pour un tube à section circulaire :

$$\dot{V}_c = \frac{\pi d_c^4}{128} \cdot \frac{p_p - p_i}{\eta_v l_c} = \frac{p_p - p_i}{R_c}.$$

2. Débit dans les seuils :

$$\dot{V}_s \approx \frac{h^3}{12\eta_v} \cdot \left( \frac{2B_m}{s_B} + \frac{2L_m}{s_L} \right) \cdot p_i = \frac{p_i}{R_s}. \quad (12.1.1)$$

Dans ces deux expressions, les grandeurs  $R_c$  et  $R_s$  sont les résistances hydrauliques. Elles valent les expressions suivantes :

- Résistance du capillaire :  $R_c = 128 \eta_v l_c / (\pi d_c^4)$ .

- Résistance des seuils :  $R_s = 6 \eta_v / [(B_m/s_B + L_m/s_L) h^3] = C_s/h^3$ .

### 3. Pression hydraulique dans le patin

En exprimant la pression à l'intérieur de la poche en fonction des résistances du capillaire et du seuil, ces pressions s'expriment en fonction des résistances.

1. Pression dans la poche du patin :

$$p_i = \frac{1}{1 + (R_c / C_s) h^3} \cdot p_p.$$

2. Pression d'alimentation de la pompe :

$$p_p = \frac{1}{1 + (R_c / C_s) h^3} \cdot \frac{F}{A_m}. \quad (12.1.2)$$

La caractéristique  $C_s$  vaut :  $C_s = 6 \eta_v / (B_m/s_B + L_m/s_L)$ .

La pression à produire par la pompe est proportionnelle à la charge extérieure sur le patin. Dans le cas particulier où la hauteur de la fente vaut zéro,  $h = 0$ , alors  $p_p = F/A_m$  !

## 12.1.2 CARACTÉRISTIQUES D'UN GUIDAGE À DEUX PATINS

Soit un guidage constitué par deux patins hydrostatiques de mêmes dimensions géométriques alimentés en fluide sous pression. La pièce guidée est sollicitée par une force  $F$  placée aux distances  $c_1$  et  $c_2$  des centres des poches 1 et 2. Les poussées produites sont :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{n1} + F_{n2} - F = 0,$$

$$\Sigma M_{(O1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1 + c_2) F_{n2} = c_1 F,$$

$$\Rightarrow F_{n2} = [c_1/(c_1+c_2)] F \quad \text{et} \quad F_{n1} = [c_2/(c_1+c_2)] F,$$

avec :  $F_{n1} = p_{i1} A_m$  et  $F_{n2} = p_{i2} A_m$ .

Comme les butées possèdent les mêmes dimensions géométriques, les poussées sont proportionnelles aux pressions dans les poches. Cette constatation se traduit par la relation :

$$\frac{F_{n1}}{F_{n2}} = \frac{p_{i1}}{p_{i2}}. \quad (12.1.3)$$

### 12.1.3 ALIMENTATION DES PATINS ET BUTÉES

Le comportement d'un patin, d'une butée ou d'un palier hydrostatique sous l'effet d'une charge normale, en particulier la raideur de cet élément  $k = dF/dh$ , représente une caractéristique importante intervenant dans le choix des paramètres d'ajustement et l'adoption des dimensions géométriques. Le système d'alimentation, de la pompe vers les poches sous pression, influence directement l'écrasement du fluide porteur, voir figure 12.2 à droite.

#### 1. Alimentation commune avec des résistances constantes

La ou les poches sous pression sont alimentées par une seule pompe volumétrique reliée aux diverses poches par des conduites en parallèle équipées de résistances fixes. La pression produite par la pompe est limitée à une valeur constante. La pression dans la poche dépend de la perte de charge dans la résistance et dans les seuils. En supposant un écoulement laminaire dans la résistance et les seuils, la hauteur de la fente est reliée à la charge par la relation :

$$h \sim (F_{\max}/F - 1)^{1/3}.$$

Le système d'alimentation composé d'une pompe unique et de résistances fixes dans les conduites est la solution la plus courante. Il est employé dans les butées, patins et paliers. Si la résistance se compose d'un capillaire de diamètre  $d_c$ , longueur  $l_c$ , le débit dans la conduite peut s'exprimer par la relation de Poiseuille :

$$\dot{V}_c = \frac{\pi d_c^4}{128} \cdot \frac{p_p - p_i}{\eta_v l_c} = \frac{p_p - p_i}{R_c}.$$

La perte de charge étant proportionnelle au débit de la pompe passant dans le capillaire et inversement proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre.

#### 2. Alimentation à plusieurs pompes et débit constant

Chaque poche de la butée, du patin ou du palier est alimentée par une pompe volumétrique à débit pratiquement indépendant de la pression de refoulement. En supposant un élément hydrostatique constitué par une poche à seuil unique, le débit dans la fente s'exprime directement par la relation de Hagen-Poiseuille :

$$\dot{V}_{\text{seuil}} = \frac{b h^3}{12 \eta_v l} \cdot p_i.$$

La hauteur de la fente  $h$  est reliée à la force appliquée sur l'aire de calcul de l'élément par :

$$h^3 = \frac{12 \eta_v l \dot{V}_{\text{seuil}}}{b F} \cdot A_m.$$

avec :  $p_i = F/A_m$ ,  $A_m$  étant l'aire efficace de la poche.

Comme la raideur de l'appui est défini par :  $k = dF/dh$ , cette caractéristique dépend directement de la hauteur de la fente et de la force appliquée  $F$ . La raideur est faible à charge

modeste et épaisseur importante du fluide dans le seuil et elle augmente constamment avec la charge. Cette solution à plusieurs pompes est supérieure à la précédente, mais plus chère.

### 3. Alimentation avec résistances variables

Pour une charge excentrée comme le montre la figure 12.2, il est possible d'ajuster les résistances des capillaires de telle sorte que la hauteur de la fente reste constante pour une charge donnée. Sous charge variable, l'épaisseur du film varie inmanquablement dans une solution de ce type. Une autre variante de couplage consiste à créer, sur les conduites d'alimentation des poches, des résistances variables en fonction de la charge appliquée. Cette condition particulière de fonctionnement introduit des problèmes de régulation de pression qui engendrent très souvent une instabilité de fonctionnement de l'appui.

## 12.1.4 DÉPLACEMENT DU GUIDAGE

Soit un guidage constitué par un ou plusieurs patins se déplaçant à la vitesse constante  $v$  dans la direction d'un des côtés des patins. Supposons également que toutes les surfaces en déplacement relatifs soient mouillées par le fluide lubrifiant. Si les fentes sur chacun des patins sont à épaisseur constante, l'application simple de la relation des fluides newtoniens permet d'écrire l'expression de la force à produire pour déplacer le guidage :

$$F = \sum_{j=1}^n \left( \eta_v \frac{v}{h_j} A_{mj} \right). \quad (12.1.4)$$

car le gradient de vitesse  $dv/dy = \Delta v/h_j = \text{constant}$ . Dans la direction perpendiculaire au déplacement, le fluide entre dans le seuil avant et ressort dans le seuil arrière. Le débit résultant est donc nul et la composante de l'écoulement sur les seuils, engendrée par la pression  $p_{i,j}$ , n'est pas modifiée.

## 12.2 BUTÉES SIMPLES À ALIMENTATION CENTRALE

Ce sous-chapitre traite deux types de butées circulaires à alimentation centrale, la première servant à la recherche du comportement fondamental de ce type d'élément de machine.

### 12.2.1 BUTÉE CIRCULAIRE À POCHE CENTRALE

La butée circulaire simple avec alimentation centrale est placée à l'extrémité de l'arbre sollicité par une force axiale  $F_a$  constante. Elle se compose d'un pivot plan circulaire et d'une surface d'appui annulaire, appelée seuil, rayon intérieur  $r_i$ , rayon extérieur  $r_e$ , alimentée intérieurement par un fluide sous une pression  $p_i$ . Cette alimentation est assurée par une pompe volumétrique à travers une résistance constituée par un capillaire de longueur  $l_c$  et diamètre  $d_c$ , la pression produite par la pompe étant  $p_p$ . L'arbre du pivot tourne à la vitesse angulaire  $\omega = 2 \pi n$ ,  $n$  étant la fréquence de rotation en tours par seconde.

Les hypothèses initiales dans le calcul sont :

1. le fluide obéit à la loi des fluides newtoniens,
2. la viscosité du lubrifiant reste constante,
3. l'épaisseur du film liquide  $h_0$  reste constante sous charge axiale constante,
4. la pression intérieure  $p_i$  reste constante et la pression relative à l'extérieur de la butée est égale à la pression atmosphérique. Cette pression est supposée nulle,
5. l'effet centrifuge sur le fluide est négligé.

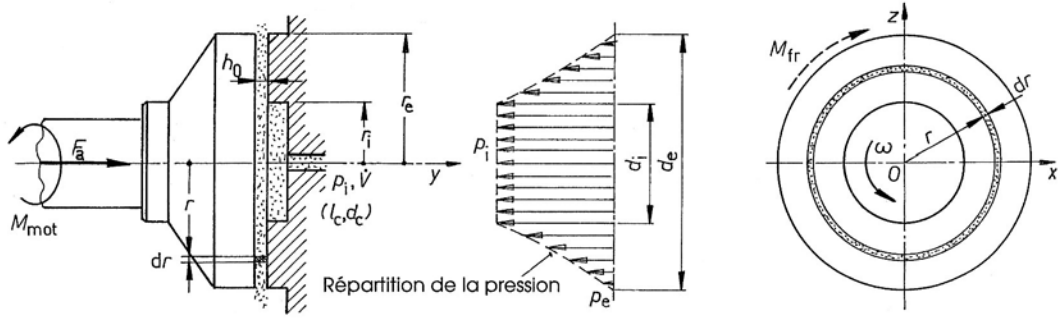


Figure 12.3 Butée circulaire simple avec alimentation centrale

### 12.2.1.1 POUSSÉE, PRESSIONS ET DÉBIT

L'équilibre de la butée s'écrit :

1. *Équilibre de translation* :

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_a - F_n = F_a - (F_{n1} + F_{n2}) = 0.$$

avec :  $F_{n1}$  poussée sur la surface circulaire de rayon  $r_i$ ,  
 $F_{n2}$  poussée sur la surface annulaire de rayons  $r_i$  et  $r_e$ .

2. *Équilibre de rotation* :

$$\sum M_{Oy} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{fr} - M_{mot} = 0.$$

Ces deux expressions ne permettent pas de trouver la valeur des deux inconnues, soit les composantes de la poussée totale engendrée par la pression sur le pivot, soit le moment de frottement. Exprimons les débits dans le capillaire et dans la fente constituée par le seuil annulaire en découpant un tube élémentaire de liquide au rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$  et en utilisant les relations de Hagen Poiseuille, avec  $\dot{V}_c = \dot{V}_s = \dot{V}$  :

$$1. \text{ Débit dans le capillaire : } \dot{V}_c = \frac{\pi d_c^4}{128} \cdot \frac{\Delta p_{p,i}}{\eta_v l_c}.$$

$$2. \text{ Débit dans le seuil : } \dot{V}_s = -\frac{2\pi r h_0^3}{12\eta_v} \cdot \frac{dp}{dr}.$$

avec :  $\Delta p_{p,i} = p_p - p_i$ .

La variation élémentaire de pression sur l'anneau élémentaire au rayon  $r$  de largeur  $dr$  vaut :

$$dp = -\frac{6\eta_v \dot{V}}{\pi h_0^3} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Intégrons cette relation différentielle en remarquant les conditions particulières aux limites :

- pour  $r = r_i$ , la pression du fluide est  $p = p_i$ ,
- pour  $r = r_e$ , la pression du fluide est  $p = p_e = 0$  par hypothèse.

Il vient :

$$p = -\frac{6\eta_v \dot{V}}{\pi h_0^3} \cdot \ln r + C_1,$$

avec la constante  $C_1$  déterminée pour  $r = r_e$ , la pression étant nulle en ce point :

$$C_1 = (6\eta_v \dot{V}/(\pi h_0^3)) \cdot \ln r_e.$$

## 12. Butées et paliers hydrostatiques

La répartition de la pression du rayon intérieur  $r_i$  au rayon extérieur  $r_e$  obéit à une loi de répartition logarithmique :

$$p = \frac{6\eta_v \dot{V}}{\pi h_0^3} \cdot \ln \frac{r_e}{r}. \quad (12.2.1)$$

La pression à l'intérieur de la butée valant  $p_i$ , le débit dans le sens radial se calcule par :

$$\dot{V} = \frac{\pi h_0^3}{6\eta_v \ln(r_e / r_i)} \cdot p_i. \quad (12.2.2)$$

En remplaçant l'expression du débit dans celle de la répartition de la pression, la pression au rayon  $r$  peut se trouver par :

$$p_{(r)} = \frac{\ln(r_e / r)}{\ln(r_e / r_i)} \cdot p_i. \quad (12.2.3)$$

Elle est donc indépendante du débit et des caractéristiques du fluide visqueux. L'équilibre axial de la butée impose une poussée hydrostatique sur la surface mouillée de la butée égale à la force axiale extérieure  $F_a$ , soit :

$$F_a = F_{n1} + F_{n2} = \int_{r=0}^{r=r_e} p \cdot 2\pi r dr = \pi r_i^2 p_i + \int_{r=r_i}^{r=r_e} p \cdot 2\pi r dr.$$

En remplaçant l'expression de la pression en fonction du rayon sur la surface annulaire, la force axiale vaut :

$$F_a = \pi r_i^2 p_i + \frac{12\eta_v \dot{V}}{h_0^3} \int_{r=r_i}^{r=r_e} \ln\left(\frac{r_e}{r}\right) r dr.$$

Après intégration et simplification, la force axiale s'exprime simplement par :

$$F_a = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{\ln(r_e / r_i)} \cdot p_i. \quad (12.2.4)$$

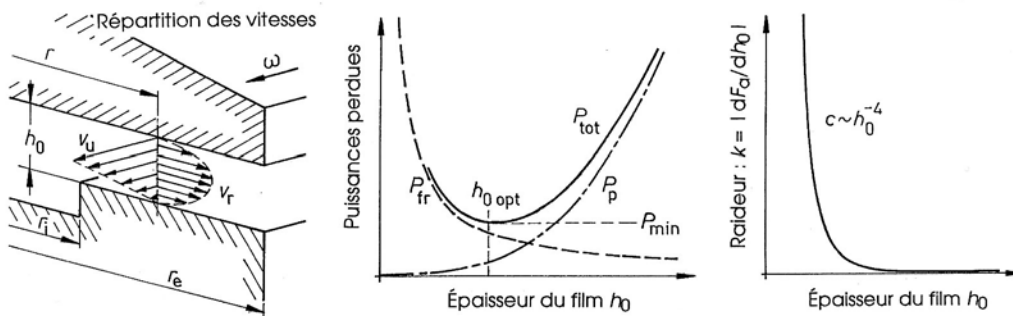


Figure 12.4 Vitesses d'écoulement composantes, puissances perdues et rigidité de la butée simple

Cette dernière relation permet de trouver la pression d'alimentation du fluide en fonction de la charge axiale sur l'arbre, des rayons intérieur et extérieur du seuil. Cette pression est indépendante de la viscosité du fluide et de la hauteur de la fente. Exprimons finalement le débit dans la butée en fonction de la charge extérieure :

$$\dot{V} = \frac{F_a h_0^3}{3\eta_v (r_e^2 - r_i^2)}. \quad (12.2.5)$$

Ce débit est proportionnel au cube de la hauteur de la fente.

### 12.2.1.2 PERTES DANS LA BUTÉE

La butée hydrostatique doit être alimentée constamment en fluide sous pression au moyen d'une pompe. Si  $\eta_p$  représente le rendement total de la pompe d'alimentation et du réseau de distribution, capillaire d'entrée compris, la puissance à prévoir pour l'entraînement de cette pompe se trouve par :

$$P_p = \dot{V} p_i \frac{1}{\eta_p}. \quad (12.3.1)$$

Les pertes par cisaillement du fluide s'ajoutent à la puissance de la pompe d'alimentation. En appliquant la relation fondamentale des fluides visqueux au cisaillement de la couche liquide engendré par la rotation du pivot, le couple à fournir sur l'arbre vaut :

$$M_{fr} = \int_{r=r_i}^{r=r_e} r \tau dA,$$

ou encore :

$$M_{fr} = \int_{r=r_i}^{r=r_e} r \eta_v \frac{\omega r}{h_0} 2 \pi r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\eta_v \omega}{h_0} \cdot (r_e^4 - r_i^4). \quad (12.3.2)$$

Le couple de frottement est inversement proportionnel à la hauteur de la fente et proportionnel à la quatrième puissance des rayons du seuil. La puissance perdue par cisaillement vaut évidemment  $P_{fr} = M_{fr} \omega$  et la puissance totale est égale à la somme :

$$P_{tot} = P_p + P_{fr}.$$

La figure 12.4 représente la répartition des vitesses composantes dans la fente sur le seuil et les deux puissances perdues en fonction de l'épaisseur du film liquide. La puissance totale présente un minimum pour une hauteur de fente optimale  $h_{opt}$ .

### 12.2.1.3 COEFFICIENT DE FROTTEMENT ÉQUIVALENT

En utilisant la définition simple du couple de frottement des butées (relation du chapitre 1), il est possible d'exprimer le coefficient de frottement équivalent sous la forme du rapport :

$$\mu_e = \frac{P_p + P_{fr}}{r_{moy} \omega F_a}, \quad (12.3.3)$$

avec :  $r_{moy} = (r_i + r_e)/2$ , rayon moyen de la butée.

### 12.2.1.4 RIGIDITÉ DE LA BUTÉE

Exprimons la force axiale  $F_a$  en fonction du débit  $\dot{V}$ , des dimensions géométriques du seuil et de la hauteur de la fente  $h_0$  par :

$$F_a = \frac{3 \eta_v \dot{V} (r_e^2 - r_i^2)}{h_0^3},$$

et calculons la rigidité de la butée par :

$$k_{butée} = \frac{dF_a}{dh_0} = - \frac{9 \eta_v \dot{V} (r_e^2 - r_i^2)}{h_0^4}. \quad (12.3.4)$$

La rigidité est inversement proportionnelle à la quatrième puissance de la hauteur de la fente sur le seuil.



### 12.2.1.5 CHOIX DES DIMENSIONS ET DE LA POMPE

Le choix des dimensions géométriques et des grandeurs oléohydrauliques dépend des conditions imposées à la sécurité de cet élément. Il est possible de trouver les dimensions optimales pour atteindre le plus faible coefficient de frottement équivalent. Ces conditions théoriques ne tiennent pas compte de l'environnement pratique, en particulier des conditions de repos de la butée imposées par la pression moyenne de contact sous charge axiale, de la nature de la pompe et des accessoires de la commande, etc. De plus, cette discussion mathématique a une portée limitée car ce type de butée simple est rarement utilisé sous cette forme fondamentale. Le débit à produire par la pompe doit permettre d'éviter tout contact métallique en service.

### 12.2.2 BUTÉE CIRCULAIRE À DEUX SEUILS ET UNE POCHE

Cette butée est constituée par un pivot plan circulaire et deux seuils annulaires concentriques séparés par une chambre annulaire, la poche, alimentée en fluide sous pression. L'étanchéité entre le pivot et la poche est assurée par les deux seuils, l'un intérieur, l'autre extérieur. Les caractéristiques particulières de cette butée sont :

$r_{1i}$	rayon intérieur du seuil intérieur,
$r_{1e}$	rayon extérieur du seuil intérieur,
$r_{2i}$	rayon intérieur du seuil extérieur,
$r_{2e}$	rayon extérieur du seuil extérieur,
$d_c$	diamètre du capillaire d'entrée,
$l_c$	longueur du capillaire d'entrée,
$p_P$	pression produite par la pompe,
$p_i$	pression dans la poche,
$p_e$	pression extérieure (ou ambiante), supposée nulle,
$h_0$	hauteur du film de fluide, identique sur les deux seuils,
$\eta_v$	viscosité dynamique du fluide, supposée constante,
$\omega$	vitesse angulaire du pivot : $\omega = 2 \pi n$ ,
$\eta_P$	rendement total de la pompe et du réseau de distribution, y compris le capillaire d'entrée.

Les autres hypothèses introduites pour la butée simple sont aussi applicables à cette butée.

#### 12.2.2.1 PRESSIONS ET DÉBITS

Les relations trouvées pour la butée hydrostatique simple peuvent s'appliquer pour la butée à deux seuils.

##### 1. *Seuil intérieur*

Pour  $r_{1i} \leq r_1 \leq r_{1e}$ , la variation de la pression en fonction du rayon  $r_1$  s'exprime par :

$$p_1 = \frac{\ln(r_1 / r_{1i})}{\ln(r_{1e} / r_{1i})} \cdot p_i.$$

Le débit de la poche vers l'intérieur de la butée, dans la fente de hauteur  $h_0$ , se donne par :

$$\dot{V}_1 = \frac{\pi h_0^3}{6 \eta_v \ln(r_{1e} / r_{1i})} \cdot p_i.$$

## 2. Seuil extérieur

Pour  $r_{2i} \leq r_2 \leq r_{2e}$ , la variation de la pression en fonction du rayon  $r_2$  s'exprime par :

$$p_2 = \frac{\ln(r_{2e}/r_2)}{\ln(r_{2e}/r_{2i})} \cdot p_i.$$

Le débit de la poche vers l'extérieur de la butée, dans la fente de hauteur  $h_0$ , se donne par :

$$\dot{V}_2 = \frac{\pi h_0^3}{6 \eta_v \ln(r_{2e}/r_{2i})} \cdot p_i.$$

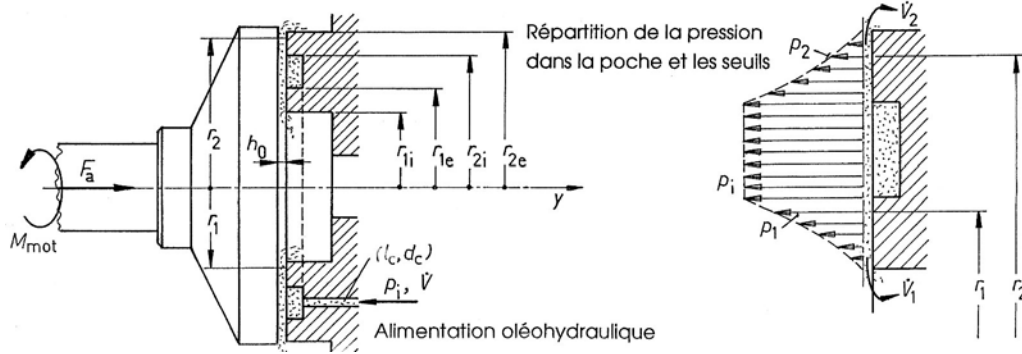


Figure 12.5 Butée circulaire à deux seuils avec alimentation dans une poche annulaire

## 3. Butée totale

L'équilibre de translation impose que la poussée résultante soit égale à la force axiale sur l'arbre, soit :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_a - F_n = F_a - (F_{n1} + F_{n2} + F_{n3}) = 0,$$

avec :  $F_{n1}$  poussée sur le seuil intérieur,

$F_{n2}$  poussée sur le seuil extérieur,

$F_{n3} = \pi (r_{2i}^2 - r_{1e}^2) p_i$  poussée engendrée par la poche annulaire.

L'expression générale devient :

$$F_a = \pi (r_{2i}^2 - r_{1e}^2) p_i + \int_{r_{1e}}^{r_{1i}} p_1 2\pi r_1 dr_1 + \int_{r_{2i}}^{r_{2e}} p_2 2\pi r_2 dr_2.$$

Après développement et simplification, la portance de la butée s'exprime par :

$$F_a = \frac{\pi}{2} \cdot \left[ \frac{r_{2e}^2 - r_{2i}^2}{\ln(r_{2e}/r_{2i})} - \frac{r_{1e}^2 - r_{1i}^2}{\ln(r_{1e}/r_{1i})} \right] p_i. \quad (12.4.1)$$

En supposant une répartition triangulaire de la pression dans les deux seuils et pour simplifier la relation exacte, introduisons les rayons moyens des seuils :

$$r_{1m} = (r_{1i} + r_{1e})/2 \quad \text{et} \quad r_{2m} = (r_{2i} + r_{2e})/2.$$

La force axiale peut se donner approximativement par :

$$F_a \approx \pi (r_{2m}^2 - r_{1m}^2) \cdot p_i.$$

Le débit total à produire par la pompe volumétrique est égal à la somme des débits passant dans les seuils intérieur et extérieur, soit :

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \frac{\pi h_0^3}{6 \eta_v} \left[ \frac{1}{\ln(r_{2e}/r_{2i})} + \frac{1}{\ln(r_{1e}/r_{1i})} \right] \cdot p_i. \quad (12.4.2)$$

#### 12.2.2.2 PERTES DANS LA BUTÉE

L'équilibre de rotation de l'arbre supportant la charge axiale s'exprime par :

$$\Sigma M_{Oy} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{fr} - M_{mot} = 0.$$

Le couple moteur à produire sur l'arbre est égal au couple engendré par le cisaillement du fluide visqueux dans les deux seuils. La relation de la butée simple s'applique à chacun des seuils :

$$M_{fr} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\eta_v \omega}{h_0} \cdot \left[ (r_{1e}^4 - r_{1i}^4) + (r_{2e}^4 - r_{2i}^4) \right]. \quad (12.4.3)$$

La puissance du moteur d'entraînement de la pompe volumétrique est aussi donnée par la relation usuelle :

$$P_p = \dot{V} p_i \frac{1}{\eta_p}. \quad (12.4.4)$$

Finalement, la puissance perdue totale dans la butée est la somme de la puissance de la pompe et de la puissance de frottement perdue dans toute la butée :

$$P_{tot} = P_p + P_{fr} = M_{fr} \omega + \dot{V} p_i \frac{1}{\eta_p} = r_{moy} \mu_e F_a \omega. \quad (12.4.3)$$

avec :  $\mu_e$  coefficient de frottement équivalent,  
 $r_{moy} = (r_{1i} + r_{2e})/2$  rayon moyen de la butée.

Il est aussi possible de trouver les conditions optimales de fonctionnement de cette butée en imposant un débit à la pompe d'alimentation de telle sorte que la puissance perdue totale soit minimale.

### 12.2.3 BUTÉES HYDROSTATIQUES SPHÉRIQUES OU CONIQUES

Le principe de la butée hydrostatique peut être étendu aux butées sphériques ou coniques supportant des charges combinées, radiale et axiale. Ces éléments de machines sont utilisés dans les articulations à faible mouvement relatif et couples très modestes supportant des charges par l'intermédiaire d'un film liquide sous pression.

#### 12.2.3.1 BUTÉES SPHÉRIQUES

La butée sphérique s'introduit non seulement pour supporter des arbres en rotation mais aussi pour atteindre des conditions de frottement idéales dans les articulations. Le contact métal sur métal engendre un frottement important dans les articulations usuelles entre les pièces en glissement et s'oppose au mouvement libre des composants. La présence d'un film de liquide sous pression, séparant entièrement la partie mobile de la partie fixe, élimine complètement ce défaut.

Les butées sphériques sont à action unidirectionnelle ou à effet bidirectionnel suivant la forme donnée à la partie sphérique creuse et les poches sous pression munies de résistance d'entrée. Pour éviter un déplacement exagéré de la partie mobile chargée par rapport à la base fixe, de l'effet de charges excentrées, l'alimentation en fluide sous pression peut s'effectuer

dans plusieurs poches séparées par des seuils de communication. Un exemple type de butée sphérique est la liaison entre le piston et le patin dans les pompes volumétriques à pistons axiaux à plateau incliné. Les dimensions adoptées sont un compromis entre les pertes admissibles de fluide, l'élimination du frottement dans l'articulation grâce à la poussée hydrostatique générée directement par le piston comprimant le fluide et les pertes dans le patin glissant sur le plateau incliné. Le comportement de ces articulations sphériques dépend non seulement de la géométrie des diverses pièces mais aussi du mode d'alimentation des poches.

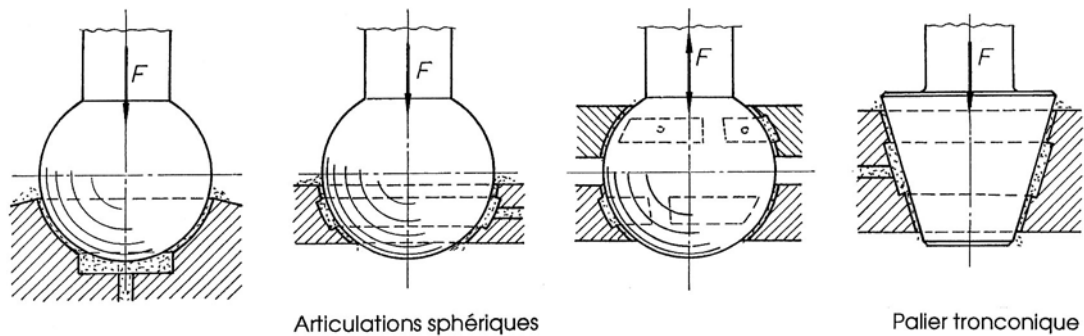


Figure 12.6 Principe de la conception de butées hydrostatiques sphériques et conique

#### 12.2.3.2 BUTÉE - PALIER HYDROSTATIQUE TRONCONIQUE

Cette solution permet d'obtenir un palier supportant une charge combinée : composante axiale et composante radiale. Elle n'est pas beaucoup utilisée sous la forme représentée sur la figure 12.6, car elle est très sensible aux défauts de parallélisme des deux troncs de cône.

#### 12.2.4 BUTÉE À DOUBLE EFFET AVEC POCES ANNULAIRES

Considérons maintenant une butée hydrostatique à double effet constituée par un arbre, équipé d'un disque rigide transmettant l'effort axial dans les deux sens, et deux chambres annulaires de mêmes dimensions alimentées en fluide sous pression par l'intermédiaire de conduites formant résistance hydraulique, placées de part et d'autre du disque rigide. Les hypothèses initiales introduites pour cet élément de machines sont :

1. la viscosité du fluide reste constante et le fluide est incompressible,
2. la fréquence de rotation de l'arbre reste relativement faible de telle manière que l'effet centrifuge peut être négligé,
3. la hauteur des deux fentes, dépendant de la charge appliquée, reste constante sur chacun des seuils,
4. l'écoulement dans les capillaires et dans les seuils reste laminaire en tout instant,
5. la variation de la charge axiale sur l'arbre est possible, mais s'effectue lentement, donc l'écrasement du fluide n'intervient pas dans l'équilibre de l'arbre et la production de la pression,
6. pour simplifier la recherche des conditions d'équilibre, la pression est supposée varier linéairement dans les seuils contrairement à la relation exacte où la variation suit une loi logarithmique. Cette hypothèse est admissible si la profondeur des seuils est faible vis à vis des divers rayons de la chambre annulaire.
7. Les rayons intérieurs et extérieurs des seuils sont identiques dans les butées inférieure et supérieure.

### 12.2.4.1 GÉOMÉTRIE DE LA BUTÉE

Les dimensions de cette butée sont semblables à celles de la butée à deux seuils. Les symboles utilisés pour la butée inférieure sont indicés par i, ceux pour la butée supérieure par s. Les dimensions géométriques sont :

$r_{1ii} = r_{1is}$	rayon intérieur du seuil intérieur, indicé 1,
$r_{1ei} = r_{1es}$	rayon extérieur du seuil intérieur,
$r_{2ii} = r_{2is}$	rayon intérieur du seuil extérieur, indicé 2,
$r_{2ei} = r_{2es}$	rayon extérieur du seuil extérieur,
$l_{ci} \quad l_{cs}$	longueur des capillaires, ces deux dimensions pouvant être différentes,
$d_{ci} \quad d_{cs}$	diamètre des capillaires, ces deux dimensions pouvant être différentes,
$h_{0i} \quad h_{0s}$	hauteur des fentes à force axiale nulle,
$h_{0tot} = h_{0i} + h_{0s}$	hauteur totale des deux fentes ou jeu axial total de la butée.

L'étude de cette butée consiste à déplacer progressivement l'arbre vers le bas par la force axiale jusqu'à ce que le pivot touche la butée inférieure.

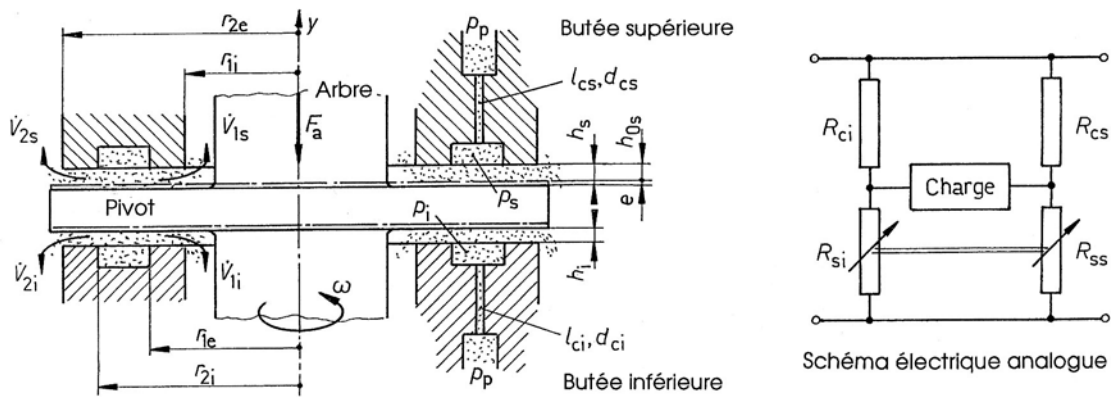


Figure 12.7 Butée hydrostatique à double effet avec poches annulaires

### 12.2.4.2 ÉQUILIBRE, POUSSÉES ET PRESSIONS

La pression d'alimentation produite par la pompe étant désignée par  $p_P$ , celle dans les deux poches annulaires par  $p_i$  et  $p_s$ , la pression extérieure à la butée par  $p_{ex} = 0$  par hypothèse, les chutes de pression dans les capillaires et dans les seuils à charge extérieure nulle ou différente de zéro imposent :

- butée inférieure :  $p_P = \Delta p_{ci} + \Delta p_{li} = \Delta p_{ci} + \Delta p_{2i},$
- butée supérieure :  $p_P = \Delta p_{cs} + \Delta p_{1s} = \Delta p_{cs} + \Delta p_{2s}.$  (12.5.1)

La chute de pression dans les capillaires des deux chambres vaut :

- butée inférieure :  $\Delta p_{ci} = p_P - p_i,$
- butée supérieure :  $\Delta p_{cs} = p_P - p_s.$

L'équilibre de translation de la butée s'écrit :

$$\Sigma F_y = 0 : \quad F_{ni} - F_a - F_{ns} = 0,$$

- avec :  $F_a$  force extérieure supposée agir dans le sens négatif (vers le bas),
- $F_{ni}$  poussée produite par la butée inférieure sur le pivot (vers le haut),
- $F_{ns}$  poussée produite par la butée supérieure sur le pivot (vers le bas).

En introduisant les rayons moyens des seuils :  $r_{1m} = (r_{1ii} + r_{1ei})/2$  et  $r_{2m} = (r_{2ii} + r_{2ei})/2$ , les deux poussées sur le disque monté sur l'arbre se calculent simplement par :

$$\begin{aligned} - \text{butée inférieure :} & \quad F_{ni} = \pi (r_{2m}^2 - r_{1m}^2) p_i, \\ - \text{butée supérieure :} & \quad F_{ns} = \pi (r_{2m}^2 - r_{1m}^2) p_s. \end{aligned} \quad (12.5.2)$$

Les dimensions géométriques des deux capillaires sont données sur la figure 12.7, ces dimensions pouvant être différentes afin d'adapter le comportement de la butée à la charge extérieure.

Le débit traversant chaque capillaire se donne par :

$$\begin{aligned} - \text{capillaire inférieur :} & \quad F_{ni} = \frac{\pi d_{ci}^4}{128} \cdot \frac{p_p - p_i}{\eta_v l_{ci}} = \frac{\Delta p_{ci}}{R_{ci}}, \\ - \text{capillaire supérieur :} & \quad F_{ns} = \frac{\pi d_{cs}^4}{128} \cdot \frac{p_p - p_s}{\eta_v l_{cs}} = \frac{\Delta p_{cs}}{R_{cs}}. \end{aligned} \quad (12.5.3)$$

avec :  $R_{ci}$  résistance hydraulique du capillaire inférieur,  
 $R_{cs}$  résistance hydraulique du capillaire supérieur.

Le débit total à travers les seuils intérieur et extérieur de chacune des butées se trouve par les relations :

$$\begin{aligned} - \text{butée inférieure :} & \quad \dot{V}_i = \frac{\pi h_i^3}{6 \eta_v} \cdot \left[ \frac{1}{\ln(r_{2ei} / r_{2ii})} + \frac{1}{\ln(r_{1ei} / r_{1ii})} \right] p_i = \frac{p_i}{R_{si}} = \frac{h_i^3}{C_{si}} \cdot p_i, \\ - \text{butée supérieure :} & \quad \dot{V}_s = \frac{\pi h_s^3}{6 \eta_v} \cdot \left[ \frac{1}{\ln(r_{2es} / r_{2is})} + \frac{1}{\ln(r_{1es} / r_{1is})} \right] p_s = \frac{p_s}{R_{ss}} = \frac{h_s^3}{C_{ss}} \cdot p_s, \end{aligned} \quad (12.5.4)$$

avec :  $h_i$  hauteur de la fente sur les seuils de la butée inférieure,  
 $h_s$  hauteur de la fente sur les seuils de la butée supérieure,  
 et :  $h_i + h_s = h_{0tot}$  .  
 $R_{si}$  résistance hydraulique des seuils de la butée inférieure, fonction de  $h_i$ ,  
 $R_{ss}$  résistance hydraulique des seuils de la butée supérieure, fonction de  $h_s$ .

Les résistances et constantes introduites pour simplifier l'écriture s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_{ci} &= \frac{128 \eta_v l_{ci}}{\pi d_{ci}^4}, & R_{cs} &= \frac{128 \eta_v l_{cs}}{\pi d_{cs}^4}, \\ R_{si} &= \frac{6 \eta_v}{\pi h_i^3 [1 / \ln(r_{2ei} / r_{2ii}) + 1 / \ln(r_{1ei} / r_{1ii})]}, & R_{ss} &= \frac{6 \eta_v}{\pi h_s^3 [1 / \ln(r_{2es} / r_{2is}) + 1 / \ln(r_{1es} / r_{1is})]}, \\ C_{si} &= \frac{6 \eta_v}{\pi [1 / \ln(r_{2ei} / r_{2ii}) + 1 / \ln(r_{1ei} / r_{1ii})]}, & C_{ss} &= \frac{6 \eta_v}{\pi [1 / \ln(r_{2es} / r_{2is}) + 1 / \ln(r_{1es} / r_{1is})]}. \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

La conservation des débits dans les deux butées impose les deux égalités :

$$\begin{aligned} & \quad \dot{V}_{ci} = \dot{V}_i \quad \text{et} \quad \dot{V}_{cs} = \dot{V}_s, \\ \text{ou encore :} & \quad \dot{V}_{ci} = \dot{V}_i \quad \Rightarrow \quad (p_p - p_i) / R_{ci} = (h_i^3 / C_{si}) \cdot p_i, \\ \text{et :} & \quad \dot{V}_{cs} = \dot{V}_s \quad \Rightarrow \quad (p_p - p_s) / R_{cs} = (h_s^3 / C_{ss}) \cdot p_s. \end{aligned}$$

Après simplification, les pressions dans les chambres annulaires s'expriment simplement par :

$$p_i = \frac{1}{1 + (R_{ci} / C_{si}) h_i^3} \cdot p_p.$$

## 12. Butées et paliers hydrostatiques

$$p_s = \frac{1}{1 + (R_{cs} / C_{ss}) h_s^3} \cdot p_p. \quad (12.5.6)$$

Ces expressions sont valables pour toute charge axiale et alimentation commune par une seule pompe, excepté dans la position pour laquelle la butée touche le pivot monté sur l'arbre.

### 12.2.4.3 BUTÉE SANS CHARGE AXIALE

Pour une butée à double effet sans charge axiale, l'équilibre de translation suivant l'axe de la butée se résume en :

$$\sum F_y = 0 : \quad F_{ni} - F_{ns} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ni} = F_{ns}.$$

Comme les deux butées ont mêmes dimensions géométriques, la pression dans la poche inférieure doit être égale à celle de la poche supérieure :

$$p_i = p_s.$$

En introduisant les résistances des capillaires et les constantes des seuils, il est possible d'écrire les rapports :

$$1 + (R_{ci} / C_{si}) \cdot h_{i0}^3 = 1 + (R_{cs} / C_{ss}) \cdot h_{s0}^3,$$

et en remarquant que  $C_{si} = C_{ss}$  si les dimensions géométriques et la position des seuils sont égales, alors :

$$\left( \frac{h_{i0}}{h_{s0}} \right)^3 = \frac{R_{cs}}{R_{ci}}, \quad (12.6.1)$$

avec :  $h_{i0} + h_{s0} = h_{0tot}$ .

Très souvent, les capillaires sont construits avec les mêmes diamètres, les longueurs sont ajustées au moyen d'un profil hélicoïdal taillé comme un filetage. Le rapport des hauteurs des deux fentes initiales dépend alors de la racine cubique des longueurs des capillaires.

### 12.2.4.4 COMPORTEMENT SOUS LA CHARGE AXIALE

Les relations générales sont applicables, soit l'équilibre de translation selon l'axe de la butée hydrostatique :

$$F_a = F_{ni} - F_{ns} = p_i A_i - p_s A_s = A (p_i - p_s).$$

En remplaçant les pressions inférieure et supérieure par leurs expressions, la force axiale en fonction des hauteurs de fente vaut :

$$F_a = A p_p \left[ \frac{1}{1 + (R_{ci} / C_{si}) h_i^3} + \frac{1}{1 + (R_{ci} / C_{ss}) h_s^3} \right].$$

avec :  $h_i = h_{i0} - \Delta h$  et  $h_s = h_{s0} + \Delta h$ . Ainsi :

$$F_{a(\Delta h)} = A p_p \left[ \frac{1}{1 + (R_{ci} / C_{si}) (h_{i0} - \Delta h)^3} + \frac{1}{1 + (R_{ci} / C_{ss}) (h_{i0} + \Delta h)^3} \right]. \quad (12.6.2)$$

pour :  $0 \leq \Delta h \leq h_{i0}$ .

La recherche du comportement de la butée consiste à varier la hauteur de la fente tout en maintenant les autres grandeurs constantes.

#### 12.2.4.5 PERTES DANS LA BUTÉE

Comme pour la butée simple effet, les pertes comprennent également les deux composantes :

- pertes sur les seuils intérieur et extérieur,
- pertes dans l'entraînement de la pompe et les conduites d'alimentation.

Ces puissances perdues se calculent par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{- pertes dans les seuils : } & P_{fr} = M_{fr} \omega = \frac{\pi \eta_v \omega^2}{2} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_s} \right) \left[ (r_{1e}^4 - r_{1i}^4) + (r_{2e}^4 - r_{2i}^4) \right]. \\
 \text{- pertes dans la pompe : } & P_P = (\dot{V}_{ci} + \dot{V}_{cs}) p_P (1/\eta_P). \\
 \text{- pertes totales : } & P_{totale} = P_{fr} + P_P = r \mu_e F_a \omega. \quad (12.6.3)
 \end{aligned}$$

Il est ainsi possible d'adapter toutes les grandeurs géométriques et oléohydrauliques de telle manière que le coefficient de frottement équivalent devienne minimal.

#### 12.2.5 EXEMPLE DE CALCUL D'UNE BUTÉE HYDROSTATIQUE

Cet exemple consiste à trouver le comportement d'une butée hydrostatique sollicitée par une force axiale pouvant varier de 0 à 100 kN, la fréquence de rotation étant comprise entre 5 et 25 t/s. La pression de la pompe d'alimentation est limitée à 100 bar et le rendement hydro-mécanique vaut 90%. Le lubrifiant est de l'huile ISO-VG 46 dont la température d'utilisation est 50°C, la masse volumique  $\rho_{15^\circ\text{C}} = 0,876 \text{ kg/dm}^3$ . L'étude doit porter sur les deux types de butées hydrostatiques à deux seuils : butée à simple effet et butée à double effet.

##### 12.2.5.1 DIMENSIONS DES SEUILS

Les dimensions géométriques adoptées pour les seuils sont :

- diamètre intérieur du seuil intérieur :  $d_{1i} = 240 \text{ mm}$ ,
- diamètre extérieur du seuil intérieur :  $d_{1e} = 250 \text{ mm}$ ,
- diamètre intérieur du seuil extérieur :  $d_{2i} = 290 \text{ mm}$ ,
- diamètre extérieur du seuil extérieur :  $d_{2e} = 300 \text{ mm}$ .

Aires des seuils

- aire du seuil intérieur :  $A_{si} = \pi (125^2 \text{ mm}^2 - 120^2 \text{ mm}^2) = 3848,5 \text{ mm}^2$ ,
- aire du seuil extérieur :  $A_{ss} = \pi (150^2 \text{ mm}^2 - 145^2 \text{ mm}^2) = 4633,9 \text{ mm}^2$ ,
- aire totale des seuils :  $A_{seuils} = A_{si} + A_{ss} = 8482,3 \text{ mm}^2$ .

Pression sur les seuils au repos et sous charge axiale nominale de 100 kN

- force appliquée :  $F_a = 100\,000 \text{ N}$ ,
- pression moyenne :  $p_{seuils} = F_a / A_{seuils} = 100\,000 \text{ N} / 8482,3 \text{ mm}^2 = 11,8 \text{ N/mm}^2$ .
- vitesse angulaire pour 25 t/s :  $\omega = 2 \pi n = 50 \pi \text{ s}^{-1}$ .

La pression calculée ne permet pas d'assurer un contact sans risque de grippage lors de la rotation de l'arbre et du pivot sur la butée sans présence du film porteur.

##### 12.2.5.2 BUTÉE HYDROSTATIQUE À DEUX SEUILS ET SIMPLE EFFET

Le contrôle de cette butée se sert des relations développées sous 12.2.2 .

Caractéristiques du fluide à la température d'utilisation de 50°C

- viscosité cinématique :  $\nu_{50^\circ\text{C}} = 30 \text{ mm}^2/\text{s}$ ,
- masse volumique (admis) :  $\rho_{50^\circ\text{C}} = 0,87 \text{ kg/dm}^3$ ,
- viscosité dynamique :  $\eta_v = 0,000030 \text{ m}^2/\text{s} \cdot 870 \text{ kg/m}^3 = 0,0261 \text{ Ns/m}^2$ .

Pression d'alimentation de la butée

- rayons moyens des seuils :  $r_{1m} = (120 \text{ mm} + 125 \text{ mm})/2 = 122,5 \text{ mm}$ ,  
 $r_{2m} = (145 \text{ mm} + 150 \text{ mm})/2 = 147,5 \text{ mm}$ ,



## 12. Butées et paliers hydrostatiques

- aire de calcul :  $A_m = \pi (147,5^2 \text{ mm}^2 - 122,5^2 \text{ mm}^2) = 21\,205,8 \text{ mm}^2$ ,
- pression dans la cavité annulaire :  $p_i = 100\,000 \text{ N}/21\,205,8 \text{ mm}^2 = 4,72 \text{ N/mm}^2$ .

### Pertes dans la butée

La détermination des pertes dans la butée, seuils et pompe, introduit les dimensions en unités homogènes, soit le mètre, le kilogramme et la seconde.

Les pertes dans les seuils sont :

- moment provoqué par le cisaillement :  $M_{fr} = \frac{1}{2} \pi \eta_v \omega [(r_{1e}^4 - r_{1i}^4) + (r_{2e}^4 - r_{2i}^4)]/h_0$ ,
- soit :  $M_{fr} = \frac{1}{2} \pi 0,0261 \text{ Ns/m}^2 50 \pi \text{ s}^{-1} [(0,125^4 - 0,120^4) + (0,150^4 - 0,145^4)] \text{ m}^4/h_0 =$   
 $M_{fr} = 0,0006503/h_0$ .

- puissance perdue dans les seuils :  $P_{fr} = M_{fr} \omega = 0,10214/h_0$ .

La butée n'est pas équipée d'un capillaire d'entrée dans la chambre annulaire. Les pertes dans la pompe tiennent compte seulement du rendement total de cet organe.

- débit de la pompe d'alimentation :  $\dot{V} = \pi p_i / (6 \eta_v) [1/\ln(r_{2e}/r_{2i}) + 1/\ln(r_{1e}/r_{1i})] \cdot h_0^3$ ,
- soit :  $\dot{V} = \pi 4\,715\,691 \text{ N/m}^2 / (6 \cdot 0,0261 \text{ Ns/m}^2) [1/\ln(150/145) + 1/\ln(125/120)] \cdot h_0^3$   
 $\dot{V} = 5\,108\,10^6 \cdot h_0^3$ .

- puissance d'entraînement :  $P_{pompe} = \dot{V} p_i / \eta_p = 26,764 \cdot 10^{12} \cdot h_0^3$ .

Pertes totales :  $P_{totale} = P_{fr} + P_{pompe} = 0,10214/h_0 + 26,764 \cdot 10^{12} \cdot h_0^3$ .

Le tableau suivant donne les résultats du calcul des diverses puissances ainsi que du débit et du coefficient de frottement équivalent pour des hauteurs de fente comprises entre 0,0001 mm et 0,060 mm.

### Butée hydrostatique à double seuil et simple effet

#### Résultats du calcul

No	h mm	Débit cm <sup>3</sup> /s	M <sub>fr</sub> m*N	P <sub>seuil</sub> W	P <sub>pompe</sub> W	P <sub>totale</sub> W	μ <sub>e</sub> --
0	0.0001	0.0	6503.0	1021493.3	0.0	1021493.2	0.4817
1	0.0040	0.3	162.6	25537.3	1.7	25539.0	0.0120
2	0.0080	2.6	81.3	12768.7	13.7	12782.3	0.0060
3	0.0120	8.8	54.2	8512.4	46.2	8558.6	0.0040
4	0.0160	20.9	40.6	6384.3	109.6	6493.9	0.0031
5	0.0200	40.9	32.5	5107.5	214.1	5321.5	0.0025
6	0.0240	70.6	27.1	4256.2	370.0	4626.2	0.0022
7	0.0280	112.1	23.2	3648.2	587.5	4235.7	0.0020
8	0.0320	167.4	20.3	3192.2	877.0	4069.1	0.0019
9	0.0360	238.3	18.1	2837.5	1248.7	4086.1	0.0019
10	0.0400	326.9	16.3	2553.7	1712.9	4266.6	0.0020
11	0.0440	435.1	14.8	2321.6	2279.9	4601.4	0.0022
12	0.0480	564.9	13.5	2128.1	2959.9	5088.0	0.0024
13	0.0520	718.2	12.5	1964.4	3763.2	5727.6	0.0027
14	0.0560	897.0	11.6	1824.1	4700.2	6524.2	0.0031
15	0.0600	1103.3	10.8	1702.5	5781.0	7483.5	0.0035

Ce tableau permet de trouver le débit à prévoir pour la pompe d'alimentation de telle manière que la puissance perdue totale soit minimale. La hauteur de la fente serait 0,032 mm et le débit correspondant de la pompe 167,4 cm<sup>3</sup>/s ou pratiquement 10 l/min. La perte totale est environ 4 kW et le coefficient de frottement équivalent vaut μ<sub>e</sub> = 1,9 ‰. Il serait intéressant d'étudier le comportement de la butée à fréquence de rotation et à charge axiale variables, le débit de la pompe étant maintenu constant.

#### 12.2.5.3 BUTÉE HYDROSTATIQUE À DEUX SEUILS ET DOUBLE EFFET

Cette butée présente les mêmes dimensions géométriques que la butée simple effet et les caractéristiques du fluide sont les mêmes. Le contrôle de cette butée se sert des relations développées

précédemment. Le nombre de paramètres à choisir dans la conception de cet organe est élevé pour trouver le point optimal.

Dimensions particulières utilisées dans cette butée double effet

- capillaire de la butée inférieure :  $d_{ci} = 1,5 \text{ mm}$ ,  $l_{ci} = 20 \text{ mm}$ ,
- capillaire de la butée supérieure :  $d_{cs} = 1,25 \text{ mm}$ ,  $l_{cs} = 80 \text{ mm}$ ,
- pression produite par la pompe :  $p_p = 60 \text{ bar} = 6\,000\,000 \text{ N/m}^2$ ,
- constantes des butées :  $C_{si} = 6 \eta_v / \{ \pi [1/\ln(r_{2e}/r_{2i}) + 1/\ln(r_{1e}/r_{1i})] \}$ ,  
 $C_{si} = C_{ss} = 0,000\,9232 \text{ Ns/m}^2$ ,
- résistance des capillaires :  $R_{ci} = 4,201 \cdot 10^9$   $R_{cs} = 34,85 \cdot 10^9$
- résistance des seuils :  $R_{si} = C_{si} / h_i^3$   $R_{ss} = C_{ss} / h_s^3$ ,
- somme des hauteurs des fentes :  $h_{tot} = h_{s0} + h_{i0} = h_s + h_i = 0,1 \text{ mm}$ , (valeur admise)

Conditions d'équilibre sans force axiale extérieure

- hauteur initiales des fentes sur les seuils :  $(R_{ci}/C_{si}) h_i^3 = (R_{cs}/C_{ss}) h_s^3$ ,  
 $(h_i/h_s)^3 = 34,85 \cdot 10^9 / 4,201 \cdot 10^9 = 8,296 \Rightarrow h_i/h_s = 2,024$ .  
 $h_i = 0,0669 \text{ mm}$   $h_s = 0,0331 \text{ mm}$ .
- pression dans les poches :  $p_i = 1/[1 + (4,201 \cdot 10^9 / 9,232 \cdot 10^4) \cdot 0,0000669^3] \cdot 6 \cdot 10^6 = 2,54 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  
 $p_s = 1/[1 + (34,85 \cdot 10^9 / 9,232 \cdot 10^4) \cdot 0,0000331^3] \cdot 6 \cdot 10^6 = 2,53 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ .
- poussée ( $p_i = p_s = 2,537 \text{ N/mm}^2$ ) :  $F_{ni} = F_{ns} = 2,537 \text{ N/mm}^2 \cdot 21205,8 \text{ mm}^2 = 53\,808 \text{ N}$ .
- poussée résultante :  $F_a = 0$ .

#### Butée hydrostatique à double seuil et double effet

##### Résultats du calcul : hauteurs et forces

No	$h_i$ mm	$h_s$ mm	$\Delta h$ mm	$p_i$ N/mm <sup>2</sup>	$p_s$ N/mm <sup>2</sup>	$F_{ni}$ N	$F_{ns}$ N	$F_a$ N
20	0.0669	0.0331	0.0000	2.54	2.54	53808	53808	0
18	0.0602	0.0398	0.0067	3.01	1.78	63783	37729	26055
16	0.0535	0.0465	0.0134	3.53	1.25	74902	26599	48304
14	0.0469	0.0531	0.0201	4.09	0.90	86669	19087	67581
12	0.0402	0.0598	0.0268	4.63	0.66	98269	14001	84268
11	0.0368	0.0632	0.0301	4.89	0.57	103693	12092	91600
10	0.0335	0.0665	0.0335	5.13	0.50	108694	10501	98193
9	0.0301	0.0699	0.0368	5.34	0.43	113163	9167	103996
8	0.0268	0.0732	0.0402	5.52	0.38	117015	8042	108973
6	0.0201	0.0799	0.0469	5.79	0.30	122713	6278	116435
4	0.0134	0.0866	0.0535	5.94	0.24	125861	4985	120876
2	0.0067	0.0933	0.0602	5.99	0.19	127061	4019	123042
0	0.0001	0.0999	0.0668	6.00	0.16	127235	3294	123941

#### Butée hydrostatique à double seuil et double effet

##### Résultats du calcul : débits, puissances, frottement

No	$\dot{V}_i$ cm <sup>3</sup> /s	$\dot{V}_s$ cm <sup>3</sup> /s	$\dot{V}$ cm <sup>3</sup> /s	$P_{seuils}$ W	$P_{pompe}$ W	$P_{totale}$ W	$\mu_e$ --
20	824.201	99.368	923.569	4615	6157	10772	>1.0000
18	712.230	121.128	833.358	4265	5556	9821	0.0178
16	587.422	136.191	723.613	4107	4824	8931	0.0087
14	455.346	146.356	601.702	4102	4011	8114	0.0057
12	325.130	153.240	478.370	4251	3189	7440	0.0042
11	264.254	155.822	420.076	4391	2801	7192	0.0037
10	208.114	157.976	366.090	4588	2441	7028	0.0034
9	157.952	159.781	317.734	4853	2118	6971	0.0032
8	114.711	161.303	276.015	5210	1840	7050	0.0031

## 12. Butées et paliers hydrostatiques

6	50.750	163.691	214.442	6365	1430	7795	0.0032
4	15.423	165.441	180.864	8810	1206	10016	0.0039
2	1.946	166.749	168.695	16356	1125	17481	0.0067
0	0.000	167.730	167.730	1022516	1118	1023634	0.3895

Conditions d'équilibre sous la charge axiale nominale  $F_a = 100$  kN

Les tableaux précédents donnent le résultat du calcul des caractéristiques de la butée en déplaçant l'arbre de  $\Delta h$  jusqu'à ce que la hauteur du film sur la butée inférieure soit 0,0001 mm. La figure 12.8 montre l'évolution des poussées engendrées par les deux butées et la force extérieure en fonction du déplacement du pivot.

Sous la charge  $F_a = 100$  kN et par interpolation dans le tableau entre les points numéro 10 et 9, le comportement de la butée est :

- hauteur du film sur la butée inférieure :  $h_i = 0,0324$  mm,  
(correspond approximativement à la hauteur dans la butée simple effet)
- hauteur du film sur la butée supérieure :  $h_s = 0,0676$  mm,
- pression dans la poche inférieure :  $p_i = 5,196$  N/mm<sup>2</sup>       $F_{ni} = 110\,180$  N,
- pression dans la poche supérieure :  $p_s = 0,4739$  N/mm<sup>2</sup>       $F^{ns} = 10\,050$  N,
- force axiale extérieure calculée :  $F_a = 100\,130$  N,
- débits dans les poches :  $V_i = 192,5$  cm<sup>3</sup>/s       $V_s = 158,5$  cm<sup>3</sup>/s,
- débit total et puissance de la pompe :  $V = 351$  cm<sup>3</sup>/s       $P_{pompe} = 2340$  W ,
- puissance perdue par cisaillement :  $P_{seuils} = 4670$  W,
- puissance perdue totale :  $P_{totale} = 7010$  W,
- coefficient de frottement équivalent :  $\mu_e = 7010 \text{ W} / (50 \pi \text{ s}^{-1} \cdot 100130 \text{ N} \cdot 0,135 \text{ m}) = 0,0033$ .

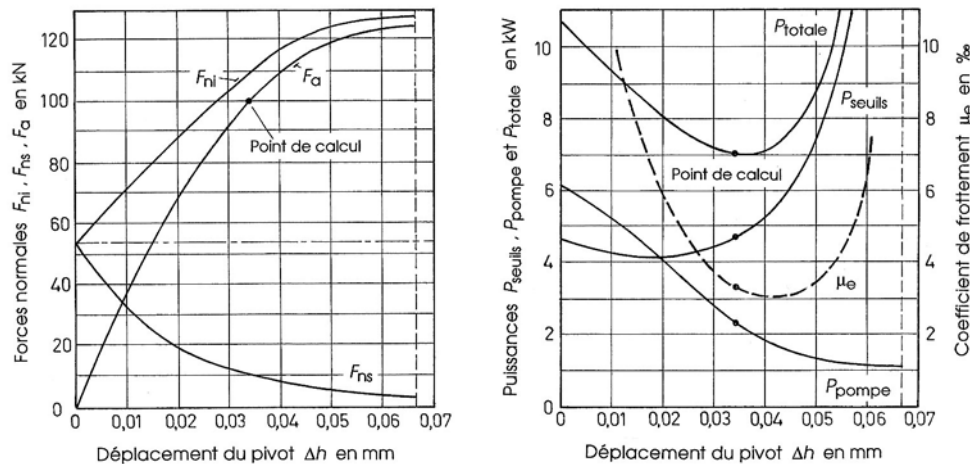


Figure 12.8 Comportement de la butée hydrostatique à double effet :  
Forces normales et extérieure    Puissances perdues, coefficient de frottement

### Remarques complémentaires

Le choix des capillaires et de la pression de la pompe s'est effectué d'une manière arbitraire. En adoptant d'autres valeurs, il est possible d'améliorer encore le coefficient de frottement équivalent et finalement de diminuer les pertes de puissance. La recherche du comportement global devrait comprendre :

1. une variation des caractéristiques des capillaires d'entrée dans les deux poches, éventuellement un partage des écoulements entre plusieurs canaux en parallèle,
2. une variation de la hauteur totale des deux films de fluide,
3. un contrôle de l'hypothèse d'un écoulement laminaire dans les capillaires et les seuils au moyen du nombre de Reynolds :

- pour les tubes et canalisations équivalentes :  $Re = v d/v_v$  avec  $Re < 2320$ ;

- pour les fentes et seuils :

$$Re = \nu h/\nu_v \quad \text{avec } Re < 1000.$$

4. la recherche de la variation de température dans le fluide en tenant compte des conditions de transmission de chaleur (calcul thermohydrostatique),
5. un contrôle des déformations mécaniques des diverses pièces afin de s'assurer qu'aucun contact mécanique n'est à craindre en marche sous charge,
6. la recherche des conditions optimales de fonctionnement.

## 12.3 BUTÉE HYDROSTATIQUE À PLUSIEURS POCHE

La discussion du comportement des butées et patins de guidage fait ressortir la nécessité de maintenir une fente de quelques centièmes de mm sur les seuils. Si les butées doivent supporter des charges importantes, les dimensions de la butée et du pivot augmentent en conséquence et des problèmes de fabrication détériorent les capacités portantes de ces appuis. Il en va de même s'il n'est pas possible d'assurer un parallélisme parfait entre les surfaces fixe et mobile. La butée hydrostatique à plusieurs poches résout partiellement ce genre de problème.

### 12.3.1 CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES

La butée hydrostatique circulaire à poches est constituée d'une partie fixe et d'un pivot mobile en rotation autour de son axe. L'arbre est chargé axialement par une force et l'appui possède plusieurs poches, alimentées chacune à travers un capillaire. Chaque poches peut posséder une pression différente en fonction du défaut de parallélisme entre la face de l'appui et celle du pivot. Les poches sont séparées les unes des autres par des seuils tangentiels. Des seuils radiaux isolent les poches du milieu ambiant. Chaque capillaire constitue une résistance réglable dans l'amenée du fluide vers les poches. Le réglage de ces capillaires a pour but d'adapter les pressions aux charges à supporter par chaque poche.

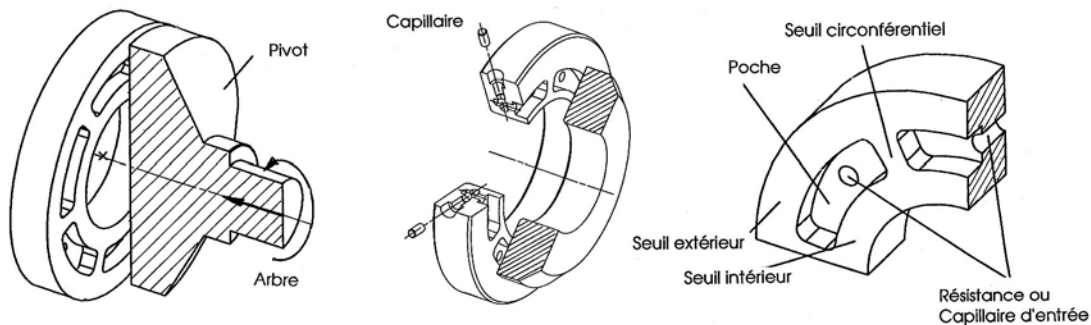


Figure 12.9 Forme de la butée à poches et détail de l'alimentation des poches

La butée hydrostatique à plusieurs poches permet de supporter un arbre en rotation soumis à l'action d'une force axiale dans le sens de la butée et d'atteindre des conditions favorables de fonctionnement en compensant quelques défauts d'alignement.

### 12.3.2 MISE EN ÉQUATION DE LA BUTÉE

L'étude de la butée à poches introduit un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dans la recherche de l'équilibre, des écoulements et des pertes :

1. le fluide visqueux obéit à la loi des liquides newtoniens. Sous l'effet d'une différence de pression, l'écoulement reste laminaire et obéit à la loi de Hagen-Poiseuille;
2. la viscosité et la masse volumique du fluide restent invariables pendant le fonctionnement de la butée. Le fluide est incompressible.
3. Les effets centrifuge et hydrodynamique sur le fluide sont négligés.

La mise en équation de la butée circulaire à poches est semblable à celle concernant le palier radial à seuils lisses, voir les sous-chapitre suivants. Ici, l'exposé se résume à la présentation du principe de la recherche des pressions dans les diverses poches, des écoulements entre les poches et vers l'extérieur ainsi que les diverses pertes.

### 1. Épaisseur du film entre la butée et le pivot

Les symboles utilisés dans cette butée sont semblables à ceux de la butée à deux seuils et chambre annulaire, soit :

- |                            |                          |                                   |
|----------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| - dimensions de la butée : | $R_i$ rayon intérieur    | $R_e$ rayon extérieur,            |
| - dimensions des poches :  | $r_{li}$ rayon intérieur | $r_{le}$ rayon extérieur ,        |
| - valeur des angles :      | $\Psi$ pas angulaire     | $\psi$ angle de poche ,           |
| - capillaire :             | $d_c$ diamètre           | $l_c$ longueur ,                  |
| - position du pivot :      | $e$ excentricité         | $h_0$ épaisseur minimale du film, |
| - pressions :              | $p_p$ pompe              | $p_0$ extérieure à la butée.      |

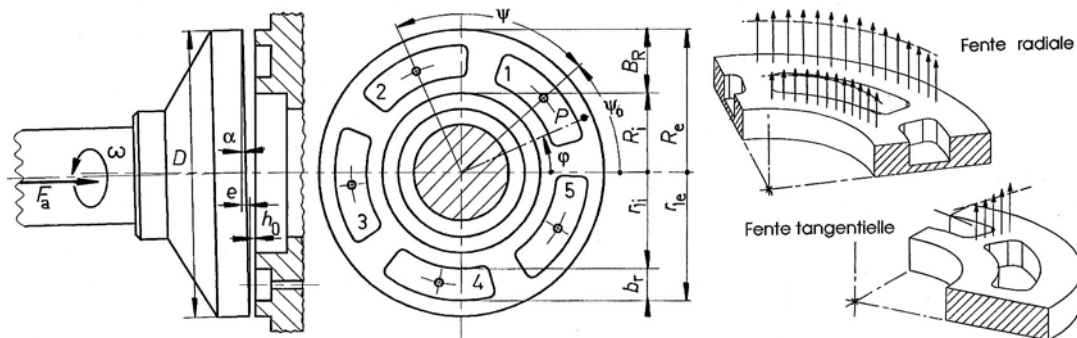


Figure 12.10 Dimensions géométriques de la butée et épaisseurs du film sur les poches

L'inclinaison du pivot par rapport à la butée est  $\alpha$  avec  $\tan \alpha = e/(2 R_e)$ . En un point  $P$  placé au rayon  $r$  sur le pivot, repéré angulairement par  $\phi$ , l'épaisseur du film correspond à la hauteur  $h$  calculable par :

$$h = h_0 + \frac{1}{2} e + r \sin \phi \tan \alpha = h_0 + \frac{1}{2} e [1 + (r/R_e) \sin \phi]. \quad (12.7.1)$$

L'ordre de décalage des poches est désigné par  $j$  et l'angle définissant le milieu de la poche par  $\psi_j$  se trouve par :

$$\psi_j = \psi_0 + (2 \pi/n)(j - 1) .$$

### 2. Hauteur moyenne des fentes

Pour déterminer les divers écoulements dans la butée, il est nécessaire de trouver les aires de passage sur les divers seuils. Afin de faciliter la recherche de ces dimensions, la hauteur moyenne  $h_{jm}$  correspond à l'épaisseur moyenne du film, cette moyenne étant déterminée de telle sorte que le débit corresponde exactement au débit réel dans chaque fente. Cette hauteur moyenne se calcule pour :

- |  |               |             |
|--|---------------|-------------|
| - le seuil radial extérieur entre les rayons $r_{le}$ et $R_e$ | $\Rightarrow$ | $h_{jme},$  |
| - le seuil radial intérieur entre les rayons $r_{li}$ et $R_i$ | $\Rightarrow$ | $h_{jmi} ,$ |

- le seuil tangentiel entre chaque poche j et la poche suivante j+1  $\Rightarrow h_{jms}$ .

Ces hauteurs tiennent compte de la loi d'écoulement de Hagen-Poiseuille et de la position angulaire de chaque seuil.

### 12.3.3 DÉBITS DANS LA BUTÉE

#### 1. Débit dans le capillaires

Les capillaires sont assimilés à des tubes de section circulaire, diamètre  $d_{cj}$ , longueur  $l_{cj}$ , alimentés en fluide sous la pression  $p_{pj}$ . La relation de Poiseuille permet de trouver le débit entrant dans chaque poche à travers le capillaire :

$$\dot{V}_{cj} = \frac{\pi d_{cj}^4}{128 \eta_v l_{cj}} \cdot \frac{\Delta p_j}{l_{cj}} = \frac{\pi d_{cj}^4}{128 \eta_v l_{cj}} \cdot \frac{p_{pj} - p_j}{l_{cj}}. \quad (12.7.2)$$

avec :  $\Delta p_j = p_{pj} - p_j$ ,  
 $p_j$  pression dans la poche j .

#### 2. Débit dans les seuils radiaux

Le débit du fluide dans les seuils radiaux, vers l'extérieur et vers l'intérieur de la butée est dû à la différence de pression entre la poche et le milieu ambiant. Ce débit s'exprime par la relation de Hagen-Poiseuille :

$$\dot{V}_{rj(e,i)} = \frac{b_{r(e,i)} h_{jm(e,i)}^3}{12 \eta_v} \cdot \frac{dp}{dr}. \quad (12.7.3)$$

avec :  $dp$  variation élémentaire de pression,  
 $dr$  variation élémentaire de rayon,  
 $b_{r(e,i)}$  largeur de calcul de la fente,  
 $h_{jm(e,i)}$  hauteur moyenne de la fente,

#### 3. Débit dans les seuils tangentiels

Le débit dans les seuils circonférentiels possède deux composantes : la première provoquée par la différence de pression entre deux poches voisines, la seconde par l'entraînement du fluide par le déplacement du pivot sur la butée. Il est admis que la largeur de passage est  $b_r = r_{1e} - r_{1i}$ . Le débit total s'exprime par :

$$\dot{V}_{sj} = \frac{b_r h_{jms}^3}{12 \eta_v} \cdot \frac{p_j - p_{j+1}}{l_{sj}} + \frac{1}{4} \omega h_{jms} (r_e^2 - r_i^2). \quad (12.7.4)$$

#### 4. Conservation des débits

La somme des débits alimentant chaque poche doit être égale à la somme des débits qui s'échappent de la poche :

$$\Sigma \dot{V}_j = \dot{V}_{cj} + \dot{V}_{sj-1} - \dot{V}_{rje} - \dot{V}_{rji} - \dot{V}_{sj} = 0. \quad (12.7.5)$$

En posant pour chaque poche une relation analogue et en introduisant dans les expressions les pressions dans chaque poche, le système d'équations se résume en :

$$\begin{aligned} a_{11} p_1 + a_{12} p_2 &+ a_{1n} p_n = b_1, \\ a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + a_{23} p_3 &= b_2, \\ a_{32} p_2 + a_{33} p_3 + a_{34} p_4 &= b_3, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ a_{n,n-1} p_{n-1} + a_{nn} p_n &= b_n. \end{aligned}$$

La solution de ce système d'équations linéaires donne les pressions dans toutes les poches de la butée hydrostatique en fonction des dimensions et pressions connues.

### 12.3.4 POUSSEES D'UNE POCHE ET DE LA BUTÉE

La poussée sur le pivot dans le domaine d'action d'une poche est la somme des poussées élémentaires. On simplifie le calcul en introduisant la surface annulaire partielle  $A_m$  définie par le pas des poches :

$$F_{nj} = (p_j - p_0) A_m.$$

La poussée totale est égale à la somme des poussées engendrées par chaque poche, soit :

$$F_n = \sum F_{nj} = F_a.$$

Généralement, cette poussée résultante est excentrée.

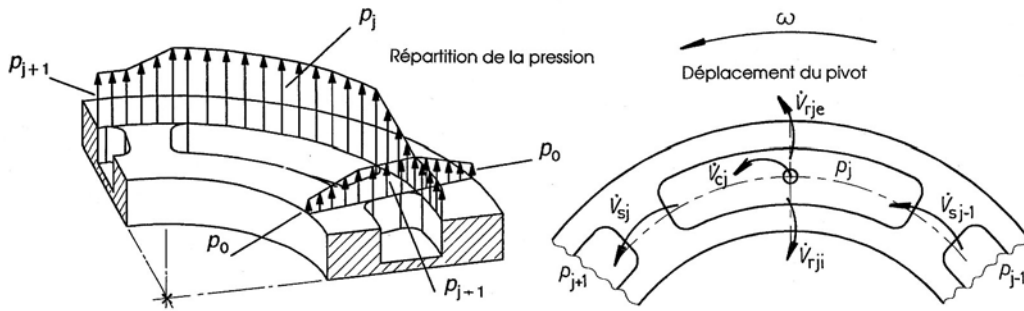


Figure 12.11 Répartition de la pression et aire de poussée engendrée par une poche

### 12.3.5 PERTES DANS LA BUTÉE

Les pertes dans la butée proviennent du cisaillement du film porteur par la rotation du pivot, par l'écoulement entre les poches et par l'énergie à fournir à la pompe pour maintenir le débit de fluide. Les puissances partielles et totale perdues se trouvent par :

- seuils radiaux : 
$$P_{fr,s} = \sum_{j=1}^n \omega^2 \eta_v \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{R_e^4 - r_{ie}^4}{h_{jme}} + \frac{r_{li}^4 - R_i^4}{h_{jmi}} \right]. \quad (12.8.1)$$

- seuils tangentiels : 
$$P_{fr,t} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4} \omega^2 \frac{\eta_v}{h_{jms}} (r_{ie} + r_{li})^2 (r_{ie} - r_{li}) l_{jt}. \quad (12.8.2)$$

- entre les poches : 
$$P_{fr,p} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4} \omega h_{jms} (p_j - p_{j+1}) (r_{ie}^2 - r_{li}^2). \quad (12.8.3)$$

- totales : 
$$P_{tot} = P_{fr,s} + P_{fr,t} + P_{fr,p} = r_{moyen} \mu_e F_a \omega, \quad (12.8.4)$$

avec :  $r_{moyen} = (R_e + R_i)/2$ .

Il est également possible d'adapter les divers paramètres géométriques et oléohydrauliques afin d'obtenir des conditions optimales d'utilisation.

## 12.4 PALIERS RADIAUX HYDROSTATIQUES

Contrairement au palier hydrodynamique dont la capacité portante est fonction essentiellement de la vitesse relative des surfaces de l'arbre et du coussinet, le palier hydrostatique présente une capacité de charge obtenue par la présence d'un fluide sous pression dans des poches qui séparent entièrement les surfaces de glissement. Le palier hydrostatique porte aussi le nom de palier fluide.

### 12.4.1 TYPES DE PALIERS HYDROSTATIQUES

Dans le palier radial hydrostatique, la formation de la pression ne dépend pas seulement du mouvement de l'arbre dans le coussinet; elle est engendrée principalement par l'action d'un fluide sous pression provenant d'une pompe volumétrique extérieure au palier. Pour un palier à quatre poches, la répartition de la pression dans le coussinet est donnée sur la figure 12.12. Chaque poche est délimitée par deux seuils dont la distance à l'arbre dépend directement de l'excentricité des deux composants du palier. Pour un arbre parfaitement centré, la pression dans chaque poche se définit par les conditions d'écoulement à travers la résistance d'entrée et les seuils. Le fluide alimente les diverses chambres et s'écoule librement aux extrémités du coussinet vers l'extérieur. Si les conditions d'écoulement et d'alimentation sont les mêmes depuis la pompe, les pressions dans chaque poche sont les mêmes lorsque l'excentricité est nulle quelle que soit la fréquence de rotation de l'arbre.

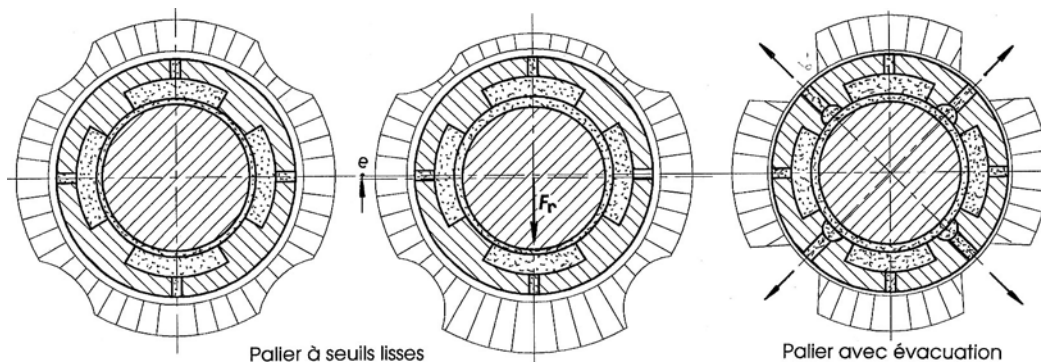


Figure 12.12 Paliers radiaux hydrostatiques, à seuils lisses sans et avec charge, avec canaux d'évacuation

Sous l'effet d'une charge radiale extérieure, l'arbre quitte la position centrée et a tendance à se déplacer dans la direction de la force. La section d'écoulement du fluide augmente dans la chambre opposée à l'action de la force, diminue dans la poche située dans le sens de la force. Il s'ensuit une augmentation de la pression dans l'une des poches car la section axiale d'écoulement se rétrécit sous l'effet de l'excentricité, une diminution de pression dans la poche diamétralement opposée. La différence des pressions provoque une poussée résultante opposée à la charge radiale extérieure et a tendance à centrer l'arbre dans le coussinet.

Il existe principalement deux types de palier radial hydrostatique :

1. Palier radial hydrostatique à seuils lisses, figure 12.12 à gauche : les diverses poches du coussinet sont séparées les unes des autres par des seuils lisses. Lorsque l'arbre tourne, la surface de l'arbre entraîne une partie du fluide d'une chambre à l'autre. L'arbre joue le rôle de pompe à viscosité.
2. Palier radial hydrostatique avec canaux d'évacuation, figure 12.12 à droite : les seuils entre deux chambres sont séparés en deux parties lisses, un canal d'évacuation du fluide



séparant les deux surfaces. La pression dans les poches et sur les seuils dépend seulement de l'excentricité de l'arbre.

Le second type de palier radial présente un certain avantage lorsqu'il s'agit d'alimenter chaque poche séparément et de calculer les poussées partielles de chaque chambre sur l'arbre. Il s'introduit lorsqu'un débit important est désiré à travers le guidage ou lorsque la vitesse circonférentielle est élevée. Ce chapitre traite le palier à seuils lisses sans canaux d'évacuation.

### 12.4.2 ÉPAISSEUR DU FILM DE FLUIDE

Le palier radial hydrostatique sans canaux d'évacuation de fluide présente normalement une rigidité plus élevée que le palier muni de canalisations intermédiaires d'évacuation.

#### 12.4.2.1 HYPOTHÈSES, GRANDEURS ET SYMBOLES GÉNÉRAUX

Pour calculer les conditions de fonctionnement, il est nécessaire d'introduire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dans la recherche du modèle de calcul. Ce sont principalement :

1. l'axe de l'arbre et l'axe du coussinet restent parallèles et rectilignes quelle que soit la charge radiale sur l'arbre et les pressions dans les poches.
2. l'écoulement du fluide entre l'arbre et le coussinet s'effectue seulement dans le sens tangentiel ou dans le sens axial. L'écoulement combiné dans les coins est négligé.
3. le fluide est visqueux et obéit à la loi énoncée par Newton. Sous l'effet d'une différence de pression, l'écoulement dans les fentes et les canalisations reste laminaire et obéit aux relations développées par Hagen et Poiseuille.
4. la viscosité et la masse volumique du fluide restent invariables pendant le passage dans le palier. Le fluide est incompressible.

L'exposé de la mise en équation du palier radial à seuils lisses est basé sur les développements proposés par H. Peecken. Le principe de l'étude consiste à admettre un déplacement de l'arbre dans le coussinet et à rechercher les pressions et poussées dans les poches ainsi que les pertes dans le palier. À partir d'un système de référence  $Oxy$  visible sur la figure 12.13, il est possible d'exprimer l'épaisseur du film en fonction de l'excentricité  $e$  du centre de l'arbre cylindrique par rapport au centre du coussinet et de la position angulaire  $\varphi$  de la section de calcul. L'arbre tourne dans le coussinet dans le sens positif à vitesse angulaire et charge radiale constantes.

Désignons par :

$r = 0,5 d$	le rayon de l'arbre,
$R = 0,5 D$	le rayon de l'alésage dans le coussinet au niveau des seuils,
$s = R - r$	le jeu radial du palier,
$\psi = s/R$	le jeu relatif du palier, environ 1 ‰.
$e$	l'excentricité de l'arbre, distance entre les centres de l'arbre et du coussinet,
$\Phi_e$	l'angle entre le système de référence $Oxy$ et la direction du déplacement du centre de l'arbre par rapport au centre du coussinet,
$\Phi_0$	position angulaire du premier seuil,
$\Phi_p$	pas angulaire entre deux poches successives,
$\Phi_F$	position angulaire de la force radiale sur l'arbre, la direction étant généralement différente de celle de l'excentricité,
$F_r$	force radiale sur l'arbre,
$\omega$	vitesse angulaire de l'arbre par rapport au coussinet,

$v_u = \omega r$	vitesse circonférentielle de l'arbre,
$B$	la largeur du coussinet,
$b$	la largeur de la poche,
$\varepsilon = e/s$	l'excentricité relative de l'arbre dans le coussinet,
$n$	le nombre de poches,
$\varphi$	l'angle positionnant une section transversale quelconque en étude située entre deux cylindres,
$h$	hauteur de la fente entre les cylindres de l'arbre et du coussinet,
$d_{cj}$	le diamètre du capillaire de la poche $j$ ,
$l_{cj}$	la longueur du capillaire de la poche $j$ .

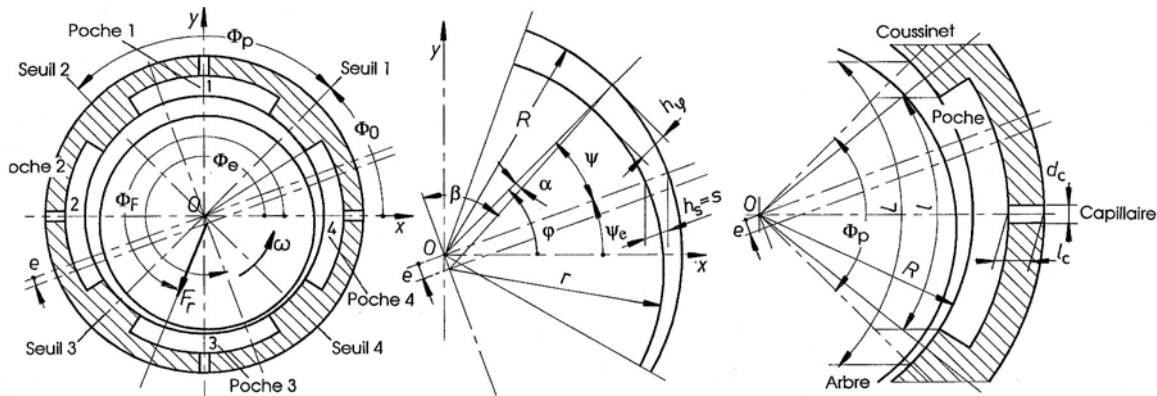


Figure 12.13 Grandeurs géométriques d'un palier hydrostatique à quatre poches et seuils lisses

#### 12.4.2.2 DIMENSIONS COMPLÉMENTAIRES DANS LE COUSSINET

Afin de faciliter la mise en équation du système, introduisons les notations suivantes pour un coussinet à  $n$  poches identiques :

1. Pas angulaire entre deux poches :  $\Phi_p = 2 \pi / n$ ,  
Arc d'une poche :  $L = \Phi_p R = \pi D n$ .
2. Longueur tangentielle de la poche :  $l$ ,  
Rapport des arcs :  $\kappa = l / L \Rightarrow l = \kappa L = \kappa \pi D / n$ ,  
 $\kappa$  est la paramètre de longueur de poche.
3. Rapport géométrique des largeurs :  $\beta = B / D \Rightarrow B = \beta D$ .  
Ce rapport est compris généralement entre 0,6 et 1,0.
4. Largeur moyenne de la poche dans le sens axial : la largeur de la poche étant  $b$  et celle du coussinet  $B$ , le rapport des largeurs est :

$$\begin{aligned} \nu &= b / B \Rightarrow b = \nu B, \\ \text{Largeur moyenne : } b_m &= (B + b) / 2 = \frac{1}{2} B (1 + \nu). \end{aligned}$$

#### 12.4.2.3 HAUTEUR DES FENTES ENTRE LE COUSSINET ET L'ARBRE

La figure 12.13 représente un palier à quatre poches. Les relations sont applicables à tout coussinet à  $n$  poches à pas angulaire constant. Pour une position quelconque de la section transversale, l'épaisseur du fluide  $h$  entre l'arbre et le coussinet peut se trouver par la relation :

$$h_\varphi = s [1 + \varepsilon \sin(\varphi - \psi_e)], \quad (12.9.1)$$

car la hauteur de la fente sur l'axe perpendiculaire à la ligne d'action de la force radiale, incliné de l'angle  $\psi_e$  par rapport à  $O x$ , est égale au jeu radial  $h_s = s$ . Pour une position

quelconque de la fente, repérée par l'angle  $\varphi = \psi_e + \psi$ , et par projection sur la direction du rayon  $r$ , il est possible d'écrire :

$$h_\varphi = R \cos\alpha + e \cos\beta - r,$$

avec :  $e/\sin\alpha = R/\sin\beta \Rightarrow \sin\alpha = (e/R) \sin\beta$ ,  
 et :  $\cos\alpha = \{1 - [(e/R) \sin\beta]^2\}^{0,5} \approx 1$  car  $e/R \approx 1,0$ .

$$h_\varphi = R - r + e \cos\beta \approx s + e \sin\psi = s (1 + \varepsilon \sin\psi),$$

et finalement : 
$$h_\varphi = s [1 + \varepsilon \sin(\varphi - \psi_e)].$$

#### 12.4.2.4 POSITIONS ANGULAIRES ET HAUTEURS PARTICULIÈRES

Les seuils et poches sont comptés positivement dans le sens mathématique et le premier seuil, numéroté 1, est repéré par l'angle  $\Phi_0$ . Si j désigne le numéro d'ordre de la poche, la position angulaire du seuil j, pour  $j = 1 \dots n$ , est donnée par :

$$\varphi_{sj} = \Phi_0 + 2\pi (j - 1)/n, \quad (12.9.2)$$

et l'épaisseur du film au milieu du seuil j se calcule par :

$$h_{msj} = s [1 + \varepsilon \sin(\varphi_{sj} - \psi_e)],$$

ou en valeur relative : 
$$h_{msj}/s = 1 + \varepsilon \sin(\varphi_{sj} - \psi_e). \quad (12.9.3)$$

Le calcul des poussées sur l'arbre créées par la pression dans chaque poche fait intervenir l'angle  $\varphi_{mpj}$  définissant le milieu de la poche j :

$$\varphi_{mpj} = \Phi_0 + \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}(j-1). \quad (12.9.4)$$

et la hauteur relative par : 
$$\frac{h_{mpj}}{s} = 1 + \varepsilon \sin(\varphi_{mpj} - \psi_e).$$

#### 12.4.3 HAUTEUR DES FENTES DE CALCUL

Le calcul des écoulements dans les directions tangentielle et axiales utilise les relations de Hagen-Poiseuille et de Newton. Comme l'épaisseur des fentes est variable, il est plus facile d'exprimer les débits au moyen d'une fente équivalente à hauteur constante, donc rectangulaire. Les relations générales sont :

- débit par chute de pression : 
$$\dot{V}_{\Delta p} = \frac{b h_m^3}{12 \eta_v l} \cdot \Delta p. \quad (12.10.1)$$

- débit par entraînement : 
$$\dot{V}_v = \frac{1}{2} v b h_m.$$

##### 12.4.3.1 HAUTEUR MOYENNE ÉQUIVALENTE

Cette hauteur moyenne équivalente intervient dans le calcul du débit provoqué par l'entraînement du fluide par déplacement de l'arbre par rapport à la partie cylindrique du coussinet. Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les deux limites angulaires de la position de l'arc de calcul. La conservation des débits ou du volume de fluide pendant l'intervalle élémentaire de temps  $dt$  impose dans la relation de Newton :

$$b h_{mv} R (\varphi_2 - \varphi_1) = b \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} s [1 + e \sin(\varphi - \psi_e)] R d\varphi,$$

ou : 
$$h_{mv} (\varphi_2 - \varphi_1) = s (\varphi_2 - \varphi_1) - s \varepsilon [\cos(\varphi_2 - \psi_e) - \cos(\varphi_1 - \psi_e)],$$

et finalement : 
$$h_{mv} = s + \frac{s \varepsilon}{\varphi_2 - \varphi_1} [\cos(\varphi_2 - \psi_e) - \cos(\varphi_1 - \psi_e)] \quad (12.10.2)$$

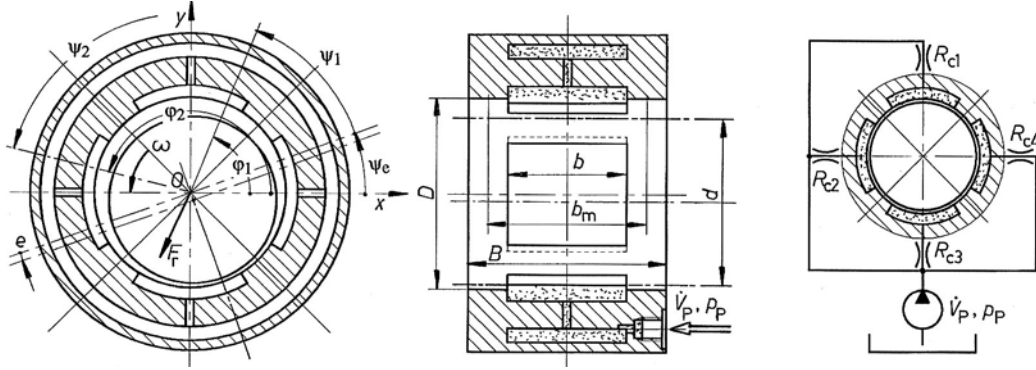


Figure 12.14 Grandeurs géométriques complémentaires et position angulaire  $\varphi$  de la fente  
Alimentation par pompe commune de toutes les poches d'un palier à quatre poches

#### 12.4.3.2 HAUTEUR MOYENNE CUBIQUE ÉQUIVALENTE

Cette hauteur moyenne cubique équivalente intervient dans le calcul du débit provoqué par une différence de pression entre l'entrée et la sortie de la fente. Le débit est proportionnel au cube de la hauteur de la fente selon la relation de Hagen-Poiseuille. Le point de départ de la recherche de cette hauteur est la relation de la conservation du produit de la surface mouillée par le cube de la hauteur de la fente :

$$b h_{m3}^3 R (\varphi_2 - \varphi_1) = b \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} \{s[1 + \varepsilon \sin(\varphi - \psi_e)]\}^3 R d\varphi.$$

Pour effectuer plus facilement l'intégration, remplaçons les angles  $\varphi_1$  par  $\psi_e + \psi_1$  et  $\varphi_2$  par  $\psi_e + \psi_2$ , l'angle élémentaire  $d\varphi$  par  $d\psi$  :

$$h_{m3}^3 = \frac{1}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} [s(1 + \varepsilon \sin \psi)]^3 d\psi.$$

Après développement de l'expression au cube, intégration et simplification, la hauteur moyenne cubique équivalente s'exprime par :

$$h_{m3}^3 = \frac{s^3}{\psi_2 - \psi_1} (I_{\psi_2} - I_{\psi_1}) = \frac{s^3}{\varphi_2 - \varphi_1} (I_{\psi_2} - I_{\psi_1}). \quad (12.10.3)$$

avec :  $I_{\psi_i} = \psi_i - 3 \varepsilon \cos \psi_i + 3 \varepsilon^2 (\psi_i - \sin \psi_i \cos \psi_i)/2 + \varepsilon^3 (\cos^3 \psi_i/3 - \cos \psi_i),$

et :  $\psi_i = \varphi_i - \psi_e$ , donc  $\psi_2 = \varphi_2 - \psi_e$  et  $\psi_1 = \varphi_1 - \psi_e$ .

#### 12.4.4 ÉCOULEMENTS DANS LE PALIER

La pompe volumétrique alimente directement toutes les  $n$  poches du palier à travers les capillaires d'entrée, la pression d'alimentation commune de la pompe étant désignée par  $p_P$  et le débit par  $V_P$ . Ce débit total s'écoule ensuite vers l'extérieur du coussinet à travers les fentes provoquées par le jeu entre l'arbre et la surface cylindrique du coussinet. Si l'arbre est en

rotation, la vitesse relative de la surface de l'arbre par rapport à celle du coussinet entraîne une partie du fluide d'une poche à la suivante. Si deux poches voisines sont à des pressions différentes, ce gradient de pression engendre également un débit entre ces poches. Finalement, le principe de la conservation des débits doit être respecté.

#### 12.4.4.1 DÉBIT DANS LES CAPILLAIRES

La loi de Poiseuille décrit le comportement du fluide visqueux non compressible à travers les résistances d'entrée supposées de section circulaire. Le débit se calcule par :

$$\dot{V}_{cj} = \frac{\pi d_{cj}^4}{128} \cdot \frac{p_p - p_j}{\eta_v l_{cj}}. \quad (12.11.1)$$

avec :  $d_{cj}$  diamètre du capillaire j (ou diamètre hydraulique),  
 $l_{cj}$  longueur du capillaire j.

La résistance hydraulique correspondante s'écrit :  $R_{cj} = \frac{128 \eta_v l_{cj}}{\pi d_{cj}^4}$ .

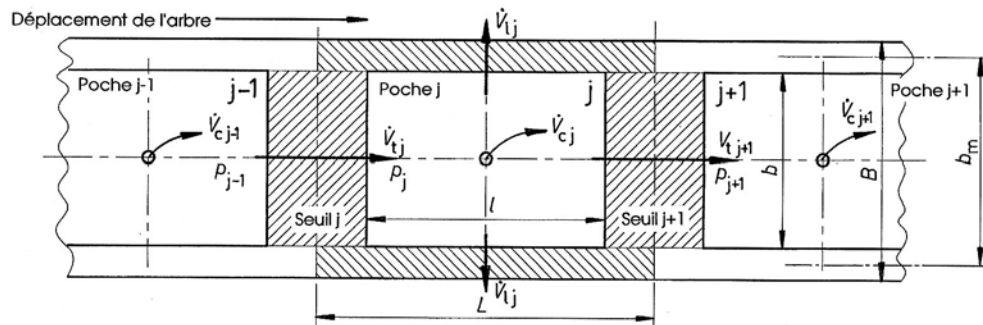


Figure 12.15 Développement du coussinet avec les divers débits

#### 12.4.4.2 DÉBIT DANS LES SEUILS LATÉRAUX

Le débit axial dans la fente entre les surfaces cylindriques de l'arbre et du coussinet se détermine au moyen d'une fente rectangulaire équivalente à hauteur constante limitée par le secteur, d'angle au centre  $\Phi_p$ , réservé à une poche. La position angulaire du début et de la fin de la largeur de la fente du seuil latéral j est située sur le milieu des seuils j et j+1 :

- angle de début de poche :  $\phi_{pjd} = \Phi_0 + (j-1) \Phi_p$ ,
- angle de fin de poche :  $\phi_{pjf} = \Phi_0 + j \Phi_p$ .
- hauteur moyenne cubique :  $h_{m3j}^3 = s^3 / (\phi_{pjf} - \phi_{pjd}) \cdot (I_{\psi 2} - I_{\psi 1})$ ,  
avec :  $\psi_1 = \phi_{pjd} - \psi_e$  et  $\psi_2 = \phi_{pjf} - \psi_e$ .
- largeur de la fente :  $L = \pi D/n$ ,
- profondeurs de la fente :  $(B - b)/2$ .
- pressions : dans la poche j :  $p_j$  extérieure :  $p_0$ .

Le débit entre la poche et l'extérieur du coussinet se trouve simplement par :

$$\dot{V}_{lj} = \frac{\pi D h_{m3j}^3}{6 n \eta_v (B - b)} \cdot (p_j - p_0). \quad (12.11.2)$$

Le débit axial total sortant de la poche j est deux fois cette valeur pour un coussinet symétrique dans le sens axial.

#### 12.4.4.3 DÉBIT TANGENTIEL DANS LA FENTE ENTRE DEUX POCHEs

Le débit tangentiel total dans la fente entre deux poches successives se compose de deux débits partiels : le débit provoqué par le déplacement de l'arbre et le débit provenant de la différence de pression entre les deux poches. Les dimensions particulières intervenant dans le calcul sont :

- angle au milieu du seuil j :  $\varphi_{sj} = \Phi_0 + (j - 1) \Phi_p = \Phi_0 + 2 \pi (j - 1)/n$ ,
- angle au début du seuil j :  $\varphi_{sjd} = \Phi_0 - (1 - \kappa) \pi/n + (j - 1) \Phi_p$ ,
- angle à la fin du seuil j :  $\varphi_{sjf} = \Phi_0 + (1 - \kappa) \pi/n + (j - 1) \Phi_p$ ,
- hauteur moyenne équivalente :  $h_{mvj} = s + s e/(\varphi_{sjf} - \varphi_{sjd}) \cdot [\cos(\varphi_{sjd} - \cos \psi_e) - \cos(\varphi_{sjf} - \cos \psi_e)]$
- hauteur moyenne cubique :  $h_{s3j}^3 = s^3/(\varphi_{sjf} - \varphi_{sjd}) \cdot (I_{\psi 2} - I_{\psi 1})$ ,  
avec :  $\psi_1 = \varphi_{sjd} - \psi_e$  et  $\psi_2 = \varphi_{sjf} - \psi_e$ .
- largeur de la fente :  $b_s$ ,
- profondeur de la fente :  $l_j = L - l = (1 - \kappa) L = (1 - \kappa) \pi D/n$ .

Les débits partiels se trouvent par les expressions :

1. débit par entraînement :  $\dot{V}_{vj} = 1/4 \omega d b h_{mvj} = 1/4 \omega D b h_{mvj}$ . (12.11.3)
2. débit par différence de pression : dans la mise en équation, il est admis que la poche précédente présente une pression supérieure à la poche examinée de telle sorte que l'écoulement s'effectue de la poche j-1 vers la poche j, de la poche j vers la poche j+1, etc...

$$\dot{V}_{\Delta p j-1} = \frac{b n h_{s3j}^3}{12 \eta_v (1 - \kappa) \pi D} \cdot (p_{j-1} - p_j). \quad (12.11.4)$$

3. débit tangentiel total :  $\dot{V}_{tj} = \dot{V}_{vj} + \dot{V}_{\Delta p j-1 \rightarrow j}$ ,  
 $\dot{V}_{tj+1} = \dot{V}_{vj+1} + \dot{V}_{\Delta p j \rightarrow j+1}$ ,

ou en remplaçant chaque débit par son expression sur les seuils j et j+1 :

$$\dot{V}_{tj} = \frac{1}{4} \omega D b h_{mvj} + \frac{b n h_{s3j}^3}{12 \eta_v (1 - \kappa) \pi D} \cdot (p_{j-1} - p_j).$$

et :

$$\dot{V}_{tj+1} = \frac{1}{4} \omega D b h_{mvj+1} + \frac{b n h_{s3j+1}^3}{12 \eta_v (1 - \kappa) \pi D} \cdot (p_j - p_{j+1}). \quad (12.11.5)$$

#### 12.4.4.4 CONSERVATION DES DÉBITS DANS UNE POCHE

Comme le calcul du palier radial hydrostatique à poches part de l'excentricité de l'arbre par rapport au centre du coussinet, la pression régnant dans les diverses poches est inconnue initialement. La conservation de débits dans la poche j permet de trouver finalement toutes les pressions dans les poches : la somme des débits dans chaque poche doit être nulle. Selon la figure 12.15, il est possible d'écrire pour la poche j :

$$\dot{V}_{cj} + \dot{V}_{tj} - 2 \dot{V}_{lj} - \dot{V}_{tj+1} = 0.$$

Remplaçons chaque expression générale de débit dans la poche j par son expression en fonction des pressions connues  $p_p$  et  $p_0$ , des diverses pressions inconnues  $p_{j-1}$ ,  $p_j$  et  $p_{j+1}$  :

$$\frac{\pi d_{cj}^4}{128} \cdot \frac{p_p - p_j}{\eta_v l_{cj}} + \frac{1}{4} \omega D b (h_{mvj} - h_{mvj+1}) - \frac{\pi D h_{m3j}^3}{3 n \eta_v (B - b)} \cdot (p_j - p_0) +$$



### 12.4.5 POUSSEE RÉSLTANTE ET ÉQUILIBRE DE L'ARBRE

Afin de simplifier la mise en équation des poussées hydrostatiques, nous introduisons les hypothèses suivantes :

1. les pressions restent constantes à l'intérieur de chacune des poches,
2. la pression décroît linéairement de  $p_j$  à  $p_0$  le long des seuils dans l'écoulement axial,
3. la pression varie linéairement sur les seuils tangentiels entre deux poches successives.

#### 12.4.5.1 EXPRESSION DE LA POUSSEE D'UNE POCHE

La poussée sur l'arbre dans le domaine d'action d'une poche peut se trouver en sommant les poussées élémentaires  $dF_n = p dA$ . Le calcul de cette poussée peut se simplifier en utilisant le principe de la surface projetée de la portion cylindrique considérée. Remplaçons le domaine total d'action de la poche sur l'arbre par le pas circonférentiel dont l'angle au centre vaut  $\Phi_p = 2\pi/n$ . La longueur de la corde se détermine par :

$$l_p = 2 (D/2) \sin(2\pi/2n).$$

La largeur efficace de la surface projetée vaut  $b_m = (B + b)/2$ . À partir de la valeur de la pression  $p_j$  et de la surface efficace projetée  $A_p = l_p b_m$ , il est possible d'exprimer la poussée de la poche  $j$  par :

$$F_{nj} = p_j l_p b_m = p_j D (B + b)/2 \cdot \sin(\pi/n). \quad (12.13.1)$$

#### 12.4.5.2 POUSSEE RÉSLTANTE

La poussée résultante de toutes les actions des pressions sur l'arbre est égale à la somme vectorielle des poussées partielles :

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{nn}.$$

Pour calculer numériquement cette résultante vectorielle, projetons chaque poussée partielle sur le système de coordonnées rectangle  $Ox y$  :

$$1. \text{ Projection sur l'axe } Ox : F_{nx} = \sum_{j=1}^n F_{nj} (-\cos\phi_{mpj}). \quad (12.13.2)$$

$$2. \text{ Projection sur l'axe } Oy : F_{ny} = \sum_{j=1}^n F_{nj} (-\sin\phi_{mpj}). \quad (12.13.3)$$

$$3. \text{ Poussée résultante : } |F_n| = (F_{nx}^2 + F_{ny}^2)^{0,5},$$

$$4. \text{ Position angulaire : } \Phi_{Fn} = \arctan(F_{ny}/F_{nx}). \quad (12.12.4)$$

En négligeant la résultante des forces tangentielles dues aux écoulements et au cisaillement, la force radiale extérieure  $F_r$  doit être directement opposée à la résultante des poussées de telle manière que l'arbre soit en équilibre de translation.

#### 12.4.5.3 TRAJECTOIRE DU CENTRE DE L'ARBRE

En partant de l'excentricité de l'arbre par rapport à l'axe du coussinet et après détermination de la ligne d'action et de l'intensité de la force extérieure, il est possible de construire la trajectoire du centre de l'arbre en fonction de la charge extérieure à direction



constante. Pour le palier hydrostatique, il est également possible de définir la pression moyenne au moyen de la relation de Stribeck et le nombre de Sommerfeld par :

$$p_{\text{moy}} = \bar{p} = \frac{F_r}{B D}, \quad \text{So} = \frac{p_{\text{moy}} \psi^2}{\omega \eta_v} = \frac{\bar{p} \psi^2}{\omega \eta_v}.$$

Cette pression moyenne et ce nombre de Sommerfeld peuvent se reporter sur la courbe de la trajectoire.

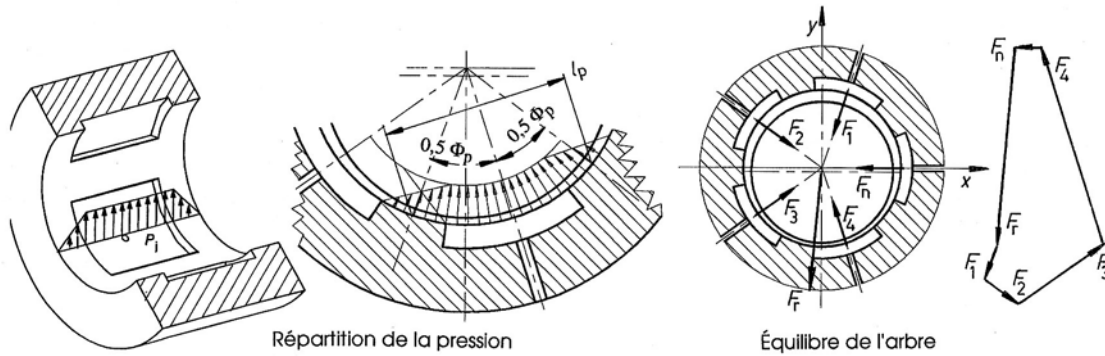


Figure 12.16 Poussée dans une poche et poussée résultante sur l'arbre

#### 12.4.5.4 DÉBIT DE LA POMPE D'ALIMENTATION

La pompe volumétrique reliée aux diverses poches du palier doit assurer un débit suffisant sous la pression  $p_p$ . Le débit total de la pompe vaut :

$$\dot{V}_p = \frac{\pi}{128 \eta_v} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{d_{cj}^4}{l_{cj}} \cdot (p_p - p_j). \quad (12.13.5)$$

La puissance oléohydraulique produite vaut le produit du débit par la pression de refoulement et compte tenu du rendement hydromécanique de la pompe, cette puissance se trouve par :

$$P_p = \dot{V}_p p_p \frac{1}{\eta_p}. \quad (12.13.6)$$

Le débit adopté pour la pompe d'alimentation est habituellement supérieur à la valeur minimale calculée, le surplus passant dans le limiteur de pression monté en dérivation sur la conduite de refoulement.

#### 12.4.6 PERTES DANS LE PALIER

Les pertes dans le coussinet du palier hydrostatique proviennent du cisaillement de la couche fluide engendré par le déplacement de l'arbre dans le coussinet et l'effet de l'écoulement provoqué par la différence de pression entre les poches. Nous devons distinguer les pertes dans les seuils latéraux et les pertes dans les seuils lisses tangentiels placés entre les poches du palier.

##### 12.4.6.1 PERTES DANS LES SEUILS LATÉRAUX

En partant de la relation des fluides newtoniens, nous pouvons écrire la valeur de la contrainte tangentielle de cisaillement calculée pour une hauteur moyenne de fente  $h_{mvpj}$  par :

$$\tau = \eta_v v_u / h_{mvpj}.$$

La force de cisaillement se répartit sur l'aire de la surface latérale :  $A_l = \pi D (B - b)/2n$  et la vitesse circonférentielle vaut :  $v_u = \omega d/2 \approx \omega D/2$ . Finalement, cette force se trouve par :

$$F_{tlj} = \frac{\omega D}{2} \cdot \frac{\eta_v}{h_{mvj}} \cdot \frac{\pi D}{n} \cdot \frac{B-b}{2}. \quad (12.14.1)$$

Chaque poche possède deux seuils latéraux de surface  $A_l$ .

#### 12.4.6.2 PERTES DANS LES SEUILS LISSES ENTRE LES POCHEs

Les pertes sur les seuils centraux sont de deux natures : celles provoquées par le déplacement de l'arbre et celles dues à l'écoulement engendré par la différence de pression.

##### 1. Pertes dues à la rotation de l'arbre

L'aire de la section mouillée, lors du passage du fluide sur le seuil de séparation entre deux poches vaut :  $A_{seuil} = \pi D (1 - \kappa) b / n$  et la contrainte de cisaillement :  $\tau_j = \eta_v v_u / h_{mvj}$ . La force de cisaillement se trouve par :

$$F_{tvj} = \frac{\omega D}{2} \cdot \frac{\eta_v}{h_{mvj}} \cdot \frac{\pi D}{n} \cdot b(1 - \kappa). \quad (12.14.2)$$

Cette relation présuppose une épaisseur de la couche fluide constante, moyenne des épaisseurs, sur toute la profondeur du seuil.

##### 2. Pertes dues à la différence de pression entre les poches

La poussée sur la couche liquide placée entre l'arbre et le seuil se trouve par :

$$F_{\Delta psj} = b h_{mvj} (p_{j-1} - p_j). \quad (12.14.3)$$

Cette poussée tangentielle se répartit sur les deux parois de l'arbre et du coussinet. Chaque paroi subit ainsi une force dont la valeur est calculable par :

$$F_{t\Delta pj} = 0,5 F_{\Delta psj} = 0,5 b h_{mvj} (p_{j-1} - p_j). \quad (12.14.4)$$

Cette force est supposée agir dans le même sens que la vitesse relative de l'arbre par rapport au coussinet.

##### 3. Pertes totales

La perte totale pour un seuil central est égale à la somme des deux pertes, compte tenu des hypothèses introduites dans la mise en équation. Nous avons supposé un écoulement selon figure 12.15, ce qui produit une force  $F_{t\Delta pj}$  dans le sens inverse des autres forces tangentielles de cisaillement, opposées au mouvement de l'arbre.

$$F_j = 2 F_{tlj} + F_{tvj} - F_{t\Delta pj}. \quad (12.14.5)$$

Le sens de ces forces est donc opposé à la vitesse relative de l'arbre.

#### 12.4.6.3 PERTES TOTALES POUR LE COUSSINET

Pour le coussinet complet à  $n$  poches, la force tangentielle résultante provoquée par la viscosité du lubrifiant en écoulement dans les seuils est donnée par l'expression :

$$F_{t\text{totale}} = \sum_{j=1}^n F_j = \sum_{j=1}^n 2 F_{tlj} + F_{tvj} + F_{t\Delta pj}. \quad (12.14.6)$$

En introduisant la notion de coefficient de frottement équivalent  $\mu_e$ , la relation de frottement selon la loi de Coulomb, le coefficient de frottement dans le palier se trouve par :

## 12. Butées et paliers hydrostatiques

$$\mu_e = \frac{F_{t\text{ totale}}}{F_r}. \quad (12.14.7)$$

Finalement, la puissance perdue dans le coussinet du palier hydrostatique se détermine par l'expression :

$$P_{fr} = F_{t\text{ totale}} \cdot \frac{\omega D}{2} = \mu_e F_r \frac{\omega D}{2}. \quad (12.14.8)$$

Il serait possible d'ajouter à cette puissance perdue par "frottement" celle de la pompe afin de comparer entièrement ce palier avec les autres types hydrostatiques.

### 12.4.7 MÉTHODE DE CALCUL D'UN PALIER HYDROSTATIQUE

En résumé, le calcul du palier hydrostatique à plusieurs poches, séparées par des seuils lisses sans canaux d'évacuation, part de l'évaluation de l'excentricité relative de l'arbre par rapport au coussinet et de la fréquence de rotation. Toutes les dimensions géométriques étant choisies, la pression d'alimentation de la pompe et la viscosité du lubrifiant connues, il faut trouver :

1. l'excentricité relative de l'arbre :  $\varepsilon = e/s = e/\Delta r$ ;
2. l'angle  $\Phi_F$  entre la ligne d'action de la force et l'axe  $Ox$  de référence du coussinet;
3. les angles de positionnement de tous les seuils à partir de l'angle  $\Phi_0$  passant par le milieu du seuil 1 de la première poche;
4. les hauteurs moyennes et les hauteurs cubiques du film visqueux sur le pourtour de chacune des poches ;
5. les coefficients et les constantes du système d'équations linéaires exprimant la conservation du débit dans chaque poche :  
les coefficients des pressions inconnues :  $c_{ij}$ ,  
les constantes du second membre :  $b_i$ ;
6. la solution du système d'équations linéaires et le contrôle de la pression dans chacune des poches du coussinet;
7. les poussées partielles et totale sur l'arbre en module et direction;
8. le débit total de fluide nécessaire au fonctionnement correct du coussinet, compte tenu du domaine de variation de la charge et de la fréquence de rotation;
9. les pertes dans le coussinet, la puissance à produire pour entraîner la pompe d'alimentation, le couple à prévoir sur l'arbre et éventuellement le coefficient de frottement équivalent ;
10. l'optimisation des dimensions géométriques, du choix du lubrifiant de telle manière que les pertes soient les plus faibles possible.

Comme toutes ces opérations sont relativement longues, il est avantageux de prévoir un calcul numérique informatisé de ces diverses grandeurs.

### 12.4.8 APPLICATION DES ÉLÉMENTS HYDROSTATIQUES

Pour obtenir des conditions optimales et acceptables de fonctionnement, il faut choisir des dimensions pour les résistances d'entrée en fonction de l'intensité et de la direction de la charge radiale. L'expérience a démontré qu'il faut atteindre les conditions suivantes :

- rapport géométrique  $B/D$  :  $\beta = 0,8 \text{ à } 1,0$  ,
- rapport des longueurs :  $\kappa = 0,7 \text{ à } 0,9$  ,

- chute de pression dans les résistances : de 10% à 50% de la pression de la pompe,
- charge nominale provoquant une excentricité relative comprise entre 50% à 70% de  $\epsilon$ ,
- vitesse de glissement de l'arbre : au maximum 20 m/s ,
- rigidité du palier : bonne à très bonne si la pression d'alimentation est supérieure à 80 bar.

Le circuit d'alimentation de la butée, du patin ou du palier hydrostatique doit comporter tous les organes permettant d'éviter une panne dans la circulation du fluide porteur vers le palier.

Ces éléments sont : le réservoir de fluide, la pompe volumétrique avec son moteur, le limiteur de pression, les divers filtres, le clapet anti-retour, un manomètre, un accumulateur pour assurer le service momentané lors d'une panne, etc..

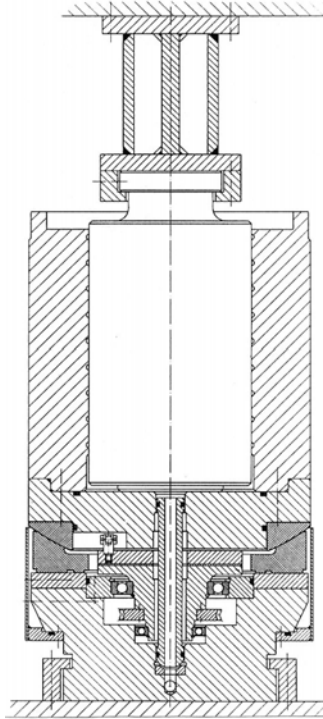


Figure 12.17 Vérin d'une machine d'essai placé sur un appui sphérique hydrostatique (FAG)

La figure 12.17 représente l'un des quatre vérins d'une machine d'essai constitué par un piston lisse coulissant dans un cylindre, l'étanchéité entre ces deux éléments étant assurée par l'écoulement du fluide visqueux entre les deux parois cylindriques. Pour éliminer le plus possible les pertes, le cylindre est animé en rotation lente par un réducteur à vis sans fin de telle manière que le déplacement du piston s'effectue en mouvement louvoyant. Le cylindre est appuyé sur une butée hydrostatique de forme sphérique afin de compenser les erreurs de montage ou provoquées par la déformation mécanique des pièces sous charge. Les caractéristiques données par le fabricant sont : Force axiale : 4000 kN , rayons de la butée : intérieur 289 mm, extérieur 381 mm, débit de la pompe 25 l/min, pression d'alimentation 114 bar, viscosité 0,05 N s/m<sup>2</sup>.

*Remarques supplémentaires* : dans les paliers hydrostatiques, le fluide peut être un liquide ou un gaz. Le comportement thermo-hydrostatique tient compte de l'échauffement du fluide.

### 12.4.9 EXEMPLE DE CALCUL D'UN PALIER HYDROSTATIQUE

Soit à déterminer les conditions de fonctionnement à prévoir pour un palier devant supporter une charge de 12 500 N à la fréquence de rotation de 24 t/s. La pompe d'alimentation peut produire une pression relative de 80 bar, le rendement hydromécanique vaut 90%, et la pression ambiante absolue est pratiquement 1 bar. La solution consiste à étudier deux versions :

Version 1 : tous les capillaires ont les mêmes dimensions,

Version 2 : les capillaires sont de dimensions différentes et adaptés à la direction de la charge.

#### 12.4.9.1 DIMENSIONS GÉOMÉTRIQUES ADOPTÉES

Ces dimensions sont :

- diamètre nominal de l'arbre :	$d = 80 \text{ mm}$	
- jeu relatif :	$\psi = 1\text{‰}$	
- largeur du coussinet :	$B = 60 \text{ mm}$	$\rightarrow p_{\text{moy}} = 12500 \text{ N}/4800 \text{ mm}^2 = 2,6 \text{ N/mm}^2$
- nombre de poches :	$n = 4$	
- largeur des poches :	$b = 40 \text{ mm}$	
- longueur du seuil tangentiel:	$l = 10 \text{ mm}$	
- pas entre deux poches :	$L = \pi D/n = 62,832 \text{ mm}$	
- longueur d'arc de la poche :	$l_p = 52,832 \text{ mm}$	
- jeu relatif et radial :	$\psi = 1 \text{ ‰}$	$j_r = 0,04 \text{ mm}$
- rapport géométrique :	$\beta = B/D = 0,75$	$\kappa = l_p/L = 0,841$
- position angulaire du seuil 1 :	$\Phi_0 = 45^\circ$	

Capillaires : Position	Version 1	Version 2
- poche 1 : $90^\circ$ $d_{c1} = 1 \text{ mm}$	$l_{c1} = 150 \text{ mm}$	$d_{c1} = 1 \text{ mm}$ $l_{c1} = 300 \text{ mm}$
- poche 2 : $180^\circ$ $d_{c2} = 1 \text{ mm}$	$l_{c2} = 150 \text{ mm}$	$d_{c2} = 1 \text{ mm}$ $l_{c2} = 200 \text{ mm}$
- poche 3 : $270^\circ$ $d_{c3} = 1 \text{ mm}$	$l_{c3} = 150 \text{ mm}$	$d_{c3} = 1 \text{ mm}$ $l_{c3} = 100 \text{ mm}$
- poche 4 : $360^\circ$ $d_{c4} = 1 \text{ mm}$	$l_{c4} = 150 \text{ mm}$	$d_{c4} = 1 \text{ mm}$ $l_{c4} = 200 \text{ mm}$

#### 12.4.9.2 CARACTÉRISTIQUES DU FLUIDE

Le fluide est une huile minérale de lubrification ISO-VG 46.

Les propriétés connues sont :

- Température de référence $40^\circ\text{C}$ :	viscosité cinématique	$\nu_{40} = 46 \text{ mm}^2/\text{s}$
- Température de définition $100^\circ\text{C}$ :	viscosité cinématique	$\nu_{100} = 6,7 \text{ mm}^2/\text{s}$
- Masse volumique à $15^\circ\text{C}$	$\rho_{15} = 0,88 \text{ kg/dm}^3$	
- Température de calcul du palier	$\vartheta_{\text{calcul}} = 45^\circ\text{C}$ (valeur admise pour le calcul)	
Viscosité cinématique	$\eta_{\nu 45} = 0.0318 \text{ Ns/m}^2$	
Masse volumique	$\rho_{45} = 0.863 \text{ kg/dm}^3$	
Chaleur massique	$C_{45} = 1706.8 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$	
Ordonnée à l'origine	$n = 9.421$	
Pente de la droite	$m = -3.686$	

#### 12.4.9.3 CARACTÉRISTIQUES AU REPOS AVEC CHARGE RADIALE

Sans charge et fréquence de rotation, l'arbre doit se trouver parfaitement centré dans le coussinet, le jeu radial restant constant. Cette position est facilement calculable car les résistances des capillaires et des seuils peuvent se trouver aisément. Le déplacement s'effectue verticalement vers le bas sous l'angle  $\Phi_e = 270^\circ$ .

##### 1. Résistances

Capillaires :  $R_{c1} = R_{c2} = R_{c3} = R_{c4} = 128 \cdot 0,0318 \cdot 0,15 / (\pi \cdot 0,0014) = 1.9435 \cdot 10^{11}$ ,

1 seuil latéral :  $R_{sl1} = \dots = R_{sl4} = 12 \cdot 0,0318 \cdot 0,01 / (0,062832 \cdot 0,043 \cdot 10^{-9}) = 9,4896 \cdot 10^{11}$ ,  
 2 seuils latéraux :  $R_{sl11} = 0,5 R_{sl1} = 4,7448 \cdot 10^{11}$ ;  $R_{cj} + R_{slj1} = 6,6883 \cdot 10^{11}$ .

2. Répartition des pressions

Chute de pression totale :  $\Delta p_{tot} = 80 \text{ bar} = 8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,  
 Chute de pression dans les capillaires :  $\Delta p_c = 8 \cdot 10^6 \cdot 1,9435 / 6,6883 = 2,3247 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,  
 Chute de pression dans les seuils :  $\Delta p_s = 8 \cdot 10^6 \cdot 4,7448 / 6,6883 = 5,6753 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

3. Répartition des pressions avec excentricité relative croissante entre 0 et 1,0

Le tableau donne le résultat de l'évaluation, les pressions étant des pressions absolues en bar.

Sous la charge radiale nominale de 12 500 N, la pression absolue en bar dans les poches est :

Poche 1 : 34,228 Poche 2 : 49,453 Poche 3 : 78,419 Poche 4 : 49,453

Excentricité : relative  $\varepsilon = 0,7101$  absolue :  $e = 0,0284 \text{ mm}$

Débits de la pompe : par poche :  $V_j = 11,97 \text{ cm}^3/\text{s}$  total :  $V = 47,88 \text{ cm}^3/\text{s} = 2,87 \text{ l/min}$ .

Valeur des pressions absolues en bar et des forces en N en fonction d'epsilon

Fréquence de rotation : 0 t/s

No	Eps $\varepsilon$	Poche 1	Poche 2	Poche 3	Poche 4	Force	Angle
0	0.00	57.754	57.754	57.754	57.754	0.0	?.??°
1	0.20	50.338	56.967	65.145	56.967	4188.1	270.00°
2	0.40	43.424	54.761	71.704	54.761	7998.8	270.00°
3	0.60	37.265	51.517	76.602	51.517	11126.0	270.00°
4	0.80	31.932	47.684	79.452	47.684	13440.7	270.00°
5	1.00	27.393	43.630	80.610	43.630	15052.0	270.00°

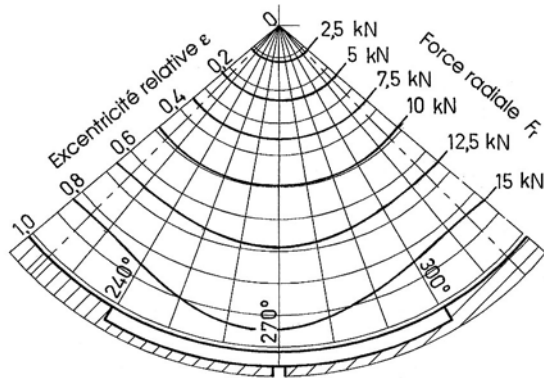
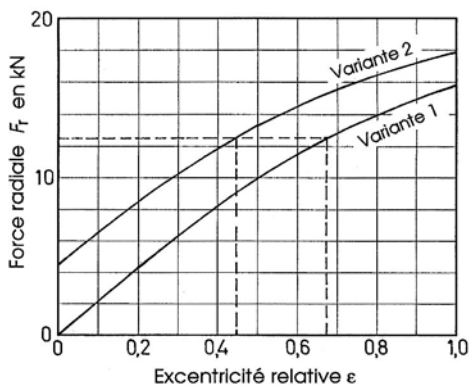


Figure 12.18 Comportement du palier radial hydrostatique :  $F = F(\varepsilon)$  et  $F = F(e, \varphi)$

12.4.9.4 COMPORTEMENT DU PALIER EN ROTATION

Le calcul du palier hydrostatique sous la charge de  $F = 12\,500 \text{ N}$  et la fréquence de rotation  $n = 24 \text{ t/s}$  donne les résultats suivants :

- Position angulaire de l'excentricité :  $\Phi_e = 281,5^\circ$

- Sous la charge radiale nominale de 12 500 N, la pression absolue en bar dans les poches est :

Poche 1 : 34,892 Poche 2 : 49,819 Poche 3 : 79,085 Poche 4 : 49,776

Variante 1

Variante 2

- Excentricités :  $\varepsilon = 0,6743$   $e = 0,0270 \text{ mm}$   $\varepsilon = 0,4414$   $e = 0,0177 \text{ mm}$

- Pompe :  $V_p = 3,41 \text{ l/min}$   $P_p = 505 \text{ W}$   $V_p = 2,58 \text{ l/min}$   $P_p = 382 \text{ W}$

- Pertes par cisaillement :  $\mu_e = 3,3 \text{ ‰}$   $P_{fr} = 251 \text{ W}$   $\mu_e = 2,8 \text{ ‰}$   $P_{fr} = 213 \text{ W}$

- Pertes totales :  $P_{totale} = 756 \text{ W}$   $P_{totale} = 595 \text{ W}$

En prévoyant d'autres variantes, il est encore possible de diminuer les pertes dans le palier. Le tableau ci-dessous donne les pressions et forces en fonction de l'excentricité relative.

## 12. Butées et paliers hydrostatiques

### Valeur des pressions absolues en bar et des forces en N en fonction d'epsilon Fréquence de rotation : 24 t/s

No	Eps $\epsilon$	Poche 1	Poche 2	Poche 3	Poche 4	Force	Angle
0	0.00	57.754	57.754	57.754	57.754	0.0	??.??°
1	0.10	53.935	57.570	61.590	57.520	2165.3	269.62°
2	0.20	50.206	56.976	65.355	56.883	4284.6	269.65°
3	0.30	46.619	56.000	68.940	55.877	6313.5	269.69°
4	0.40	43.208	54.685	72.237	54.554	8210.7	269.74°
5	0.50	39.994	53.089	75.144	52.972	9941.9	269.81°
6	0.60	36.988	51.274	77.588	51.192	11483.4	269.88°
7	0.70	34.194	49.300	79.539	49.273	12825.3	269.97°
8	0.80	31.609	47.226	81.011	47.264	13972.9	270.04°
9	0.90	29.226	45.101	82.069	45.206	14946.3	270.11°
10	1.00	27.034	42.965	82.815	43.129	15777.3	270.17°

#### 12.4.9.5 COMPORTEMENT DU PALIER AVEC DES CAPILLAIRES ADAPTÉS

Le calcul du comportement du palier hydrostatique avec des capillaires adaptés à la charge comporte aussi la recherche de la température d'équilibre. Ce calcul a été effectué au moyen d'un logiciel informatique, car la température d'équilibre a nécessité 26 itérations dans lesquelles les caractéristiques du lubrifiant ont été modifiées à chaque pas.

##### 1. Rappel des dimensions des capillaires

Poche No	Diamètre $d_c$	Longueur $l_c$	Angle
1	1.00	300.00	90.00°
2	1.00	200.00	180.00°
3	1.00	100.00	270.00°
4	1.00	200.00	360.00°

##### 2. Valeurs au point d'équilibre thermique

Conditions ambiantes

Température ambiante	20°C
Aire extérieure du carter	0,20 m <sup>2</sup>
Coefficient de transmission de chaleur	$\alpha = 21,7 \text{ W/m}^2\text{K}$
Vitesse de l'air sur le carter	1,50 m/s
Température du fluide à l'entrée	30,0°C

##### 3. Calcul thermique

Nombre d'itérations	26
Température d'équilibre	39,58°C
Valeur des puissances	
Evacuée par le carter et l'huile	570,6 W
Frottement sur l'arbre	269,3 W
Alimentation de la pompe	300,3 M

##### 4. Comportement sous la force nominale

Force radiale minimale	0,0 N
Force radiale maximale	15400,5 N
Position angulaire de la force	270,0°
Force radiale calculée	12499,9 N
Excentricité relative	0,437
Excentricité de l'arbre	0,017 mm
Hauteur minimale du film	0,023 mm

Caractéristique du lubrifiant à la température d'équilibre

Température de calcul	39,6°
Viscosité dynamique de l'huile	0,0404 Ns/m <sup>2</sup>
Masse volumique	0,862 kg/dm <sup>3</sup>

## Organes de transmission directe

Chaleur massique 1736,9 J/kg.K

### 5. Portance en fonction de l'excentricité

No	Excentricité	Force	Angle
0	0.000	4458.98	270.00
1	0.100	6535.43	264.15
2	0.200	8501.41	261.10
3	0.300	10313.89	259.20
4	0.400	11948.62	257.91
5	0.500	13391.80	256.97
6	0.600	14639.05	256.27
7	0.700	15695.46	255.74
8	0.800	16575.21	255.35
9	0.900	17300.31	255.06
10	1.000	17898.74	254.87

### 6. Pression et débit de la pompe

Pression absolue

Poche 1 : 31.7275 bar, Poche 2 : 52.7146 bar, Poche 3 : 74.8787 bar, Poche 4 : 43.1713 bar.

Débit dans les poches

Poche 1 : 9,980 cm<sup>3</sup>/s, Poche 2 : 8,594 cm<sup>3</sup>/s, Poche 3 : 3,720 cm<sup>3</sup>/s, Poche 4 : 11,493 cm<sup>3</sup>/s.

Pression relative de la pompe 80,0 bar

Pression absolue ambiante 1,0 bar

Rendement hydromécanique 90,0 %

Débit total de la pompe 33,79 cm<sup>3</sup>/s

Puissance absorbée 300,3 W

### 7. Pertes dans le palier

Forces tangentielles

Poche 1 : 6,2 N, Poche 2 : 11,7 N, Poche 3 : 17,4 N, Poche 4 : 9,4 N, Totale 44,7 N.

Puissance perdue dans le coussinet 269,3 W

Coefficient de frottement équivalent 3,6 ‰.



## CHAPITRE 13

# BUTÉES ET PALIERS HYDRODYNAMIQUES

Ce chapitre traite les butées, les guidages et les paliers radiaux utilisant la portance hydrodynamique des fluides visqueux. Les éléments traités sont les suivants :

1. Butées hydrodynamiques à une pente,
2. Butées hydrodynamiques à plusieurs pentes,
3. Paliers radiaux hydrodynamiques sous charge statique,
4. Paliers radiaux hydrodynamiques multilobes,
5. Paliers radiaux hydrodynamiques à douille flottante,
6. Paliers radiaux hydrodynamiques sous charge dynamique.

Indiquons immédiatement que tous les problèmes intervenant dans le comportement des butées et des paliers ne sont pas encore résolus à l'heure actuelle. Les ouvrages spécialisés et les articles techniques traitent plus en détail les possibilités de calcul.

### 13.1 BUTÉES HYDRODYNAMIQUES À PENTE UNIQUE

L'exposé du calcul des paliers en régime hydrodynamique a été traité d'une manière générale au sous-chapitre 11.3 . Les butées hydrodynamiques se rencontrent dans les turbomachines à axes vertical ou horizontal. Dans les pompes et turbines hydrauliques à axe vertical, la butée doit supporter non seulement le poids de la machine mais aussi les poussées sur les roues à aubes. Dans les machines à axe horizontal, la butée assure la retenue axiale de la machine. La butée hydrodynamique est caractérisée par une série de patins pouvant basculer autour d'un point fixe et supportant la charge axiale par l'intermédiaire d'un film porteur. Les pertes, engendrées par les conditions hydrauliques de formation du film, sont généralement faibles et l'usure des pièces devient pratiquement négligeable en service. Comme l'énergie perdue est transformée en chaleur, le refroidissement du fluide est obtenu soit par la circulation d'eau dans un serpentin placé dans le carter de la butée formant bac à fluide, soit par circulation du fluide chaud vers l'extérieur. La circulation du fluide est assurée par une ou plusieurs pompes commandées par la machine elle-même ou par moteur externe.

#### 13.1.1 GRANDEURS FONDAMENTALES

Le nombre de patins de la butée dépend des conditions imposées par l'implantation de cet élément. Pour les machines à axes vertical, les constructeurs prévoient habituellement 8 à 12 patins tandis que dans les machines à axe horizontal, 16 à 24 patins sont montés en cercle suivant le rapport entre les diamètres intérieur et extérieur. Les dimensions géométriques principales sont définies par les grandeurs suivantes :

- $B$  largeur du patin dans le sens radial,
- $L$  longueur du patin dans le sens circonférentiel,
- $d_e$  diamètre extérieur de la butée,
- $d_i$  diamètre intérieur de la butée,
- $d$  diamètre moyen de la butée,
- $z$  nombre de patins,
- $L_p$  pas entre deux patins,

- $\Phi_p$  pas angulaire entre deux patins,  
 $\Phi_l$  angle de longueur de patin :  $\Phi_l = L / (1/2 d)$ ,  
 $\beta$  rapport géométriques :  $\beta = B/L$  , compris entre 0,7 et 1,5,  
 $\varphi$  facteur de remplissage.

Le diamètre moyen sur les patins se définit par :

$$d = 1/2 (d_i + d_e), \quad (13.1.1)$$

la longueur du patin se définissant par la longueur de l'arc de cercle sur la circonférence moyenne. Dans la mise en équation, le patin est supposé de forme rectangulaire bien que sa forme exacte soit un segment annulaire. Comme tous les patins doivent présenter un espace circonférentiel entre deux patins successifs afin d'assurer l'entrée et la sortie du lubrifiant sur les surfaces en charge, le pas angulaire entre deux patins peut se donner par l'expression :

$$L_p = \frac{\pi d}{z} = \Phi_p \frac{d}{2}. \quad (13.1.2)$$

et le facteur de remplissage par :

$$\varphi = \frac{\Phi_l}{\Phi_p} = \frac{z L}{\pi d} = \frac{2 z L}{\pi (d_e + d_i)}. \quad (13.1.3)$$

L'aire projetée ou totale des patins plans est trouvée par :  $A = z B L$  et la pression moyenne est égale à la force axiale  $F_a$  divisée par cette aire, soit :

$$p_{\text{moy}} = \bar{p} = \frac{F_a}{z B L} = \frac{F_a}{\pi \varphi d B}. \quad (13.1.4)$$

Cette expression suppose que tous les patins formant la butée supportent exactement la même charge axiale partielle. La puissance perdue entre les patins et le pivot vaut :

$$P_{\text{fr}} = M_{\text{fr}} \cdot \omega = \mu_e F_a v_u, \quad (13.1.5)$$

- avec :  $v_u = w d/2$  vitesse de glissement sur le diamètre moyen,  
 $\omega = 2 \pi n$  vitesse angulaire,  
 $\mu_e$  coefficient de frottement équivalent.

Le coefficient de frottement équivalent dépend de la géométrie de la butée, de la caractéristique du fluide porteur et des conditions d'écoulement entre les patins et le pivot.

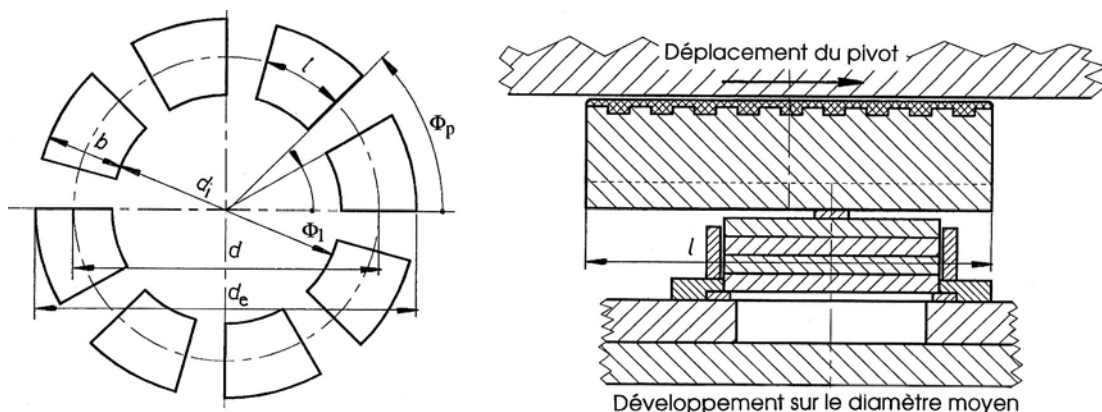


Figure 13.1 Dimensions générales de la butée ou guidage hydrodynamique à patins  
 Patin d'une butée hydrodynamique pour machine hydraulique (conception ACMV)

### 13.1.2 PORTANCE D'UN PATIN

L'équation différentielle aux dérivées partielles de Reynolds ne peut pas se résoudre dans le cas de l'écoulement bidimensionnel existant entre les patins et le pivot. Les relations développées sous 11.3 sont valables seulement pour un patin infiniment large, ce qui ne correspond pas du tout au patin réel d'une butée ou d'un guidage. Cette équation est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -6 \eta_v v \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (11.7.2)$$

#### 13.1.2.1 SOLUTION APPROXIMATIVE DE LA PORTANCE

Pour tenir compte des conditions réelles d'écoulement du fluide et de la formation de la pression trouvées à partir de cette équation différentielle, plusieurs auteurs ont proposé d'étendre les résultats du patin infiniment large en corrigeant les résultats trouvés précédemment. Michell, Muskat, Morgan, Meres et Frössel ont donné des solutions analytiques en supposant la viscosité du fluide constante. Les solutions comprennent des doubles séries dont les membres sont des produits de fonctions trigonométriques et de Bessel. Les résultats de ces recherches sont peu utilisables dans la pratique courante.

Les solutions approximatives partent d'hypothèses simplificatrices en supposant que la répartition de la pression dans le sens de l'écoulement suit la loi trouvée pour le patin infiniment large, à une constante près.

##### 1. Solution avec répartition sinusoïdale

Gümbel a admis une répartition selon une fonction cosinusoïdale de la pression dans la direction perpendiculaire au glissement. Les facteurs de proportionnalité ont été trouvés à partir de la conservation des débits.

##### 2. Solution avec répartition polynomiale

Schiebel a admis une répartition selon une fonction polynomiale de la pression dans la direction perpendiculaire au glissement. Les exposants de la loi polynomiale ont été déterminés de telle manière que la différence entre la solution exacte et la solution approximative devienne minimale.

La colline des pressions pour ces deux hypothèses prend la forme représentée sur la figure 13.2.

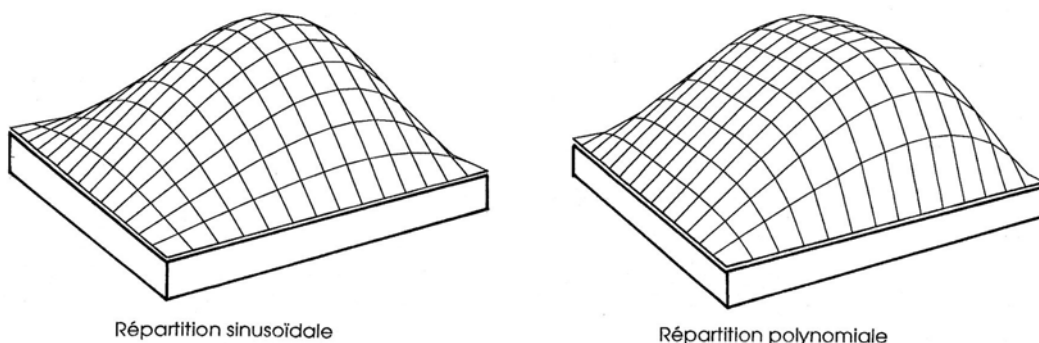


Figure 13.2 Collines des pressions : répartition transversale : à gauche sinusoïdale, à droite polynomiale

### 13.1.2.2 SOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Jakobsson et Floberg ont utilisé la méthode des différences pour résoudre l'équation différentielle de Reynolds, cette dernière pouvant s'écrire, au moyen de différences, sous la forme approximative :

$$\frac{\Delta}{\Delta x} \left( h^3 \frac{\Delta p}{\Delta x} \right) + \frac{\Delta}{\Delta y} \left( h^3 \frac{\Delta p}{\Delta y} \right) = -6 \eta_v v_u \frac{\Delta h}{\Delta x}. \quad (13.2.1)$$

Cette méthode consiste à décomposer la surface du patin, pour un rapport géométrique  $\beta$  connu, pour une pente supposée constante et une épaisseur minimale du fluide, en un certain nombre de surfaces rectangulaires ou carrées. L'équation aux différences finies est posée en chacun des angles des surfaces composantes, la pression régnant en ces divers points étant l'inconnue. La pression sur le pourtour du patin est égale à la pression ambiante. La mise en équation de toute la surface se traduit par un système d'équations linéaires dont la solution exprime la pression engendrée dans chacun des angles des surfaces composantes. En calculant les poussées partielles sur chacune des surfaces et en sommant ces forces, il est possible de trouver la portance du patin. La méthode peut encore s'améliorer en recherchant le comportement d'un élément de surface au moyen des méthodes propres aux éléments finis.

### 13.1.3 PATIN À PENTE CONSTANTE DE LARGEUR FINIE

La méthode simple de calcul, pour le patin à pente constante de largeur finie, consiste à introduire les relations développées par Schiebel. La pente du patin, toujours très faible, se trouve par :  $\tan \alpha = (h_1 - h_0)/L$ .

#### 13.1.3.1 PORTANCE ET PRESSION MOYENNE

D'après Schiebel, la portance d'un patin hydrodynamique de largeur  $B$ , longueur  $L$ , peut s'exprimer en fonction de la portance du patin infiniment large par :

$$F_a = \frac{5}{6} \cdot \frac{F_\infty}{1 + a(L/B)^2}. \quad (13.2.2)$$

avec :  $F_\infty$  portance du patin infiniment large,  
 $a$  facteur de correction de la butée de largeur finie.

Pour une géométrie déterminée de la fente, le facteur de correction  $a$  peut se trouver en fonction du rapport  $m' = 1/m = h_0/(h_1 - h_0)$  par :

$$a = \frac{10}{(1 + 2m')^2} \cdot \left\{ (m' + m'^2)^2 + \frac{1 - 2(m' + m'^2)}{12 \left[ (1 + 2m') \cdot \ln \frac{1 + m'}{m'} - 2 \right]} \right\}. \quad (13.2.3)$$

La pression moyenne  $p_{\text{moy}}$  sur le patin peut alors se calculer à partir des expressions trouvées pour le patin infiniment large, soit :

$$p_{\text{moy}} = \bar{p} = \frac{5 \eta_v v_u L}{h_0^2} \cdot \frac{1}{1 + a(L/B)^2} \cdot m'^2 \cdot \left( \ln \frac{1 + m'}{m'} - \frac{2}{1 + 2m'} \right). \quad (13.2.4)$$

La grandeur de la pression moyenne sous forme d'une grandeur adimensionnelle se donne par le rapport :

$$p_{\text{moy}} h_0^2 / (\eta_v v_u L),$$

est représentée sur la figure 13.3 en fonction du rapport des fentes  $m'$ .

Comme la pression moyenne est le quotient de la force appliquée par l'aire de la surface de glissement du patin, les courbes de la figure permettent de trouver très rapidement la portance de cet élément. Les conditions de portance maximale sont atteintes pratiquement pour un rapport  $m' = 0,8$  indépendamment du rapport géométrique  $\beta = B/L$ . Pour d'autres conditions de fonctionnement, la portance baisse par suite d'écoulements latéraux importants.

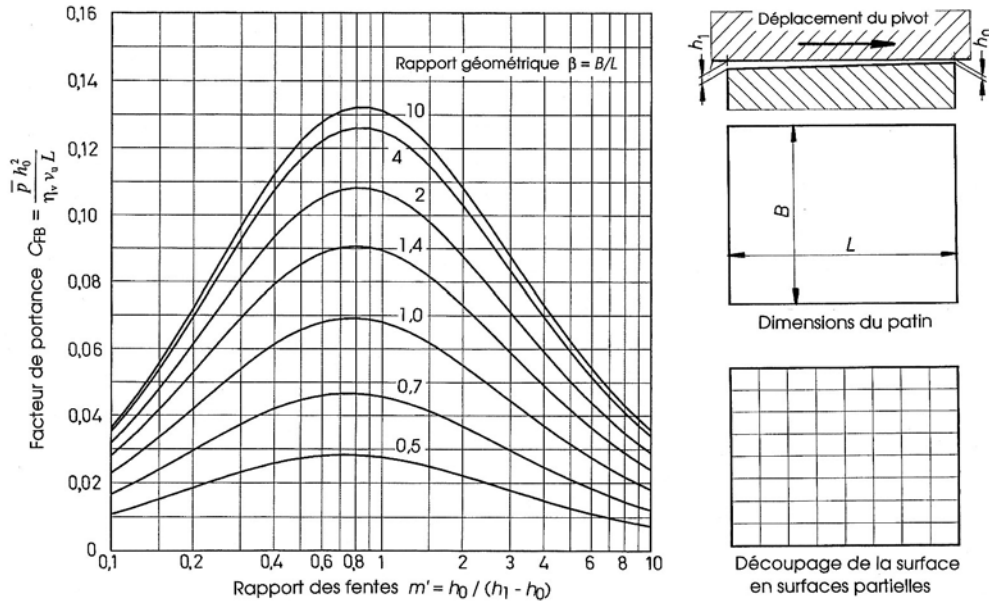


Figure 13.3 Portance d'un patin plan incliné en fonction du rapport des fentes pour diverses valeurs  $\beta$

### 13.1.3.2 ÉPAISSEUR MINIMALE DU FILM

Les conditions optimales de fonctionnement dépendent essentiellement de l'épaisseur minimale  $h_0$  et de la différence d'épaisseur  $h_1 - h_0$  sur la longueur  $L$  du patin. En partant du rapport proposé, il est possible d'écrire :

$$C_{FB} = \frac{\bar{p} h_0^2}{\eta_v v_u L} = \text{constante.} \quad (13.3.1)$$

pour un rapport géométrique  $\beta = B/L$  donné et un rapport  $m' = h_0/(h_1 - h_0)$  connu. Désignons par  $C_{FB}$  cette constante visible sur la figure et déterminons l'épaisseur minimale de la couche de fluide par :

$$h_0 = \sqrt{\frac{C_{FB} \eta_v v_u z B L^2}{F_a}}. \quad (13.3.2)$$

*Contrôle supplémentaire* : la hauteur minimale recommandée par l'expérience vaut :

$$h_0 \geq 10^{-5} \cdot (5 d [\text{m}])^{0,5}.$$

Pour un rapport  $\beta = 1,0$  et pour  $m' = 0,8$ , la figure 13.3 permet de trouver :  $C_{FB} \approx 0,07$ . Cette relation fixe l'épaisseur minimale du film fluide si toutes les autres dimensions sont connues, en particulier si la viscosité est donnée. L'épaisseur minimale étant trouvée, l'épaisseur maximale se détermine à partir du rapport  $m = 1/m'$  par :

$$h_1 = (1 + m) h_0 = (1 + 1/m') h_0. \quad (13.3.3)$$

La pente constante du patin se calcule par :

$$\tan \alpha = (h_1 - h_0)/L. \quad (13.3.4)$$

Cette pente est obtenue soit par usinage sur les petites butées à surfaces inclinées, soit par déformation ou pivotement du patin autour de son point ou de sa ligne d'appui. Dans ce cas, le point ou la ligne de pivotement doit se trouver sur la ligne d'action de la poussée résultante. La position approximative de ce point peut se calculer de la manière suivante : comme l'expression de la pression  $p(x,y)$  n'est pas donnée dans cet exposé, nous pouvons admettre une répartition transversale de la pression semblable dans toute section plane verticale parallèle au plan  $Oxy$ .

La somme des moments statiques des poussées élémentaires par rapport à l'axe  $Oy$  doit être égale au produit de la distance au centre de poussée par la force normale  $F_n = F_a$ , soit  $x_n F_a$ . En introduisant l'expression de la pression  $p_{B=\infty}$  en fonction du rapport  $\xi = x/L$  et de  $m'$ , l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\Rightarrow x_n \int_{x=0}^{x=L} \frac{m'^2 (1-x/L)(x/L)}{(1+2m')(m'+x/L)} dx = \int_{x=0}^{x=L} x \frac{m'^2 (1-x/L)(x/L)}{(1+2m')(m'+x/L)} dx. \quad (13.3.5)$$

l'abscisse  $x_n$  se trouvant au centre de gravité de la colline de pression définie par  $p(x,y)$ .

### 13.1.3.3 PERTES SUR LE PATIN ET COEFFICIENT DE FROTTEMENT

Le coefficient de frottement équivalent  $\mu_e$  pour un patin de largeur finie peut se trouver par la relation proposée par Vogelpohl [2.59] :

$$\mu_e = \frac{\eta_v v_u}{p_{\text{moy}} h_0} \cdot \frac{4m'}{1+2m'} \left[ (1+2m') \ln \frac{1+m'}{m'} - 1,5 \right]. \quad (13.4.1)$$

Si l'on tient compte de l'expression de la pression moyenne selon relation (13.2.4), après simplification, le coefficient de frottement équivalent se calcule simplement par :

$$\mu_e = \frac{4}{5} \cdot \frac{(1+2m') \ln[(1+m')/m'] - 1,5}{(L/h_0)m' / [1+a(L/B)^2]} \cdot \left\{ (1+2m') \ln[(1+m')/m'] - 2 \right\}. \quad (13.4.2)$$

Le coefficient de frottement dépend également des rapports  $L/B$  des côtés du patin et de  $L/h_0$ . Pour rendre la représentation du coefficient de frottement indépendante des grandeurs particulières de la butée, introduisons le facteur de frottement équivalent défini par :

$$C_{\mu_e} = \mu_e \{ p L / (\eta_v v_u) \}^{0,5},$$

voir la figure 13.4.

Ce facteur est minimal pour un rapport  $m' = 0,4$  à  $0,6$  suivant le rapport  $\beta$ . *Attention* : pour extraire le coefficient de frottement équivalent de la figure 13.4, il faut tenir compte de l'expression du coefficient de frottement équivalent défini par :

$$C_{\mu_e} \Rightarrow \mu_e = \sqrt{\frac{\eta_v v_u}{p_{\text{moy}} L}} \cdot \sqrt{\frac{1}{C_{\text{PB}}}} \cdot \frac{4m'}{1+2m'} \left[ (1+2m') \ln \frac{1+m'}{m'} - 1,5 \right]. \quad (13.4.3)$$

En supposant des charges égales sur tous les patins, la puissance perdue dans la butée se trouve à partir du coefficient de frottement équivalent, de la force axiale et de la vitesse circonférentielle moyenne de glissement par :

$$P_{\text{fr}} = \mu_e F_a v_u = \mu_e F_a \omega d/2. \quad (13.4.4)$$

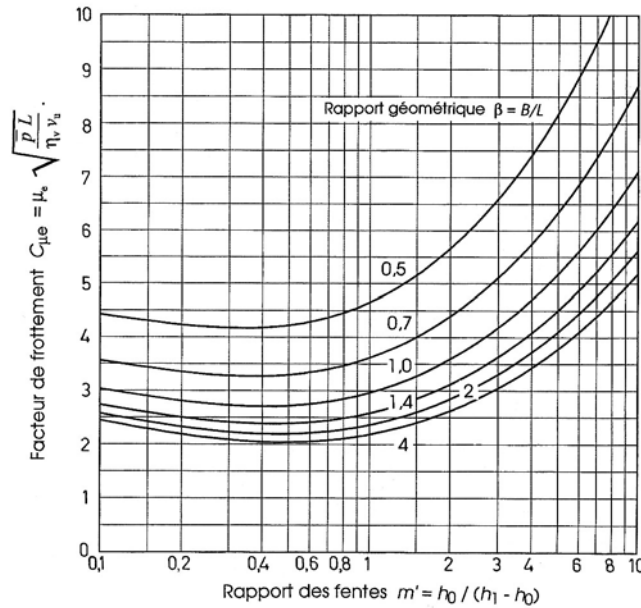


Figure 13.4 Facteur  $C_{\mu e}$  du coefficient de frottement équivalent en fonction de  $m'$  pour divers  $\beta$

#### 13.1.3.4 DÉBIT DE FLUIDE ENTRE LES PATINS ET LE PIVOT

En partant de l'expression du débit valable pour le patin infiniment large avec une fente d'entrée  $B h_1$ , une fente de sortie  $B h_0$ , le débit total à prévoir pour la butée complète sera :

$$\dot{V}_{\text{butée}} = z \frac{1+m}{2+m} B v_u h_0. \quad (13.5.1)$$

En supposant les pertes par cisaillement du fluide devant s'évacuer entièrement par le fluide en circulation entre tous les patins et le pivot, l'élévation de température du fluide peut se trouver par :

$$\Delta \vartheta = \frac{\mu_e F_a v_u}{C \rho \dot{V}_{\text{butée}}}, \quad (13.5.2)$$

avec :  $C$  chaleur massique du fluide,  
 $\rho$  masse volumique du fluide.

L'échauffement du patin et la déformation d'origine thermique et mécanique du patin modifient la forme de la fente. Cette modification est particulièrement importante sur la surface de glissement des patins de grandes dimensions. Afin d'éviter ce gonflement, la différence de température entre l'extérieur et l'intérieur ne devrait pas dépasser 20 K.

#### 13.1.3.5 QUALITÉ DU CONTRÔLE DE LA BUTÉE

La méthode de calcul proposée pour trouver les dimensions et les conditions de fonctionnement de la butée hydrodynamique est basée sur des relations proposées par divers auteurs. Les résultats correspondent assez bien avec la réalité pour autant que les patins restent plans et que la viscosité du fluide soit parfaitement connue dans la zone sous pression. Ce dernier point est difficilement déterminable manuellement car les caractéristiques du fluide varient rapidement en fonction de la température atteinte, température qui est une fonction directe des pertes et des conditions de transmission de l'énergie calorifique.

Généralement, le calcul part de la charge axiale  $F_a$ , de la fréquence de rotation et de la place à disposition. La pression moyenne introduite vaut environ :

$$p_{\text{moy}} \leq 2,5 \text{ N/mm}^2,$$

et la détermination de l'aire de glissement s'effectue en supposant un facteur de remplissage :

$$\phi = 0,6 \text{ à } 0,8.$$

Finalement, il est admis un rapport  $\beta = B/L \approx 1,0$ , le nombre de patins  $z$ , ce qui permet de trouver les autres dimensions des patins.

#### 13.1.4 CALCUL D'UNE BUTÉE SOUS CHARGE AXIALE VARIABLE

La charge axiale sur la butée peut être constante dans le cas de machines à marche régulière ou elle peut devenir variable si la charge axiale varie en fonction du temps ou de la position angulaire du pivot. Si la charge augmente, l'épaisseur de fluide entre les patins et le pivot diminue, cette modification d'épaisseur engendrant une pression supplémentaire par l'écrasement du film. L'équation différentielle de Reynolds décrit la formation de la pression dans le cas général (11.7.2). En appliquant le principe de superposition des effets et en admettant la constance de la masse volumique du fluide, l'équation différentielle particulière pour l'écrasement du film s'écrit, fonction du temps  $t$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -12 \eta_v \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (13.5.1)$$

avec :  $p$  pression dépendant des coordonnées  $x, y$ ,  
 $h$  hauteur instantanée de la fente constante sur la largeur  $B$  à l'abscisse  $x$ ,  
 $t$  temps.

Sous l'effet de l'écrasement du film sur une surface circulaire, la répartition de la pression devient parabolique. Pour une surface rectangulaire, sans possibilité d'écoulement transversal, la répartition de la pression est également parabolique. En supposant une répartition parabolique suivant la direction de l'axe  $Ox$ , en intégrant deux fois l'équation différentielle de Reynolds pour ce cas particulier et en introduisant les abscisses relatives  $X = x/L$ , avec  $0,0 \leq X \leq 1,0$ , la pression pour le patin infiniment large s'exprime par :

$$p_{(x/L)} = \frac{6 \eta_v v_z L^2}{h^3} \cdot (X - X^2), \quad (13.5.2)$$

avec :  $v_z$  la vitesse d'approche de la surface du pivot par rapport à celle du patin.

Pour une surface rectangulaire de largeur  $B$  finie, la répartition de la pression suivant la direction  $Oy$  est supposée aussi répartie paraboliquement. Cette hypothèse correspond à celle de Gumbel et Everling. En adoptant un axe  $Ox$  placé au milieu de la largeur  $B$ , l'ordonnée relative d'un point selon  $Oy$  se définit par :  $Y = (0,5 + y)/B$ , avec  $0,0 \leq Y \leq 1,0$ . La répartition de la pression due à l'écrasement du film, sur une surface élémentaire placée aux coordonnées  $(x, y)$ , s'exprime par :

$$\frac{p_{(x/L)} h^3}{\eta_v v_z L^2} = 6k (X - X^2) (Y - Y^2), \quad (13.5.3)$$

avec :  $k$  facteur de diminution de la pression :  $k = 6/(1+(L/B)^2)$ .

Le problème de la butée hydrodynamique, équipée de patins incliné à pente constante, soumise à l'écrasement du film avec une vitesse  $v_z$ , a été étudié par J. Fricke en partant des hypothèses citées. La portance du patin ou de la butée peut se trouver à nouveau par l'intermédiaire du facteur de portance  $C_{FB*V}$  défini par :



$$C_{FB^*v} = \frac{\bar{p} h_0^2}{\eta_v v_z L^2} = 2k \frac{m'^3}{1+2m'} \left[ \ln \frac{m'}{1+m'} [1-2(1+m')] - 2 \right], \quad (13.5.4)$$

avec :  $m' = h_0/(h_1-h_0)$ ,  
et :

$$C_{FBv} = C_{FB^*v} \left( \frac{L}{B} \right)^2. \quad (13.5.5)$$

Cette valeur est représentée sur la figure 13.5 en fonction du rapport des fentes  $m'$  et du rapport des dimensions  $1/\beta = L/B$ . Pour les patins mobiles autour d'un point ou d'une ligne, l'abscisse de ce point ou de cette ligne impose la position de la poussée résultante et finalement l'inclinaison de la surface. Cette inclinaison intervient alors simultanément dans le mouvement combiné de glissement du pivot sur les patins et du mouvement à vitesse  $v_z$  perpendiculaire.

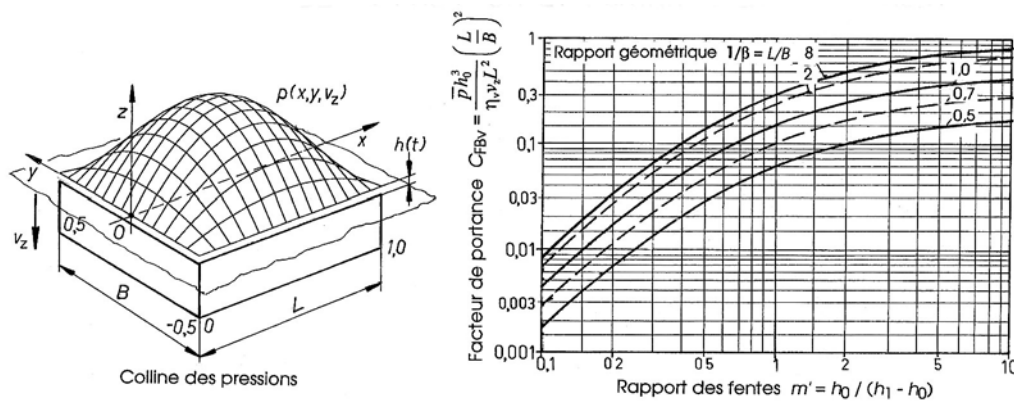


Figure 13.5 Répartition parabolique de la pression pendant l'écrasement du film  
Coefficient de portance à l'écrasement selon J. Fricke en fonction de  $m'$  et  $1/\beta = L/B$

En désignant par  $F_{nu}$  la poussée créée par le glissement du pivot à la vitesse  $v_u$  et par  $F_{né}$  la poussée engendrée par l'écrasement du film, la portance totale de la butée est égale à :

$$F_n = F_a = F_{nu} + F_{né}. \quad (13.5.6)$$

### 13.1.5 EXEMPLE DE CONTRÔLE D'UNE BUTÉE HYDRODYNAMIQUE

Soit une butée hydrodynamique pour machine hydraulique à axe vertical devant supporter une charge axiale  $F_a = 5\,000\text{ kN}$  à la fréquence de rotation  $n = 1,8\text{ t/s}$ . L'arbre vertical de la turbine présente un diamètre de 950 mm.

#### 13.1.5.1 DIMENSIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA BUTÉE

Selon la place à disposition dans la machine hydraulique, le diamètre minimal de la butée devrait être plus grand que 1600 mm. Après recherche de plusieurs variantes de conception, les grandeurs adoptées sont finalement :

- diamètre moyen de la butée :  $d = 2200\text{ mm}$ ,
- largeur du patin :  $B = 550\text{ mm}$ ,
- longueur du patin :  $L = 550\text{ mm}$ ,
- nombre de patins :  $z = 8$ ,
- rapport géométrique :  $\beta = B/D = 550/550 = 1,00$ ,
- diamètre intérieur :  $d_i = 2200\text{ mm} - 550\text{ mm} = 1650\text{ mm}$ ,

- diamètre extérieur :  $d_e = 2200 \text{ mm} + 550 \text{ mm} = 2750 \text{ mm}$ ,
- facteur de remplissage :  $\phi = 8 \cdot 550 \text{ mm} / (\pi \cdot 2200 \text{ mm}) = 0,64$ .
- fréquence de rotation :  $n = 1,8 \text{ t/s}$ ,
- vitesse angulaire :  $\omega = 2 \pi \cdot 1,8 \text{ 1/s} = 11,31 \text{ rad/s}$ ,
- vitesse moyenne de glissement :  $v_u = \omega \cdot d/2 = 12,44 \text{ m/s}$ .
- pression moyenne :  $p_{\text{moy}} = 5\,000\,000 \text{ N} / (8 \cdot 550 \cdot 550 \text{ mm}^2) = 2,066 \text{ N/mm}^2$ .

#### 13.1.5.2 CHOIX DU FLUIDE ET CONDITIONS DE TRANSFERT DE CHALEUR

L'huile adoptée est une huile minérale de lubrification. Nous admettons pour simplifier les données les mêmes caractéristiques que l'huile pour le palier hydrostatique, soit une huile ISO-VG 46, voir chapitre 12. L'huile en circulation vers l'extérieur passe dans un refroidisseur de telle sorte que la température d'entrée dans le bac contenant la butée est 30°C. La surface libre d'échange du bac est estimée à 15 m<sup>2</sup>, la température étant 25°C pour l'air circulant avec une vitesse de 1 m/s, le coefficient global de transmission de chaleur sur la paroi du bac à huile est admis à 19 W/m<sup>2</sup> K.

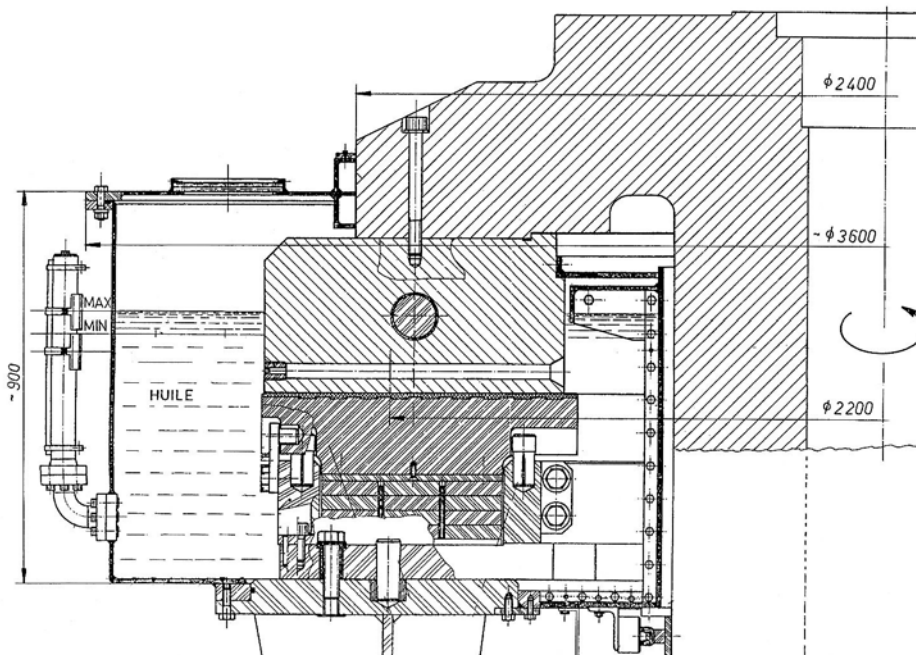


Figure 13.6 Butée hydrodynamique avec pivot et bac à huile (conception ACMV)

#### 13.1.5.3 TEMPÉRATURE DE FONCTIONNEMENT ET PERTES

La recherche de la température d'équilibre est le point crucial de la solution. Le calcul manuel est excessivement laborieux si l'on tient compte de la variation des caractéristiques du fluide et du comportement des patins. Une première possibilité consiste à rechercher les pertes pour plusieurs températures et à interpoler dans la table des résultats. Trois calculs sont effectués aux températures :

Température de contrôle	45°C	50°C	55°C	
- masse volumique :	0,863	0,860	0,857	kg/dm <sup>3</sup> ,
- viscosité cinématique :	36,83	29,92	24,64	mm <sup>2</sup> /s
- viscosité dynamique :	0,0318	0,0257	0,0211	Pa.s
- chaleur massique moyenne :	1741	1730	1718	J/kg.K
- facteur $C_{FB}$ pour $\beta = 1$ et $m' = 0,4$ :	0,061	0,061	0,061	- -
- épaisseur minimale du film $h_0$ :	0,080	0,072	0,065	mm
- épaisseur maximale du film $h_1$ :	0,281	0,252	0,228	mm
- pente du patin $\alpha$ :	1/2736	1/3056	1/3374	- -

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

- facteur de frottement $C_{\mu}$ :	2,7	2,7	2,7
- coefficient de frottement :	1,59	1,43	1,30 ‰
- puissance perdue dans la butée :	98 898	88 946	80 860 W
- débit dans la butée :	3 405	3 066	2 767 cm <sup>3</sup> /s
- puissance évacuée par le bac :	5 700	7 125	8 550 W
- puissance évacuée par l'huile :	76 757	91 232	101 848 W
- différence des puissances : produite - évacuée :	16 441	-9 411	-25 538 W

#### 13.1.5.4 POINT DE FONCTIONNEMENT

Ce tableau de valeurs à trois températures différentes permet d'estimer la température d'équilibre en utilisant une interpolation linéaire entre 45°C et 50°C :

Température finale :  $\vartheta_{\text{finale}} = 45^{\circ}\text{C} + [16441/(16441+9411)] 5^{\circ}\text{C} = 48,2^{\circ}\text{C}$ .

Les grandeurs définitives sont :

Températures :	- d'équilibre	48 °C
	- ambiante	25 °C
	- d'entrée du lubrifiant	30 °C
Fluide :	- masse volumique	0.861 kg/dm <sup>3</sup>
	- viscosité cinématique	32.5 mm <sup>2</sup> /s
	- viscosité dynamique	0.028 Pa s
	- chaleur massique moyenne	1734 J/kg
	- débit total de lubrifiant	3,2 l/s
Chaleur :	- coefficient global alpha	19,0 W/m <sup>2</sup> K
	- vitesse de l'air sur la paroi	1,0 m/s
Puissances :	- produite sur les patins	93,3 kW
	- évacuée par le carter :	6,6 kW
	- évacuée par l'huile :	86,7 kW
Patins :	- hauteur minimale du film	0,075 mm
	- hauteur maximale du film	0,264 mm
	- coefficient de frottement	0,0015 ou 1,5 ‰

Remarque :

Ce calcul présuppose une quantité d'huile circulant entre les patins et le pivot exactement égale au débit d'huile passant dans l'échangeur de chaleur extérieur.

## 13.2 BUTÉES HYDRODYNAMIQUES À PLUSIEURS PENTES

La plupart des butées hydrodynamiques des grandes machines sont équipées de patins à pente constante, la pente étant obtenue en soutenant le patin sur la ligne d'action de la poussée résultante. Ces butées peuvent supporter la charge axiale seulement dans un seul sens de rotation. Si la machine doit pouvoir inverser son sens de rotation, les patins doivent posséder une face inclinée pour chaque sens de glissement. L'inclinaison de la partie plane du patin correspond aux conditions optimales trouvées lors du calcul de la butée. Il est possible de choisir d'autres formes de fente entre le pivot et le patin : patin à pente combinée avec seuil ou patin à deux seuils, patin à face bombée selon une courbe définie. Plusieurs propositions dans ce sens sont à disposition des projeteurs de petites butées usinées.

### 13.2.1 BUTÉE AVEC PATINS À DEUX SEUILS

La butée avec patins à deux seuils est constituée de deux parties planes parallèles séparées par une marche. Ces deux surfaces sont également parallèles à la surface du pivot. En

supposant un patin infiniment large, la variation de la pression sur chacune des surfaces ne peut être que linéaire car les relations développées précédemment pour une surface oblique ne sont pas applicables à cette forme de film porteur. Toujours en admettant provisoirement un patin infiniment large, l'équation de Reynolds selon texte précédent permet de trouver la valeur de la pression dans les deux domaines de part et d'autre du seuil, compte tenu du changement du sens du système de coordonnées dans la mise en équation :

$$\text{pour } 0 \leq x \leq L_1 \text{ avec } h = h_1 : p = 6 \eta_v v_u \frac{h_1 - h_{12}}{h_1^3} x. \quad (13.6.1)$$

$$\text{pour } 0 \leq x \leq L_2 \text{ avec } h = h_2 : p = 6 \eta_v v_u \frac{h_{21} - h_2}{h_2^3} x. \quad (13.6.2)$$

$$\text{avec : } h_{12} = \frac{h_1 h_2 (L_1 h_2^2 + L_2 h_1^2)}{L_1 h_2^3 + L_2 h_1^3}. \quad (13.6.3)$$

La portance du patin infiniment large, par unité de largeur, peut se trouver alors par :

$$\frac{F_\infty}{B} = \frac{3 \eta_v v_u L L_1 L_2 (\alpha - 1)}{(L_2 \alpha + L - L_2) h_2^2}. \quad (13.6.4)$$

avec :  $\alpha = h_1/h_2$ .

Les conditions optimales de portance sont atteintes lorsque :

$$h_1/h_2 = 1,87 \quad \text{et} \quad L_1/L_2 = 2,55.$$

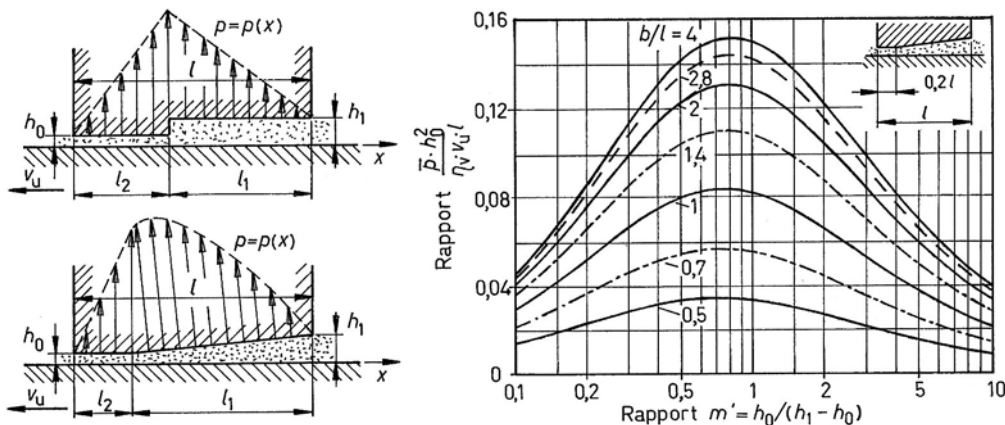


Figure 13.7 Patins à pente variable : avec deux seuils, avec pente et seuil  
Portance du patin avec pente et un seuil

Le calcul de la portance du patin de largeur finie peut introduire la relation de Schiebel [2.43] dans l'estimation de la poussée résultante. Il est également possible de trouver les forces de cisaillement du fluide, le débit dans les fentes et les pertes.

### 13.2.2 BUTÉE AVEC PATINS À UNE OU DEUX PENTES ET UN SEUIL

Ce type de patin est utilisé surtout dans les butées usinées de petites dimensions prévues pour un seul ou pour deux sens de rotation. La mise en équation du comportement part également de patins infiniment larges, de l'équation différentielle de Reynolds appliquée dans une seule direction, de l'intégration de cette équation sur le seuil, longueur  $L_2$ , et sur la partie pentue, longueur  $L_1$ . L'épaisseur du film à l'entrée est  $h_1$ , sur le seuil  $h_2 = h_0$ . Les portances partielles par unité de largeur s'expriment par :

- sur le seuil : 
$$\frac{F_{\infty}}{B} = \frac{6 \eta_v v_u L_1^2}{h_2^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (\alpha - 1)}{2 \lambda \alpha^2 + \alpha + 1} \quad (13.7.1)$$

- sur la face pentue : 
$$\frac{F_{\infty}}{B} = \frac{6 \eta_v v_u L_1^2}{h_2^2} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left( \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} - \frac{3 \alpha \lambda - \lambda + 2}{2 \lambda \alpha^2 + \alpha + 1} \right) \quad (13.7.2)$$

- sur le patin : 
$$\frac{F_{\infty}}{B} = \frac{6 \eta_v v_u L^2}{h_2^2} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda)^2} \cdot \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \left[ \ln \alpha - \frac{\gamma}{\lambda \alpha} (3 \lambda \alpha - \lambda + 2) \right], \quad (13.7.3)$$

avec :  $\alpha = h_1/h_2$ ,

$$\gamma = [1 (\alpha - 1) \alpha] / (2 \lambda \alpha^2 + \alpha + 1),$$

$$\lambda = L_2/L_1.$$

En introduisant la relation de Schiebel pour un patin de largeur finie, la portance d'un patin s'exprime par (13.2.2), la valeur de  $F_{\infty}$  pouvant se tirer de la relation précédente :

$$F = \frac{5}{6} \cdot \frac{F_{\infty}}{1 + a(L/B)^2} \quad (13.7.4)$$

En remplaçant la pression moyenne :  $p_{\text{moy}} = F/(B L)$  dans les diverses expressions et après simplification, il est possible d'écrire :

$$p_{\text{moy}} = \frac{\eta_v v_u L}{h_2^2} \cdot \frac{5}{1 + a(L/B)^2} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda)^2} \cdot \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \left[ \ln \alpha - \frac{\gamma}{\lambda \alpha} (3 \lambda \alpha - \lambda + 2) \right], \quad (13.7.5)$$

le facteur de portance  $C_{\text{FB}}$  valant dans le cas de ce type de butée:

$$C_{\text{FB}} = \frac{p_{\text{moy}} h_2^2}{\eta_v v_u L} \cdot \frac{5}{1 + a(L/B)^2} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda)^2} \cdot \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \left[ \ln \alpha - \frac{\gamma}{\lambda \alpha} (3 \lambda \alpha - \lambda + 2) \right]. \quad (13.7.6)$$

Exprimons encore le rapport des fentes par  $m' = h_0/(h_1 - h_0) = h_2/(h_1 - h_2) = 1/(\alpha - 1)$ . Il est possible de représenter la portance en fonction du rapport des fentes, figure 13.8, comme pour la butée à patins à pente constante.

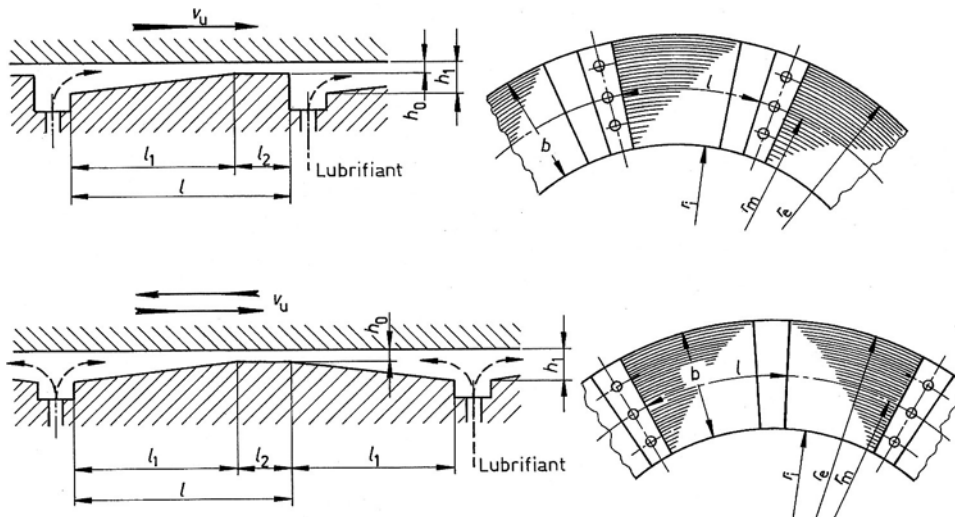


Figure 13.8 Butées hydrodynamiques avec patins à seuil pour un ou deux sens de rotation

Il est également possible de trouver l'expression des forces de cisaillement sur les deux faces du patin, le débit à l'entrée et les pertes. Le patin prévu pour deux sens de rotation possède deux faces pentues dont une seule est active pendant le glissement du pivot.

### 13.3 PALIER RADIAL SOUS CHARGE STATIQUE

L'étude du palier radial hydrodynamique commencera par la recherche de la répartition de la pression dans le coussinet cylindrique sous charge radiale constante, la longueur du coussinet étant infiniment grande. Elle se poursuivra par une discussion sur la répartition de la pression dans le sens axial pour un coussinet réel de largeur finie. Les pertes seront également traitées depuis le démarrage de l'arbre et la valeur du coefficient de frottement et des pertes sera discutée en fonction des divers paramètres intervenant dans le palier cylindrique.

#### 13.3.1 GRANDEURS FONDAMENTALES

La surface intérieure du coussinet est lisse dans le palier radial cylindrique, la formation du coin hydrodynamique étant créé par le jeu entre l'arbre et le coussinet. Les caractéristiques générales de cet élément de machines sont définies ci-après.

##### 1. Dimensions géométriques

Soit :	$d = 2 r$	diamètre de l'arbre cylindrique,
	$D = 2 R$	diamètre intérieur du coussinet cylindrique,
	$B$	longueur utile du coussinet,
	$\beta = B/D$	rapport géométrique dans le coussinet,
	$j_d = D - d$	jeu diamétral du palier,
	$j_r = R - r$	jeu radial du palier,
	$r = 0,5 d$	rayon de courbure de l'arbre,
	$R = 0,5 D$	rayon de courbure du coussinet (la courbure est négative),
	$n$	la fréquence de rotation relative entre l'arbre et le coussinet en tours/s,
	$\underline{\omega} = 2 \pi \underline{n}$	la vitesse angulaire relative entre l'arbre et le coussinet.

Sous l'action de la force radiale  $F_r$  au repos, le contact entre l'arbre et l'alésage du coussinet s'établit le long des génératrices communes, les axes des deux cylindres étant supposés parfaitement alignés. Le jeu relatif du palier se définit par le rapport :

$$\psi = \frac{D-d}{D} = \frac{R-r}{R} = \frac{j_r}{R} = \frac{j_d}{D}. \quad (13.8.1)$$

Ce jeu est exprimé habituellement en ‰ et se situe entre 0,5 et 3 ‰.

##### 2. Choix du jeu relatif

Le choix du jeu relatif dans le palier est dicté par les conditions de conception et de fonctionnement du palier. En désignant par  $v_u = \omega r$  la vitesse de glissement de l'arbre dans le coussinet, le jeu relatif moyen peut se donner par l'expression :

$$\psi \approx \sqrt[4]{\frac{v_u [m/s]}{2,5}} \cdot 10^{-3}. \quad (13.8.2)$$

La figure 13.9 montre les limites usuelles du jeu relatif en fonction de la vitesse de glissement. La limite inférieure est applicable aux paliers équipés de coussinets orientables, de rapport  $B/D$  inférieur à 0,8 et à faible différence des coefficients de dilatation des matériaux constituant l'arbre et le coussinet. La limite supérieure intervient lorsque le coussinet est monté rigidement dans un bâti, le rapport  $B/D$  supérieur à 0,8, une différence importante des coefficients de dilatation thermique des deux constituants du palier. Ces limites peuvent être dépassées dans des cas spéciaux lorsque des exigences particulières de centrage sont impératives comme par exemple dans les paliers de broches pour machines-outils.

### 3. Pression moyenne

La pression moyenne dans le palier se définit arbitrairement par le rapport entre la charge radiale  $F_r$  et la surface projetée du coussinet  $B D$  :

$$\bar{p} = p_{\text{moy}} = \frac{F_r}{B D}. \quad (13.8.3)$$

La pression maximale réelle est un multiple de cette pression moyenne.

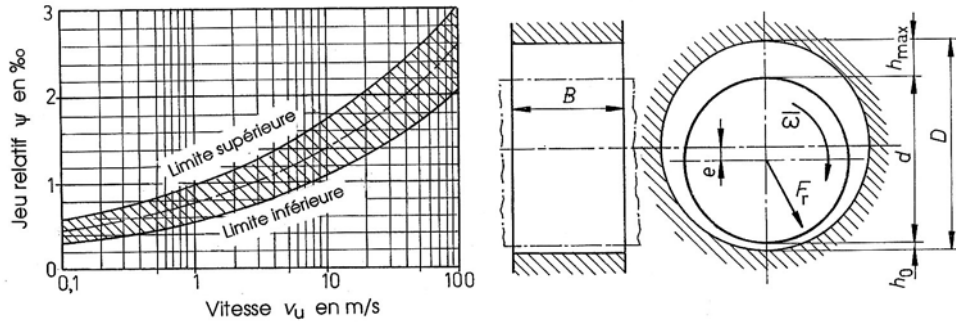


Figure 13.9 Jeu relatif recommandé Dimensions géométriques fondamentales

### 4. Nombre de Sommerfeld

Si  $\omega = 2 \pi n$  représente la vitesse angulaire de l'arbre par rapport au coussinet supposé immobile,  $\psi$  le jeu relatif,  $p_{\text{moy}}$  la pression moyenne et  $\eta_v$  la viscosité dynamique du fluide séparant l'arbre du coussinet, les conditions de fonctionnement du palier hydrodynamique dépendent d'un facteur de similitude défini par Sommerfeld :

$$So = \frac{p_{\text{moy}} \psi^2}{\eta_v \omega} = \frac{\bar{p} \psi^2}{\eta_v \omega}. \quad (13.8.4)$$

Ce facteur de similitude, indépendant du système d'unités homogènes utilisé, est dénommé nombre de Sommerfeld. Il permet de comparer des paliers hydrodynamiques de grandeurs et de charges différentes.

### 5. Coefficient de frottement équivalent

Si le palier travaille dans le domaine hydrodynamique, la loi de Coulomb du frottement de glissement n'est plus applicable. Toutefois, la définition du coefficient de frottement équivalent part de la relation développée au chapitre 1. Les pertes sont calculables par :

$$M_{\text{fr}} = \frac{1}{2} d \mu_e F_r,$$

$$\text{et :} \quad \mu_e = \frac{2 M_{\text{fr}}}{F_r d}. \quad (13.8.5)$$

Le coefficient de frottement équivalent est souvent exprimé par rapport au jeu relatif du palier par le rapport  $\mu_e/\psi$ .

### 6. Excentricité relative de l'arbre

Sous l'effet de la charge radiale, l'arbre se déplace dans le coussinet et s'excentre de la quantité  $e$ . L'excentricité relative se définit par le rapport géométrique :

$$\varepsilon = \frac{e}{R - r} = \frac{2e}{D - d} = \frac{e}{R \psi}. \quad (13.8.6)$$

Lorsque l'arbre touche la surface cylindrique intérieure du coussinet, l'excentricité relative atteint sa valeur maximale soit  $\varepsilon = 1,0$ .

### 13.3.2 PALIER À COUSSINET INFINIMENT LONG

Les hypothèses introduites dans la mise en équation de la butée hydrodynamique sont conservées et adaptées au calcul du palier radial cylindrique, compte tenu de la géométrie du film entre l'arbre et le coussinet, de la position de la force radiale et de son intensité.

#### 13.3.2.1 HYPOTHÈSES GÉNÉRALES

Les hypothèses générales introduites dans la mise en équation du comportement du palier à coussinet infiniment long sont les suivantes :

1. Les forces de la pesanteur et d'inertie dans le fluide sont négligeables vis à vis des forces de cisaillement et de frottement,
2. La viscosité et la masse du fluide sont supposées constantes, indépendante de la position de l'arbre et du temps,
3. L'arbre et le coussinet possèdent des surfaces lisses, indéformables, en contact avec le fluide. Pratiquement, l'action de la pression variable sur les pièces et de la température engendre une modification de la géométrie de la fente. La théorie dite élasto-hydrodynamique tient compte de ces effets supplémentaires.
4. La variation de l'épaisseur du fluide intercalé est beaucoup plus petite que la variation des dimensions transversales entre l'arbre et le coussinet,
5. L'écoulement dans la fente obéit aux lois de l'écoulement laminaire et les fluides sont du type newtonien,
6. Les axes de l'arbre et du coussinet restent parfaitement parallèles dans toute position et sous toute charge extérieure,
7. La pression est constante dans la direction perpendiculaire à l'épaisseur de la fente; elle ne dépend donc pas de la hauteur désignée par  $z$ ,
8. Le fluide adhère sans glissement sur les surfaces de l'arbre et du palier.

Dans le cas général, l'arbre et le coussinet peuvent être en mouvement de rotation. Nous conservons dans le développement la tradition d'un sens de rotation de l'arbre dans le sens horaire. Les vitesses circonférentielles de l'arbre et du coussinet peuvent se définir en fonction des vitesses angulaires, compte tenu du sens de rotation, par :

- arbre :  $v_{ud} = \frac{1}{2} \omega_d d$ ,
- coussinet :  $v_{uD} = \frac{1}{2} \omega_D D$ ,
- résultante :  $v_u = v_{ud} + v_{uD} \approx (\omega_d + \omega_D) R = \underline{\omega} R$ .

#### 13.3.2.2 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE REYNOLDS

Le système de coordonnées adopté pour la mise en équation du comportement est le suivant :

- axe  $Ox$  : dans la direction circonférentielle, le sens positif étant le sens horaire. Il s'agit à vrai dire d'un système de coordonnées cylindriques dans lequel l'axe  $Ox$  suit la forme du cylindre de l'arbre ou de l'alésage du coussinet, donc :  $x = \varphi R$ ,
- axe  $Oy$  : dans la direction axiale de l'arbre et du coussinet,
- axe  $Oz$  : perpendiculaire à la fente remplie de fluide.

L'origine du système de coordonnées se trouve au milieu de la largeur  $B$  du coussinet, au point où la fente est à épaisseur maximale. À partir des hypothèses introduites, en particulier de la constance de la viscosité et de la masse volumique, l'équation différentielle de Reynolds s'écrit :



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6 \eta_v \left[ (v_{ud} + v_{uD}) \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right].$$

Cette relation suppose des mouvements circulaires de l'arbre et du coussinet seulement dans la direction circonférentielle. Introduisons tout d'abord les grandeurs relatives suivantes :

- position angulaire :  $\varphi = x/R,$
- arc élémentaire :  $R \partial\varphi,$
- position axiale :  $\bar{y} = 2 y/B.$

L'équation différentielle se transforme en :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h^3 \frac{\partial p}{R \partial \varphi} \right) + \frac{2}{B} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) = 6 \eta_v \left[ R \bar{\omega} \frac{\partial h}{R \partial \varphi} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right]. \quad (13.9.1)$$

Après multiplication de l'équation différentielle par  $1/(R-r)^3$ , cette dernière devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{h^3}{(R-r)^3} \frac{1}{R^2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{2R}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{h^3}{(R-r)^3} \frac{1}{R^2} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) = \\ = 6 \eta_v \bar{\omega} \frac{1}{(R-r)^2} \left[ \frac{1}{R-r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \frac{2}{\bar{\omega}} \frac{1}{R-r} \frac{\partial h}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (13.9.2)$$

Transformons encore cette dernière expression en la multipliant à gauche et à droite par le rapport  $(R-r)^2/\eta_v \bar{\omega}$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{h}{(R-r)} \right)^3 \left( \frac{R-r}{R} \right)^3 \frac{1}{\eta_v \bar{\omega}} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + \left( \frac{D}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \left( \frac{h}{(R-r)} \right)^3 \left( \frac{R-r}{R} \right)^3 \frac{1}{\eta_v \bar{\omega}} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right] = \\ = 6 \left[ \frac{\partial \frac{h}{R-r}}{\partial \varphi} + \frac{2}{\bar{\omega}} \frac{\partial \frac{h}{R-r}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (13.9.3)$$

Finalement, introduisons les grandeurs complémentaires suivantes :

- le rapport géométrique :  $\beta = B/D,$
- la hauteur relative  $H = h/(R-r),$
- le jeu relatif :  $\psi = (R-r)/R,$
- le chiffre de pression :  $\Pi = p \psi^2/\eta_v \bar{\omega},$
- avec :  $p$  la pression exercée par le fluide fonction de  $\varphi.$

L'équation différentielle de Reynolds exprimée en grandeurs relatives devient :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{D}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( H^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{y}} \right) = 6 \eta_v \left[ \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \frac{2}{\bar{\omega}} \frac{\partial H}{\partial t} \right]. \quad (13.9.4)$$

Cette expression est l'équation différentielle aux dérivées partielles en charge variable. Dans cette relation, il ne faut pas confondre le chiffre de pression  $\Pi$  en un point précis du coussinet avec le nombre de Sommerfeld défini par :

$So = p_{moy} \psi^2/\eta_v \bar{\omega}$ , où  $p$  est la pression moyenne donnée par le rapport :  $p = F_r/(B D).$

L'étude du comportement se limite ici au palier cylindrique à charge radiale et vitesse angulaire constantes. La position de l'arbre dans le coussinet dépend des caractéristiques de la couche de fluide, en particulier de sa viscosité, et de la vitesse de glissement de l'arbre par rapport à la surface intérieure du coussinet.

### 13.3.2.3 HAUTEUR DE LA FENTE ENTRE L'ARBRE ET LE COUSSINET

Le coussinet est alimenté en fluide visqueux à l'endroit où la fente entre l'arbre et le coussinet est maximale. Ce type de palier est dénommé palier 360°. L'épaisseur du film a déjà été mise en équation au chapitre 11 lors de l'étude de l'écrasement du fluide entre deux cylindres plein et creux. Dans ce palier, la hauteur de la fente est fonction de l'angle  $\varphi$  en supposant le maintien du parallélisme entre le coussinet et l'arbre. La hauteur de la fente s'exprime par :

$$h(\varphi) = j_r (1 + \varepsilon \cos \varphi) = \psi R (1 + \varepsilon \cos \varphi),$$

ou sous forme relative :  $H(\varphi) = h/(\psi R) = 1 + \varepsilon \cos \varphi.$  (13.9.5)

Cette relation est exacte seulement pour un coussinet tournant sur un arbre fixe. Comme l'excentricité reste toujours beaucoup plus petite que les rayons de l'arbre ou du coussinet, cette expression est aussi applicable à un arbre tournant dans un coussinet fixe.

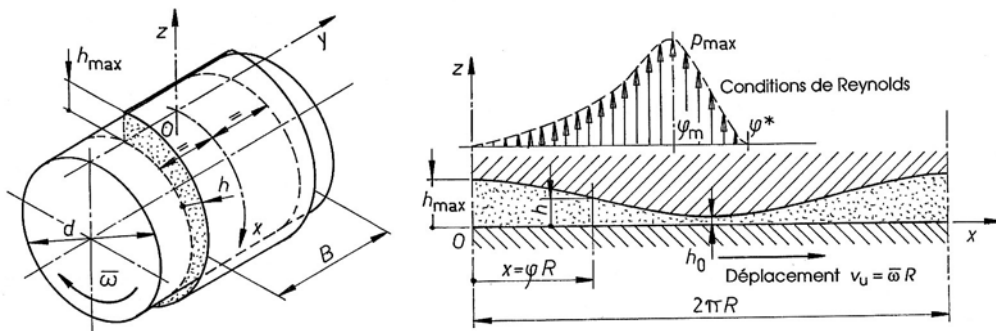


Figure 13.10 Choix du système de coordonnées dans le palier dit à 360°  
Forme développée de la fente et valeur de la pression

### 13.3.2.4 INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

La recherche de la répartition de la pression exercée par le fluide sur l'arbre en fonction de l'angle  $\varphi$  s'effectue en partant d'une excentricité relative  $\varepsilon$  entre l'arbre et le coussinet et non par l'introduction d'une force radiale sur l'arbre. La longueur du coussinet étant supposée infiniment grande, l'équation différentielle aux dérivées partielles se transforme en une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( H^3 \frac{d\Pi}{d\varphi} \right) = 6 \frac{dH}{d\varphi}. \quad (13.10.1)$$

La hauteur relative de la fente  $H = 1 + \varepsilon \cos \varphi$  et le chiffre de pression  $\Pi$  ne dépendent que d'une variable soit l'angle  $\varphi$ . Intégrons cette équation différentielle :

$$H^3 \frac{d\Pi}{d\varphi} = 6(H + C_1).$$

Pour trouver la constante d'intégration  $C_1$ , supposons que nous connaissions l'angle  $\varphi^*$  pour lequel le gradient de pression  $d\Pi/d\varphi$  est nul. La hauteur relative de la fente en ce point particulier du film porteur est désignée par  $H^*$  et posons :

$$\left. \frac{d\Pi}{d\varphi} \right|_{\varphi^*} = \frac{6}{H^{*3}} (H^* + C_1) = 0.$$

Il en résulte que  $C_1 = -H^*$ . La relation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 6 \frac{H - H^*}{H^3} = 6 \left( \frac{1}{H^2} - \frac{H^*}{H^3} \right).$$

Introduisons dans cette expression les deux hauteurs relatives :

$$H = 1 + \varepsilon \cos \varphi \quad \text{et} \quad H^* = 1 + \varepsilon \cos \varphi^*,$$

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 6 \left[ \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} - \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi^*}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} \right]. \quad (13.10.2)$$

La valeur du chiffre de pression  $\Pi$  en fonction de l'angle  $\varphi$  est trouvée par une nouvelle intégration. Cette opération mathématique est grandement simplifiée en introduisant un angle auxiliaire  $\chi = \tan \varphi / 2$  défini dans les deux expressions proposées par Sommerfeld :

$$1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \chi}, \quad 1 + \varepsilon \cos \varphi^* = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \chi^*}.$$

Sans entrer en détail sur toutes les opérations nécessaires à la solution, les intégrations partielles de ces deux expressions, introduites dans la relation (13.10.2), donnent :

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} &= \int \frac{(1 - \varepsilon \cos \chi)^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \chi} d\chi = (1 - \varepsilon^2)^{-3/2} (\chi - \varepsilon \sin \chi). \\ \int \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} &= \int \frac{(1 - \varepsilon \cos \chi)^3}{(1 - \varepsilon^2)^3} \cdot \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \chi} d\chi = \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left[ \chi - 2\varepsilon \sin \chi + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sin \chi \cos \chi + \chi) \right]. \end{aligned}$$

Le chiffre de pression en fonction de l'angle  $j$  s'exprime alors par :

$$\Pi_{(\varphi)} = \frac{6}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left[ \chi - \varepsilon \sin \chi - \frac{\chi - 2\varepsilon \sin \chi + \varepsilon^2 (\chi + \sin \chi \cos \chi) / 2}{1 - \varepsilon \cos \chi^*} \right]. \quad (13.10.3)$$

Cette expression contient l'angle auxiliaire  $\chi^*$  ou l'angle  $\varphi^*$  inconnus pour l'instant et qui restent à trouver à partir des conditions d'écoulement du fluide dans le palier.

### 13.3.2.5 ANGLE LIMITE D'ACTION DE LA PRESSION

La recherche de la position angulaire limite d'action pour laquelle la pression exercée par le film porteur sur l'arbre devient nulle a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Plusieurs explications et propositions ont été émises pendant le développement de la théorie. Afin de satisfaire simultanément la condition de pression nulle et l'équation de continuité dans l'écoulement, Reynolds avait déjà proposé les deux conditions suivantes à satisfaire, soit :

$$\Pi_{(\varphi)} = 0 \quad \text{et} \quad d\Pi/d\varphi = 0. \quad (13.11.1)$$

Cette deuxième condition est remplie par la valeur de la constante d'intégration  $C_1 = -H^*$  introduite précédemment. La première condition impose pour l'angle particulier  $\chi^*$  ou  $\varphi^*$  en plus l'égalité :

$$\chi^* - \varepsilon \sin \chi^* - [\chi^* - 2\varepsilon \sin \chi^* + \varepsilon^2 (\chi^* + \sin \chi^* \cos \chi^*) / 2] / (1 - \varepsilon \cos \chi^*) = 0.$$

Après simplification, l'expression à retenir se transforme en :

$$\varepsilon (\sin \chi^* \cos \chi^* - \chi^*) + 2 (\sin \chi^* - \chi^* \cos \chi^*) = 0. \quad (13.11.2)$$

En résolvant numériquement cette équation transcendante et en transformant l'angle auxiliaire  $\chi^*$  en angle limite  $\varphi^*$ , deux angles symétriques à  $\pi$ ,  $\pi$  étant la position angulaire de l'excentricité, satisfont cette condition :

1. l'angle  $\varphi^*$  : pour cet angle les deux conditions proposées par Reynolds sont remplies :  $d\Pi/d\varphi = 0$  et  $\Pi = 0$ . Cet angle est l'angle limite d'action de la pression du fluide.
2. l'angle  $\varphi_m$  : pour cet angle,  $d\Pi/d\varphi = 0$ , mais la pression ou le chiffre de pression est ici maximal.

Ce résultat théorique montre une particularité : l'angle compris entre la position de la pression maximale et celle de la fente minimale est égal à l'angle compris entre la fente minimale et la position de la pression nulle.

### 13.3.2.6 PORTANCE DU PALIER

La répartition de la pression  $p$  ou du chiffre de pression  $\Pi$  en fonction de l'angle  $\varphi$  étant maintenant connue, la poussée résultante sur l'arbre peut se trouver en projetant les poussées élémentaires sur un système d'axes rectangulaires. La force radiale appliquée  $F_r$  est directement opposée à cette poussée totale du fluide sur l'arbre. Adoptons un système de coordonnées  $O u v$ , l'axe  $Ov$  correspondant à l'axe  $Oz$  précédent, l'axe  $Ou$  étant perpendiculaire, l'angle  $\varphi$  étant compté positivement dans le sens horaire. Les projections des poussées élémentaires sur ces axes s'expriment par :

$$\begin{aligned} \text{- axe } O u : \quad F_u &= B \int_0^{\varphi^*} p \sin \varphi R d\varphi = B R \frac{\eta_v \bar{\omega}}{\psi^2} \int_0^{\varphi} \Pi \sin \varphi d\varphi, \\ \text{- axe } O v : \quad F_v &= B \int_0^{\varphi^*} p \cos \varphi R d\varphi = B R \frac{\eta_v \bar{\omega}}{\psi^2} \int_0^{\varphi} \Pi \cos \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (13.11.3)$$

La résultante de ces deux composantes rectangulaire vaut :  $|\mathbf{F}| = (F_u^2 + F_v^2)^{1/2}$ . Le nombre de Sommerfeld peut se trouver par :

$$So = \frac{\bar{p} \psi^2}{\eta_v \bar{\omega}} = \frac{\sqrt{F_u^2 + F_v^2} \psi^2}{2 R B \eta_v \bar{\omega}} = \frac{1}{2} \sqrt{I_u^2 + I_v^2}. \quad (13.11.4)$$

avec :  $I_u$  et  $I_v$  les intégrales intervenant dans le calcul des composantes rectangulaires. Après substitution du chiffre de pression dans les intégrales et calcul de ces intégrales, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{3}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon(1-\cos \chi^*)^2}{1-\varepsilon \cos \chi^*}, \\ I_v &= \frac{6}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{\sin \chi^* - \chi^* \cos \chi^*}{1-\varepsilon \cos \chi^*}. \end{aligned} \quad (13.11.5)$$

Finalement, le nombre de Sommerfeld se trouve par :

$$So = \frac{3}{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon \cos \chi^*)} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} (1-\cos \chi^*)^4 + (1-\varepsilon^2) (\sin \chi^* - \chi^* \cos \chi^*)^2}. \quad (13.11.6)$$

L'angle entre la ligne d'action de la force radiale  $F_r$  et la position de la fente minimale de fluide d'épaisseur  $h_0$  se trouve par :

$$\tan \beta_F = 2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{\sin \chi^* - \chi^* \cos \chi^*}{\varepsilon (1-\cos \chi^*)^2}. \quad (13.11.7)$$

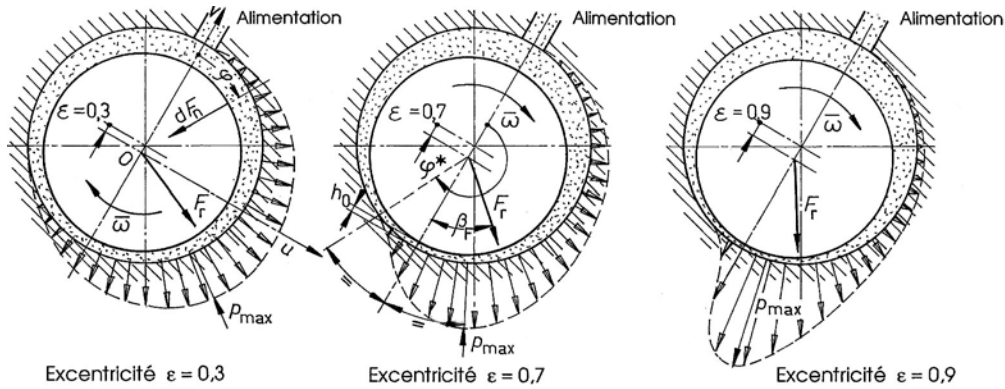


Figure 13.11 Répartition de la pression dans le palier infiniment long en fonction de l'excentricité

### 13.3.2.7 PERTES DANS LE PALIER

Le calcul des pertes fait intervenir le cisaillement du film visqueux et la contrainte de cisaillement correspondante dans le fluide :

$$\tau = \frac{\eta_v v_u}{h} + \frac{h}{2R} \cdot \frac{dp}{d\varphi}.$$

Après substitution et intégration de la force tangentielle sur la surface mouillée de l'arbre ou du coussinet, le coefficient de frottement équivalent, divisé par le jeu relatif, s'exprime par :

$$\frac{\mu_e}{\psi} = \frac{\pi}{So\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon}{2} \sin\beta. \quad (13.12.1)$$

### 13.3.2.8 PRESSION MAXIMALE

À partir du nombre de Sommerfeld, la portance du palier cylindrique par unité de longueur du coussinet se trouve par :

$$\frac{F_r}{B} = 2 R So \frac{\eta_v \bar{\omega}}{\psi^2}. \quad (13.12.2)$$

Pour l'angle  $\varphi_m$ , la pression dans le coussinet est maximale. Le rapport entre la pression maximale et la pression moyenne peut se déterminer simplement par le rapport :

$$\frac{p_{\max}}{\bar{p}} = \frac{\Pi_{\max}}{So}. \quad (13.12.3)$$

### 13.3.2.9 RÉSULTATS NUMÉRIQUES DE CALCUL

Toutes les grandeurs principales sont connues en fonction de l'excentricité relative adoptée dans l'étude. Le tableau ci-après donne les résultats numériques des diverses grandeurs valables pour ce type de palier.

Tableau 13.1  
**Grandeurs caractéristiques pour le palier cylindrique 360°  
infiniment long sous charge statique**

Excen- tricité	Angles caractéristiques			Nombres		Rapports	
	phi*	phi <sub>m</sub>	bêta	So	Π <sub>max</sub>	μ <sub>e</sub> /ψ	p <sub>max</sub> /p
0.1000	249.22	110.78	69.03	0.66	0.80	4.8370	1.21
0.2000	241.33	118.67	66.90	1.29	1.58	2.5847	1.23
0.3000	233.78	126.22	64.46	1.90	2.40	1.8685	1.26
0.4000	226.58	133.42	61.64	2.53	3.32	1.5305	1.31
0.5000	219.69	140.31	58.30	3.23	4.47	1.3366	1.39
0.6000	213.08	146.92	54.23	4.09	6.13	1.2045	1.50
0.7000	206.63	153.37	49.10	5.32	8.93	1.0918	1.68
0.8000	200.17	159.83	42.18	7.54	15.13	0.9629	2.01
0.9000	193.20	166.80	31.67	13.83	38.57	0.7575	2.79
0.9200	191.62	168.38	28.70	16.92	52.65	0.6947	3.11
0.9400	189.90	170.10	25.21	22.05	79.11	0.6178	3.59
0.9600	187.96	172.04	20.88	32.28	141.73	0.5187	4.39
0.9800	185.53	174.47	14.99	62.90	390.58	0.3777	6.21
0.9900	183.88	176.12	10.68	124.11	1090.10	0.2712	8.78
0.9950	182.73	177.27	7.59	246.49	3062.60	0.1933	12.42
0.9990	181.22	178.78	3.40	1225.49	34055.70	0.0870	27.79
0.9995	180.86	179.14	2.41	2449.23	96258.60	0.0616	39.30

### 13.3.3 PALIER CYLINDRIQUE DE LONGUEUR FINIE

Les développements mathématiques précédents pour la recherche du comportement du palier radial cylindrique à coussinet infiniment long montrent le principe du raisonnement dans la recherche de la position de l'arbre dans le coussinet. Malheureusement, ces résultats ne peuvent pas s'introduire directement dans le calcul du palier hydrodynamique réel à coussinet de longueur finie, car le rapport géométrique  $\beta = B/D$  est habituellement inférieur ou voisin de un. L'écoulement axial du film porteur ne peut plus être négligé d'où une modification très sensible des conditions de portance.

L'équation différentielle aux dérivées partielles de Reynolds n'a pas de solutions analytique. De nombreux chercheurs ont essayé de trouver des solutions approximatives proches des conditions réelles de fonctionnement du palier cylindrique. Les principales méthodes utilisées sont principalement :

1. l'hypothèse sur la répartition axiale de la pression : sinusoïdale ou polynomiale;
2. le remplacement de l'équation différentielle par une équation numérique aux différences ou l'utilisation de la méthode des éléments finis.

### 13.3.3.1 RÉPARTITION PARABOLIQUE DE LA PRESSION

En partant des résultats analytiques trouvés pour le palier cylindrique à coussinet infiniment long, la répartition de la pression dans le sens axial est supposée obéir à une loi :

$$p_{(\varphi,y)} = p_{\infty(\varphi)} k_{\beta} (1 - y^m),$$

où  $m$  est un exposant égal ou supérieur à 2 et  $k_{\beta}$  est un coefficient inférieur à 1 dépendant du rapport  $B/D$ . Cette méthode de calcul convient seulement pour des paliers composés de pièces parfaitement parallèles et la qualité du résultat dépend directement du choix de l'exposant, l'exposant devant être variable et habituellement dépendant du gradient de pression primitivement inconnu.

### 13.3.3.2 SOLUTION PAR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

La solution approchée peut aussi s'obtenir par voie numérique à partir de l'équation différentielle de Reynolds. Comme le rapport entre le jeu radial et le rayon du coussinet est très faible, la courbure de l'arbre et du coussinet est négligée. Le palier est développé suivant la direction circonférentielle  $Ox$  et le problème devient bidimensionnel. La troisième dimension est l'épaisseur du film lubrifiant. Cette surface développée est découpée en un certain nombre de sous surfaces rectangulaires. Les difficultés majeures de cette méthode sont les suivantes :

1. limiter le nombre de points de calcul à une valeur optimale afin de diminuer le nombre d'inconnues et le temps de calcul;
2. pour des excentricités relatives importantes, voisines de 1, d'obtenir une variation continue de la pression hydrodynamique, surtout dans la zone d'épaisseur minimale du film porteur;
3. de trouver les conditions aux limites en particulier la fin de la zone sous pression à partir des conditions proposées par Reynolds ou par toute autre hypothèse acceptable.

Cette solution numérique permet en principe de résoudre assez bien le problème posé par le mésalignement dans le palier hydrodynamique, la présence de rainures d'amenée en fluide, etc.. Les dérivées premières et secondes sont remplacées par leur équivalent numérique défini par trois ou cinq points situés à l'intersection des lignes du réseau de découpage de la surface totale. Les inconnues sont les pressions ou les chiffres de pression en ces points. L'écriture complète de toutes les équations aux différences finies se transforme en un système d'équations linéaires contenant autant d'inconnues qu'il y a de pressions à déterminer sur la surface mouillée de l'arbre. Les pressions sur le pourtour du réseau obéissent aux conditions imposées par la pression existant à l'entrée du fluide dans le coussinet, aux extrémités du coussinet et sur la ligne limite d'action de la pression. La pression est supposée nulle à  $y = \pm 0,5 B$ , la pression atmosphérique étant la pression de référence. La pression d'alimentation est admise égale à la pression extérieure. La limite d'action de la pression est imposée par les conditions limites proposées par Reynolds, soit  $\partial p / \partial \varphi = 0$ . Cette ligne limite ne peut se trouver que par voie itérative.

Le choix d'un réseau de maillage à mailles de dimensions variables augmente la qualité de la solution en améliorant la précision des résultats. H. Sassenfeld et A. Walther utilisèrent déjà en 1954 une méthode de ce type et résolurent manuellement des systèmes d'équations aux limites comportant jusqu'à 250 inconnues [2.56] ! Actuellement, la méthode des éléments finis et surtout une formulation adéquate des éléments facilite la recherche du comportement et des caractéristiques du palier hydrodynamique.

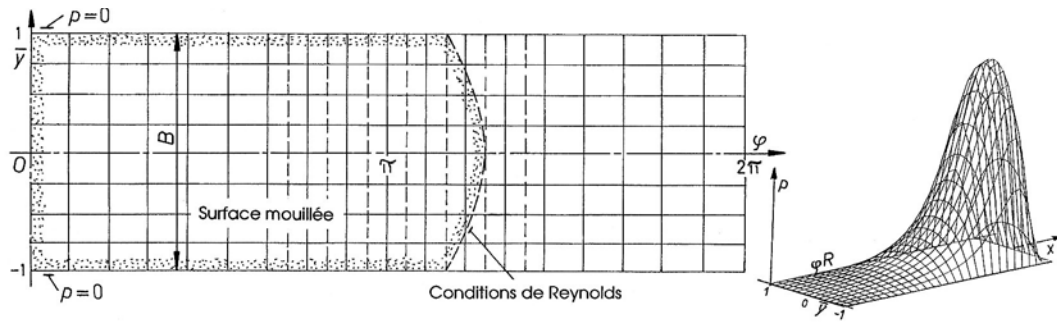


Figure 13.12 Découpage de la surface de l'arbre ou du coussinet et exemple de choix du réseau

### 12.3.4 CALCUL SIMPLIFIÉ DU PALIER CYLINDRIQUE 180°

Le palier cylindrique 180° est équipé d'un coussinet dans lequel l'amenée du fluide lubrifiant est perpendiculaire à la direction de la force extérieure. Ce sous-chapitre traite le calcul simplifié de ce type de palier hydrodynamique. Le palier est dit à 180° car la partie active du coussinet se limite à un demi cylindre creux. La force extérieure est supposée agir verticalement vers le bas, le sens de rotation correspondant au sens horaire, le coussinet se situant en dessous de l'axe horizontal. Dans la pratique, le coussinet comprend aussi un demi coussinet supérieur servant au centrage de l'ensemble dans le support de palier.

#### 12.3.4.1 CARACTÉRISTIQUES DU PALIER 180°

Le comportement du palier dépend essentiellement du nombre de Sommerfeld et du rapport géométrique  $B/D$ . Les diverses grandeurs à connaître pour pouvoir trouver le point de fonctionnement du palier 180° sont :

1. les dimensions : diamètre  $D$ , longueur du coussinet  $B$ , la fréquence de rotation  $n$ , la charge radiale  $F_r$  et la viscosité du fluide;
2. l'excentricité de l'arbre en fonction du nombre de Sommerfeld  $So$  et de  $B/D$ ;
3. le coefficient de frottement équivalent en fonction de  $So$  et de  $B/D$ ;
4. la valeur de la pression maximale engendrée par le lubrifiant en fonction de  $So$  et de  $B/D$ ;
5. la position du centre de l'arbre par rapport au centre du coussinet;
6. le débit de lubrifiant entre le coussinet et l'arbre;
7. la vitesse limite inférieure permettant d'atteindre le régime hydrodynamique et l'épaisseur minimale du film de fluide;
8. la répartition des températures dans la palier.

Toutes ces grandeurs ne peuvent pas se trouver facilement dans un calcul élémentaire du palier cylindrique.

#### 12.3.4.2 DIMENSIONS ET NOMBRE DE SOMMERFELD

Pour un type de machine donné, le rapport  $\beta = B/D$  figure dans les renseignements techniques de conception. Ce rapport géométrique est compris actuellement entre 0,2 et 1,0. La pression moyenne admissible dépend de la dureté et de la résistance mécanique des composants solides du palier : l'arbre et le revêtement du coussinet. Sous une charge radiale  $F_r$ , le diamètre nominal du coussinet sera calculé par :

$$D \geq \sqrt{\frac{F_r}{\beta \bar{p}_{adm}}}. \quad (13.13.1)$$



La fréquence de rotation  $n$  fixe la vitesse circonférentielle de l'arbre et si le coussinet est aussi mobile,  $n$  doit représenter la fréquence de rotation relative entre l'arbre et le coussinet. Le jeu relatif est adopté en fonction des valeurs recommandées selon figure 13.9, fonction de la vitesse de glissement  $v_u = \pi d n$  et de la température d'utilisation. Le choix définitif des dimensions s'effectue en adoptant un diamètre nominal faisant partie des nombres normaux et un ajustement permettant d'atteindre le jeu relatif recommandé en service.

En supposant la viscosité du lubrifiant connue et constante dans la fente entre l'arbre et le coussinet, le nombre de Sommerfeld se trouve par :

$$So = \frac{\bar{p} \psi^2}{\eta_v \bar{\omega}} = \frac{F_r}{B D} \cdot \frac{\psi^2}{\eta_v \bar{\omega}}. \quad (13.13.2)$$

La figure 13.13 donne le nombre de Sommerfeld en fonction de l'excentricité relative de l'arbre  $\epsilon$  pour cinq rapport géométrique :  $\beta = B/D = 0,125; 0,25; 0,50; 0,75$  et  $1,00$ . Connaissant le nombre de Sommerfeld et le rapport géométrique, cette figure permet de trouver l'excentricité relative et l'épaisseur minimale du film porteur. Cette figure est applicable pratiquement aux paliers cylindriques  $360^\circ$  et  $180^\circ$ , la différence n'étant sensible que pour les très faibles excentricités. L'épaisseur relative minimale est  $H_{\min} = 1 - \epsilon$  et l'épaisseur minimale du film :

$$h_0 = (1 - \epsilon) (R - r). \quad (13.13.3)$$

L'épaisseur minimale du film sera choisie en fonction des dimensions du palier et des états de surface de l'arbre et du coussinet, des déformations prévisibles des pièces sous la charge radiale, des possibilités d'alignement entre l'arbre et le coussinet. Les conditions de démarrage et d'arrêt imposent très souvent l'épaisseur minimale du film lubrifiant afin d'éviter le plus possible le régime de frottement mixte, de limiter l'usure des surfaces et d'éviter des avaries par grippage du palier.

Une des difficultés majeures du calcul du palier cylindrique hydrodynamique est l'estimation de la température de fonctionnement, cette grandeur influençant directement la viscosité du fluide, le nombre de Sommerfeld, la position de l'arbre dans le coussinet, les pertes et le débit de fluide.

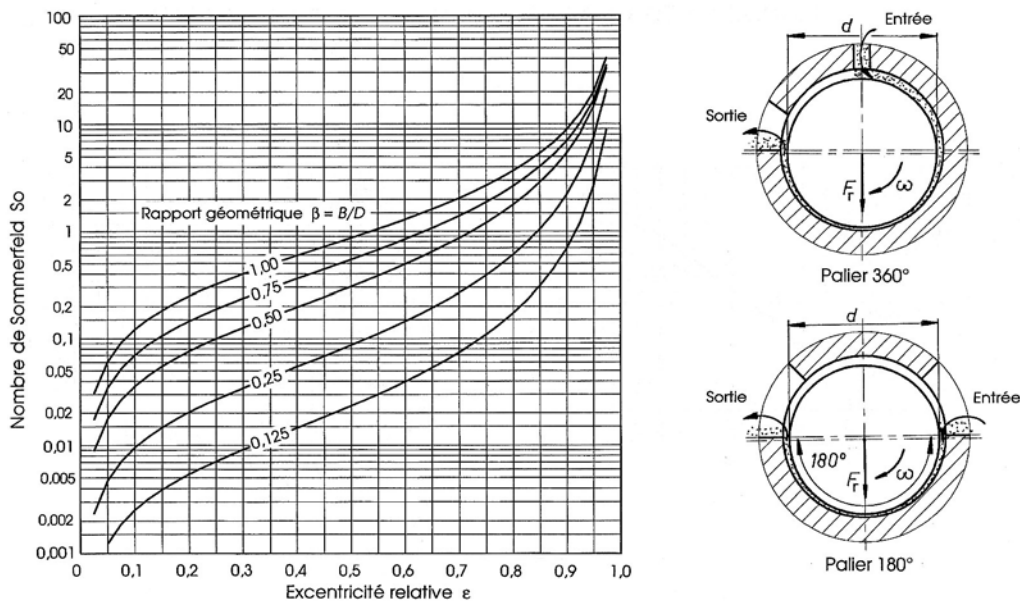


Figure 13.13 Nombre de Sommerfeld en fonction de l'excentricité  $\epsilon$  pour plusieurs rapport  $\beta = B/D$   
Schéma de fonctionnement des paliers cylindriques  $360^\circ$  et  $180^\circ$

À charge radiale et vitesse angulaire constantes, après la période de démarrage, l'énergie mécanique produite par les pertes doit être égale à l'énergie calorifique évacuée vers l'extérieur du palier. La température d'équilibre se trouve par voie itérative.

#### 13.3.4.3 COEFFICIENT DE FROTTEMENT ÉQUIVALENT

Le coefficient de frottement équivalent joue un rôle de premier plan car c'est de lui que dépendent les pertes et la température d'équilibre. De nombreuses formules ont été proposées et nous retiendrons ici deux auteurs. Le coefficient de frottement dépend du nombre de Sommerfeld, du rapport  $\beta = B/D$ , et du jeu relatif  $\psi$ . Les formules simplifiées, valables pour  $\beta$  compris entre 0,25 et 1,0, sont :

1. Formules proposées par Leloup :

$$\begin{aligned} \text{Pour } So < 5,3 : \quad & \mu_e/\psi = 0,72 + 2,6/So, \\ \text{Pour } So > 5,3 : \quad & \mu_e/\psi = 2,88/[So]^{0,5}. \end{aligned} \quad (13.13.4)$$

2. Formules proposées par Vogelpohl [2.59]:

$$\begin{aligned} \text{Pour } So < 1, \text{ paliers rapides : } & \mu_e/\psi = \pi/So, \\ \text{Pour } So > 1, \text{ pression élevée : } & \mu_e/\psi = \pi/[So]^{1/2}. \end{aligned} \quad (13.13.5)$$

La formule proposée par Vogelpohl, valable pour les paliers peu sollicités et à fréquence de rotation élevée correspond à la relation trouvée sous au chapitre 2 dans le palier cylindrique de guidage. Lorsque le nombre de Sommerfeld vaut 1,0, le coefficient de frottement équivalent vaut environ trois fois le jeu relatif  $\psi$ .

#### 13.3.4.4 POSITION DE L'ARBRE DANS LE COUSSINET

La position de l'arbre dans le coussinet dépend de l'excentricité relative  $\varepsilon$  et du rapport géométrique  $\beta$ . Au repos, l'arbre et le coussinet se touchent sur une surface incurvée provenant de la déformation de ces deux pièces, la pression et l'étendue de la déformation et la valeur de la pression pouvant se trouver par les relations de Hertz. Au moment du démarrage et sans action d'une pression hydraulique externe, l'arbre a tendance à grimper sur la surface cylindrique creuse du coussinet. En régime hydrodynamique, l'arbre occupe une position imposée par la charge radiale  $F_r$ , la poussée produite par le fluide sur l'arbre et les pertes dues au cisaillement du film. L'arbre s'approche de la position parfaitement centrée lorsque la charge est nulle ou lorsque la vitesse angulaire devient très grande, le nombre de Sommerfeld tendant alors vers zéro.

La trajectoire possible du centre de l'arbre en fonction de l'excentricité relative  $\varepsilon$  dans le coussinet est à peu près une demi circonférence.

*Remarque importante :* Le calcul du palier radial étant basé sur le déplacement de l'arbre dans le coussinet et non sur l'application de la charge radiale  $F_r$ , l'angle compris entre la position de l'entrée du fluide lubrifiant et la fente minimale varie en fonction de la charge et de la fréquence de rotation. L'angle admis à 90° entre ces deux points est atteint seulement pour une excentricité maximale, soit  $\varepsilon = 1,0$  !

Le débit de fluide dans le palier peut se trouver approximativement en appliquant la relation des fluides newtoniens sur la fente à l'entrée :

$$V_{\text{fluide}} = \frac{1}{2} v_u B h_{\text{entrée}}. \quad (13.13.6)$$

Ce fluide lubrifiant s'écoule vers la fente la plus étroite entre l'arbre et le coussinet et s'échappe de chaque côté du palier.

### 13.3.5 CALCUL DU PALIER CYLINDRIQUE AU MOYEN DE FORMULES

Il est possible de cerner d'un peu plus près le calcul du palier cylindrique hydrodynamique au moyen de formules ou de représentations graphiques, par exemple au moyen de la recommandation VDI. Plusieurs auteurs ont proposé des formules ou des tables basées sur l'étude du coussinet infiniment long ou sur des recherches effectuées par calcul numérique. Les relations approximatives et les figures données ci-après proviennent de la publication due à H.-J. Butenschön [2.42] et datent de 1976. Le domaine de validité est limité aux paliers 360° et 180° à charge constante et dont les rapports géométriques se situent dans les limites:

$$0,05 \leq \varepsilon \leq 0,99 \quad \text{et} \quad 0,125 \leq B/D \leq 1,00.$$

#### 13.3.5.1 EXCENTRICITÉ, NOMBRE DE SOMMERFELD ET RAPPORT $B/D$

Le nombre de Sommerfeld est relié à l'excentricité relative et au rapport  $B/D$  par une expression :  $So = f(\varepsilon, B/D)$ . Cette formule est valable pour les paliers 360° et 180°.

Constantes :

$$a_{1S} = 1,1642 - 1,9456 B/D + 7,1161 (B/D)^2 - 10,1073 (B/D)^3 + 5,0141 (B/D)^4,$$

$$a_{2S} = -1,000026 - 0,023634 B/D - 0,4215 (B/D)^2 - 0,038817 (B/D)^3 - 0,090551 (B/D)^4.$$

Nombre de Sommerfeld :

$$So = \left( \frac{B}{D} \right)^2 \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)^2} \sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2} \frac{a_{1S}(\varepsilon-1)}{a_{2S} + \varepsilon}. \quad (13.14.1)$$

La figure 13.14 montre le nombre de Sommerfeld en fonction du rapport géométrique  $B/D$  et des excentricités comprises entre 0,1 et 0,99. Cette figure donne les mêmes valeurs que la figure précédente 13.13.

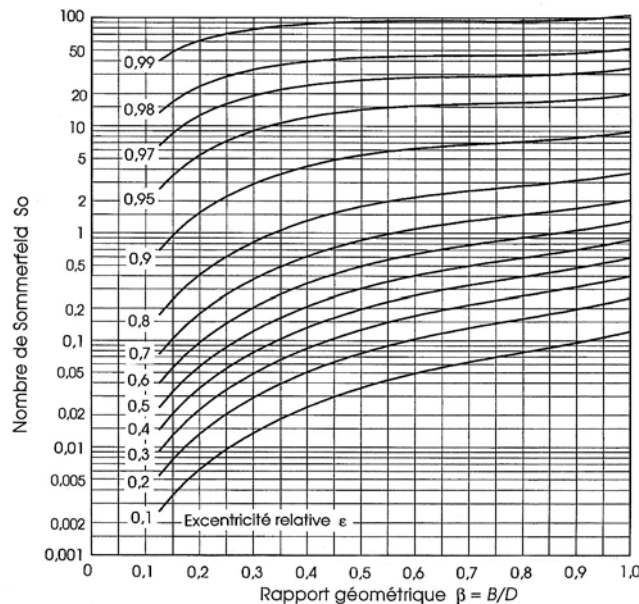


Figure 13.14 Nombre de Sommerfeld en fonction du rapport  $B/D$  pour diverses excentricités

#### 13.3.5.2 ANGLE ENTRE LA FORCE ET LA FENTE MINIMALE

L'angle entre la ligne d'action de la force radiale extérieure  $F_r$  et la position de la fente minimale  $\beta_F = f(\varepsilon, B/D)$  est à peu près le même pour les deux genres de paliers 360° et 180°.

Constantes :

$$\begin{aligned} a_{1\beta} &= 1,152624 - 0,105465 B/D, \\ a_{2\beta} &= -2,5905 + 0,798745 B/D, \\ a_{3\beta} &= 8,73393 - 2,3291 B/D, \\ a_{4\beta} &= -13,3415 + 3,424337 B/D, \\ a_{5\beta} &= 6,6294 - 1,591732 B/D. \end{aligned}$$

Angle entre la force  $F_r$  et la fente minimale :

$$\beta_F = \arctan\left(\frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right) (a_{1\beta} + a_{2\beta}\varepsilon + a_{3\beta}\varepsilon^2 + a_{4\beta}\varepsilon^3 + a_{5\beta}\varepsilon^4). \quad (13.14.2)$$

La figure 13.15 montre la valeur de cet angle pour les le type de palier dit Palier 180°, les valeurs étant tirées d'un calcul numérique.

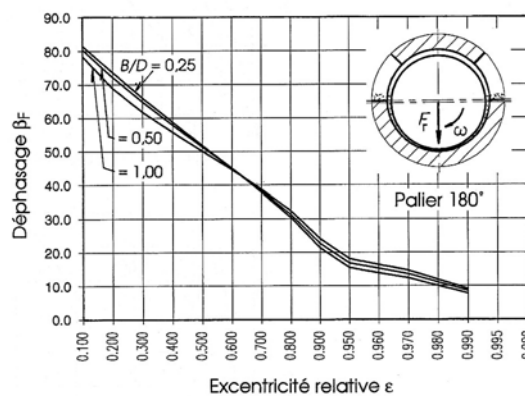


Figure 13.15 Déphasage  $\beta_F$  entre la ligne d'action de la force  $F_r$  et la position de la fente minimale

### 13.3.5.3 COEFFICIENT DE FROTTEMENT ÉQUIVALENT

Deux relations sont à disposition pour le calcul du rapport  $\mu_e/\psi$  entre le coefficient de frottement équivalent et le jeu relatif :

Palier 360° :

$$\frac{\mu_e}{\psi} = \frac{\pi}{S_o \sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon}{2} \sin \beta_F. \quad (13.14.3.1)$$

Cette relation contient deux termes : le premier provient du cisaillement du fluide entre l'arbre et le coussinet, le second de la position des deux centres.

Palier 180° :

Constantes :

$$\begin{aligned} a_{1\mu} &= 0,6882583 - 0,7863096 B/D + 0,4454402 (B/D)^2, \\ a_{2\mu} &= -0,6953545 - 0,03963917 B/D - 0,05763878 (B/D)^2, \\ a_{3\mu} &= 0,01929697 + 0,1595561 B/D + 0,02555321 (B/D)^2, \\ a_{4\mu} &= -0,00935996 + 0,009127429 B/D - 0,05406987 (B/D)^2. \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_e}{\psi} = 10^{a_{1\mu} + a_{2\mu}(\lg S_o) + a_{3\mu}(\lg S_o)^2 + a_{4\mu}(\lg S_o)^3}. \quad (13.14.3.2)$$

La figure 13.16 représente le rapport  $\mu_e/\psi$  pour le palier 180°. Cette figure est complétée par la représentation du coefficient de frottement relatif suivant les deux relations proposées par Vogelpohl, composée de deux segments rectilignes, soit :

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

- pour  $So < 1$  :  $\pi / So$ ,
- pour  $So > 1$  :  $\pi / [So]^{0,5}$ .

Le palier 360° possède un coefficient de frottement équivalent en général un peu plus élevé que le palier à 180°, s'approchant des valeurs proposées par ces deux relations simplifiées.

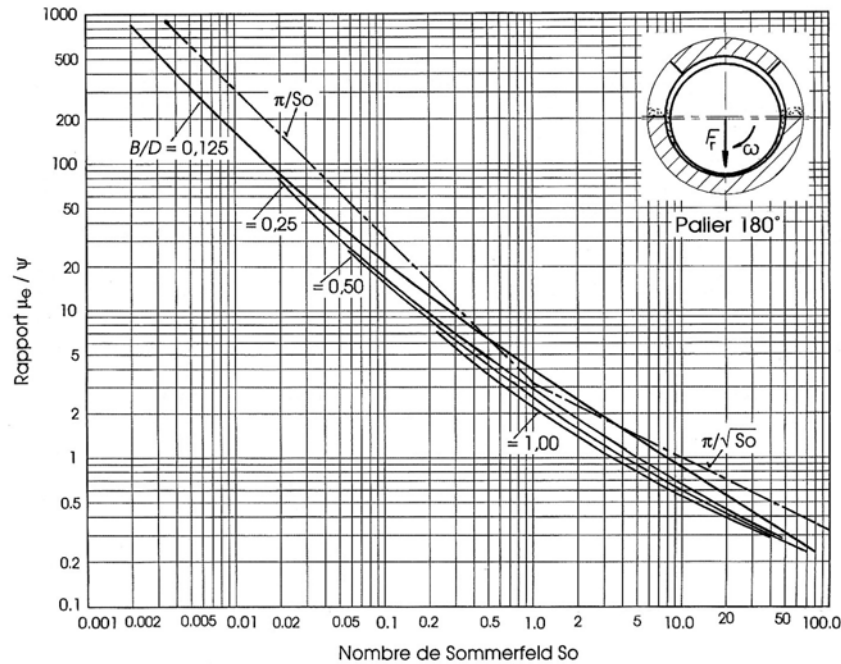


Figure 13.16 Rapport  $\mu_e/\psi$  pour le palier 180° en fonction du nombre de Sommerfeld

#### 13.3.5.4 DÉBIT DE FLUIDE DANS LE PALIER

Le débit de fluide dans le palier dépend du type de palier. Il se donne sous forme relative. Pour le palier 360°, ce débit relatif est proportionnel à l'excentricité. Pour le palier 180°, ce débit relatif peut s'exprimer au moyen d'un polynôme.

Palier 360° :

$$\dot{\bar{V}} = \frac{\dot{V}}{R^3 \psi \omega} = 2 \left[ \frac{B}{D} - 0,223 \left( \frac{B}{D} \right)^3 \right] \cdot \varepsilon. \quad (13.14.4.1)$$

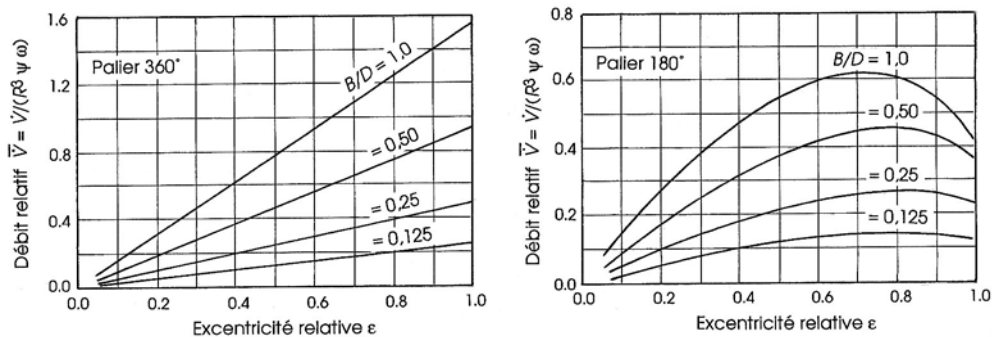


Figure 13.17 Débit relatif en fonction de l'excentricité pour les paliers 360° et 180°

Palier 180° :

Constantes :

$$\begin{aligned} a_{1V} &= 2,23463 B/D + 0,108367 (B/D)^2 - 0,5641167 (B/D)^3, \\ a_{2V} &= -1,542086 B/D - 2,821453 (B/D)^2 + 1,955046 (B/D)^3, \\ a_{3V} &= 2,13513 B/D + 4,208715 (B/D)^2 - 3,481291 (B/D)^3, \\ a_{4V} &= -1,751036 B/D - 2,511278 (B/D)^2 + 2,342575 (B/D)^3. \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{V}} = \frac{\dot{V}}{R^3 \psi \bar{\omega}} = a_{1V} \varepsilon + a_{2V} \varepsilon^2 + a_{3V} \varepsilon^3 + a_{4V} \varepsilon^4. \quad (13.14.4.2)$$

La figure 13.17 montre ces deux débits relatifs en fonction de l'excentricité relative. Le débit à prévoir se trouve par :

$$\dot{V} \geq \dot{\bar{V}} R^3 \psi \bar{\omega}.$$

### 13.3.5.5 PRESSION MAXIMALE DU FLUIDE SUR L'ARBRE

La répartition de la pression dans la direction circonférentielle au milieu de la largeur  $B$  ressemble à celle du palier infiniment large. Comme la largeur du coussinet est de dimension finie, la pression est nulle aux deux extrémités du coussinet. La pression maximale est toujours un multiple de la pression moyenne. La figure 13.18 montre le rapport de la pression maximale à la pression moyenne pour les deux types de palier et pour des rapports  $B/D$  de 0,125 à 1,0.

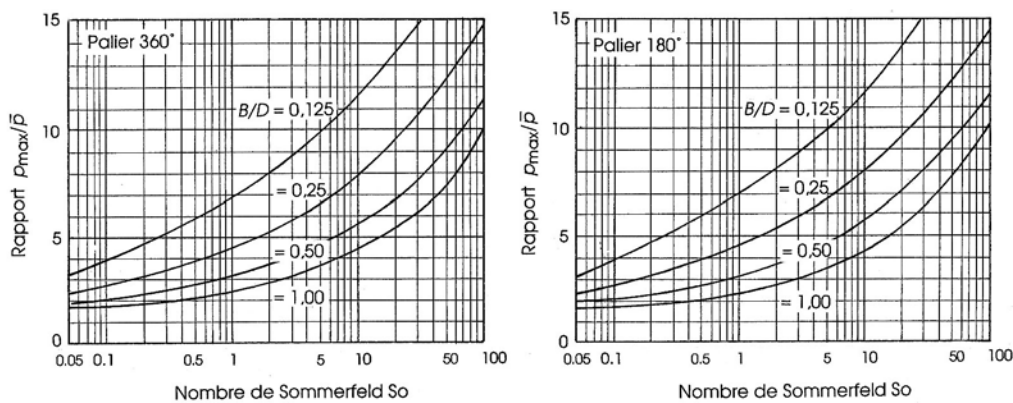


Figure 13.18 Valeur de la pression maximale dans les paliers 360° et 180° en fonction du nombre de Sommerfeld et des rapports  $B/D$

### 13.3.5.6 POSITION DU CENTRE DE L'ARBRE DANS LE COUSSINET

L'arbre est parfaitement centré dans le coussinet seulement si la charge radiale est nulle ou si la vitesse angulaire est infiniment grande, le nombre de Sommerfeld étant alors nul. L'arbre touche le coussinet lorsque l'excentricité relative vaut  $\varepsilon = 1,0$ . La trajectoire parcourue par le centre de l'arbre en fonction de la charge peut se lire sur les figures 13.14 donnant  $So = f(\varepsilon, B/D)$  et 13.15 donnant  $\beta_F = f(\varepsilon, B/D)$ . La figure 13.19 montre le parcours du centre de l'arbre dans le coussinet sous forme d'une représentation polaire de la trajectoire du centre de l'arbre par rapport au coussinet.

Cette figure montre la trajectoire pour les rapports  $B/D = 1,0$  et  $B/D = 0,125$ , la différence entre ces deux courbes étant relativement faible pour les deux types de palier. Les courbes sont complétées pour la demi circonférence proposée dans le calcul élémentaire.

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

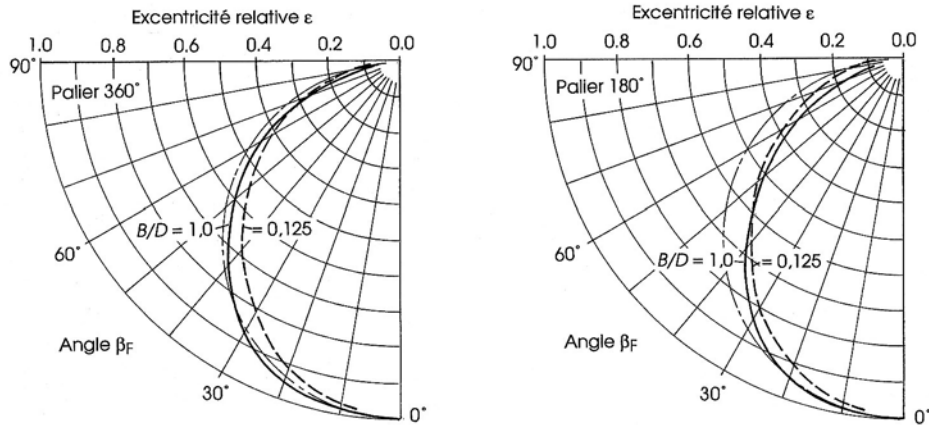


Figure 13.19 Trajectoire du centre de l'arbre dans le coussinet pour les paliers 360° et 180°

## 13.4 ÉCHANGES D'ÉNERGIE , COMPLÉMENTS TECHNIQUES

Le calcul et le contrôle des butées et paliers hydrodynamiques font intervenir d'une part les conditions de portance du lubrifiant, d'autre part des échanges d'énergie qui influencent directement la température du palier, donc du fluide. La variation de la viscosité dynamique des fluides lubrifiants est particulièrement grande dans le domaine usuel d'utilisation, soit pour des températures comprises entre 30° et 80°C. Au problème hydrodynamique s'ajoute un problème thermodynamique.

### 13.4.1 ÉCHANGES DE CHALEUR

Les échanges de chaleur dans une butée, un guidage ou un palier hydrodynamique s'effectuent par conduction, convection et rayonnement. Un bref rappel de ces trois modes de transfert de chaleur montre les relations de base et les grandeurs intervenant dans l'estimation du comportement thermique.

#### 13.4.1.1 TRANSMISSION DE CHALEUR

##### 1. Transmission de chaleur par conduction

La conduction est un transfert d'énergie calorifique à l'intérieur d'un corps ou au contact de deux corps de la partie chaude vers la partie froide. La loi de Fourier exprime cette condition de transfert de chaleur par l'expression proposée ici, valable seulement dans une direction déterminée :

$$\dot{Q} = - \lambda A \cdot d\theta/dn,$$

avec :  $\lambda$  conductivité thermique du matériau,  
 $A$  aire traversée par le flux de chaleur,  
 $d\theta$  variation élémentaire de température,  
 $dn$  épaisseur élémentaire dans la direction du flux thermique.

##### 2. Transmission de chaleur par convection

La convection est un transfert d'énergie calorifique dû à la différence de températures entre la surface d'un objet et le fluide se trouvant en contact avec la paroi de cet objet. La chaleur s'écoule tout d'abord par conduction de la surface aux particules adjacentes et cette chaleur est alors transférée par le mouvement du fluide. Il existe deux types de convection : naturelle et forcée. La première provient du mouvement du fluide engendré par la différence

des masses volumiques accompagnant les variations de température. La seconde provient du mouvement de fluide provoqué par une cause extérieure. La loi de Newton exprime ce transfert :

$$\dot{Q} = - \alpha A (\vartheta_s - \vartheta_f),$$

avec :  $\alpha$  coefficient de convection,  
 $A$  aire de la paroi traversée par le flux de chaleur,  
 $\vartheta_s$  température de la surface du corps,  
 $\vartheta_f$  température moyenne d'écoulement du fluide.

Le coefficient de convection dépend de la nature du fluide et des conditions d'écoulement sur la paroi. La recherche de cette grandeur passe par le calcul de divers nombres : Prandtl, Reynold, Nusselt, Grashof, Péclet, etc. selon la forme du corps et le type de convection.

### 3. Rayonnement

Le rayonnement est un transfert d'énergie par radiations électromagnétiques visibles ou non, à la vitesse de la lumière, et presque indépendamment de la nature du milieu. La loi de Stefan-Boltzmann permet de trouver la valeur de ce transfert :

$$\dot{Q} = A f \varepsilon \sigma (T_i^4 - T_j^4),$$

avec :  $A$  aire de la surface émettrice,  
 $f$  facteur de forme (difficile à déterminer entre les surfaces i et j),  
 $\varepsilon$  pouvoir émissif de la surface,  
 $\sigma$  constante de Stefan-Boltzmann,  
 $T_i, T_j$  température absolue des deux surfaces i et j participant à l'échange.

L'effet du rayonnement est en général négligeable dans le bilan thermique des paliers, la différence des températures entre le palier et le milieu ambiant restant le plus souvent modeste.

#### 13.4.1.2 TEMPÉRATURE DE CALCUL

La détermination du champ de température dans les composants du palier, en particulier dans le film porteur, est très compliquée. Les conditions de transfert de chaleur imposées par la circulation du fluide entre le coussinet et l'arbre, les températures locales des parois du coussinet et de l'arbre, les problèmes d'échanges d'énergie calorifique entre ces trois constituants font intervenir des relations peu étudiées jusqu'ici. Ce type d'étude porte le nom de comportement thermohydrodynamique.

Dans tous les développements précédents, la viscosité dynamique des fluides et la masse volumique ont été supposées connues et constantes. Le fluide circule dans le palier et s'échauffe par suite des pertes. Afin de faciliter la recherche de l'équilibre, nous admettrons encore des valeurs constantes pour les propriétés physiques du lubrifiant en introduisant une température de calcul  $\vartheta_{ch}$  provisoirement inconnue. Soit :

$\vartheta_e$  température du fluide à l'entrée dans le coussinet,  
 $\vartheta_s$  température du fluide à la sortie du coussinet,  
 $\vartheta_{ch}$  température de calcul.

La température de calcul est pondérée selon la charge dans la palier :

1. Paliers à charge modeste à moyenne :

$$\vartheta_{ch} = \frac{\vartheta_e + \vartheta_s}{2}. \quad (13.15.1.1)$$

2. Paliers à forte charge :



### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

$$\vartheta_{ch} = \frac{\vartheta_e + 2 \vartheta_s}{3}. \quad (13.15.1.2)$$

Toute autre pondération est possible. La température d'entrée du fluide dans le coussinet est habituellement donnée tandis que la température de sortie reste à déterminer. Le bilan thermique permet de trouver cette deuxième température et la température de calcul intervenant dans la recherche des conditions de fonctionnement du palier. Le bilan thermique peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\dot{Q}_l + \dot{Q}_{ca} + \dot{Q}_r + P_{fr} = 0, \quad (13.15.2)$$

avec :  $\dot{Q}_l$  puissance thermique évacuée par le lubrifiant en circulation,  
 $\dot{Q}_{ca}$  puissance thermique évacuée par le carter,  
 $\dot{Q}_r$  puissance thermique évacuée par le réfrigérant,  
 $P_{fr}$  puissance thermique produite par frottement.

Le bilan thermique se trouve par voie itérative en partant des températures connues pour les divers fluides en circulation.

#### 13.4.1.3 PUISSANCE PERDUE DANS LE PALIER

La puissance perdue par cisaillement du fluide lubrifiant dans la fente entre l'arbre et le coussinet se trouve facilement si le coefficient de frottement équivalent est connu, la charge radiale donnée et la vitesse angulaire relative constante. En régime permanent, cette puissance vaut :

$$P_{fr} = \mu_e F_r v_u = \mu_e \omega r F_r. \quad (13.15.3)$$

Le coefficient de frottement équivalent  $\mu_e$  se trouve par l'une ou l'autre des relations proposées précédemment.

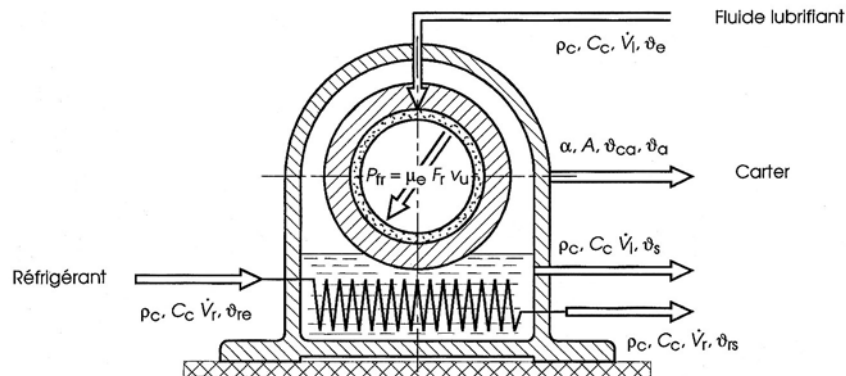


Figure 13.20 Conditions d'échanges calorifiques dans le palier radial : débits de lubrifiant et de réfrigérant

#### 13.4.1.4 PUISSANCES ÉVACUÉES DANS LE PALIER

La puissance produite dans le palier est à évacuer vers l'extérieur par le lubrifiant, par échange de chaleur entre le carter du palier et le milieu ambiant et éventuellement par un système refroidisseur complémentaire. Ces diverses puissances thermiques peuvent se trouver par les relations suivantes.

1. *Puissance thermique évacuée par le lubrifiant :*

$$\dot{Q}_l = - \rho_c C_c V_l (\vartheta_s - \vartheta_e), \quad (13.15.4)$$

avec :  $\rho_c$  masse volumique de calcul du fluide,  
 $C_c$  chaleur massique de calcul du fluide,  
 $V_1$  débit de fluide,  
 $\vartheta_s$  température de sortie du fluide,  
 $\vartheta_e$  température d'entrée du fluide.

2. *Puissance thermique évacuée par le carter :*

$$\dot{Q}_{ca} = - \alpha A (\vartheta_{ca} - \vartheta_a), \quad (13.15.5.1)$$

avec :  $\alpha$  coefficient global de transmission de chaleur du carter,  
 $A$  aire extérieure d'échange du carter,  
 $\vartheta_{ca}$  température du carter,  
 $\vartheta_a$  température ambiante,  
 $v_{air}$  vitesse de l'air sur le carter.

Le coefficient global de transmission de chaleur  $\alpha$  peut se trouver par l'expression :

$$\alpha = 7 + 12 (v_{air} [m/s])^{0,5} [W/m^2K]. \quad (13.15.5.2)$$

3. *Puissance thermique évacuée par la circulation d'un réfrigérant :*

$$\dot{Q}_r = - \rho_c C_c \dot{V}_r (\vartheta_{rs} - \vartheta_{re}), \quad (13.15.6)$$

avec :  $\rho_c$  masse volumique de calcul du réfrigérant,  
 $C_c$  chaleur massique de calcul du réfrigérant,  
 $\dot{V}_r$  débit de réfrigérant,  
 $\vartheta_{rs}$  température de sortie du réfrigérant,  
 $\vartheta_{re}$  température d'entrée du réfrigérant.

#### 13.4.1.5 EFFET DE LA TEMPÉRATURE SUR LE JEU DANS LE PALIER

Le jeu relatif  $\psi$  intervenant dans le calcul du palier cylindrique est différent du jeu de fabrication. En supposant une définition des dimensions de l'arbre et du coussinet à la température de 20°C, le jeu relatif de fonctionnement peut se trouver approximativement par la relation simplifiée :

$$\psi = \psi_{20^\circ C} + (\alpha_{couss.} - \alpha_{arbre})(\vartheta_c - 20^\circ C), \quad (13.15.7)$$

avec :  $\alpha_{couss.}$  coefficient de dilatation linéaire du coussinet,  
 $\alpha_{arbre}$  coefficient de dilatation linéaire de l'arbre,  
 $\vartheta_c$  température de calcul au point de fonctionnement en °C,  
 $\psi_{20^\circ C}$  jeu relatif de fabrication mesuré à 20°C.

Il est nécessaire de tenir compte des conditions exactes de serrage pour des coussinets chassés dans le carter, voir les compléments d'information dans le chapitre sur les emmanchements.

**13.4.2 CONDITIONS COMPLÉMENTAIRES À CONTRÔLER**

Un certain nombre de conditions complémentaires sont à remplir par le palier cylindrique avant d'atteindre le régime hydrodynamique.

**13.4.2.1 VALEURS SIMPLES DE CONCEPTION**

L'étude des dimensions d'un palier radial ou axial part de quelques considérations simples comme décrites au chapitre 1 et se poursuit en affinant l'approche de la solution définitive. Les valeurs moyennes de dimensionnement sont données dans le tableau ci-dessous.

Tableau 13.2

**Rapport géométrique B/D, pression moyenne et vitesse dans le palier radial**

Type de machines	Conception			Matériaux pour Coussinet / Arbre
	Rapport $B/D$	$\bar{p}$ N/mm <sup>2</sup>	$v_u$ m/s	
Transmission	0,8 à 1,2 0,8 à 1,2 0,8 à 1,2	1 2 5	2 3 6	Fonte grise / Acier Bronze / Acier Antifriction / Acier
Systèmes articulés	0,6 à 1,0 0,6 à 1,0	2 10	1 3	Fonte grise / Acier Bronze / Acier
Engins de levage Poulies, galets, tambours Poulies, galets, tambours Articulations	0,6 à 1,2 0,6 à 1,2 0,6 à 1,2	4 10 15		Fonte grise / Ac 50 Cupro-plomb / Ac 50 Bronze / Ac 70
Turbomachines Compresseurs et turbines Très grandes machines	0,5 à 1,0 0,5 à 1,0	4 8	50 60	Antifriction / Acier Antifriction / Acier
Machines à pistons Crosse et axe de piston Tête de bielle Paliers et vilebrequin	0,6 à 1,0 0,4 à 0,8 0,6 à 1,0	40 18 15		Antifriction (couche Mince) / acier durci En surface
Machines-outils Précision normale Haute précision	0,6 à 1,2 0,8 à 1,4	1 0,5		Bronze / Acier Bronze / Acier
Petite mécanique Appareillage Outillage Produits grand public	0,5 à 1,0 0,6 à 1,2 0,6 à 1,2	4 5 5		Bronze / Acier Bronze / Acier Mat.synthét. / Acier
<b>Remarques</b> Les pressions et vitesses admissibles dépendent non seulement des matériaux utilisés, mais aussi de la forme du palier et de l'alignement des pièces. La pression moyenne admissible diminue avec la vitesse de glissement. Le facteur thermique est toujours à contrôler dans les paliers fortement sollicités.				

### 13.4.2.2 PRESSION AU REPOS

Avant toute rotation entre l'arbre et le coussinet, l'arbre repose sur la surface cylindrique creuse du coussinet. La pression entre ces deux pièces ne doit pas provoquer une déformation durable des surfaces. Le calcul de la pression superficielle entre les deux corps déformés utilise les deux relations de Hertz pour le contact entre deux cylindres. Soit  $R$  le rayon du coussinet et  $r$  le rayon de l'arbre,  $E_c$  et  $E_a$  les modules d'élasticité correspondant des matériaux et  $\nu_c$  et  $\nu_a$  les coefficients de Poisson. La pression superficielle peut se trouver par :

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{F_r E_{ca}}{r_r B}}, \quad (13.16.1)$$

et la demi largeur de la surface déformée par :

$$a = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{F_r r_r}{E_{ca} B}}, \quad (13.16.2)$$

avec :  $F_n = F_r$  force radiale entre l'arbre et le coussinet au repos,  
 $B$  longueur des génératrices de contact entre l'arbre et le coussinet,  
 $r_r = R r / (R - r)$  rayon réduit ou également  $r_r = R / \psi$ ,  
 $E_{ca}$  module d'élasticité résultant, calculable par :

$$\frac{1}{E_{ca}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_c^2}{E_c} + \frac{1 - \nu_a^2}{E_a} \right). \quad (13.16.3)$$

Les relations de Hertz sont applicables aux petites déformations entre deux cylindres. Le contact entre l'arbre et le coussinet sous la charge nominale provoque presque toujours une surface déformée importante, les relations de Hertz étant utilisables jusqu'à  $a < D/6$ . Sous l'effet de la pression locale, le lubrifiant est expulsé de la zone de charge. À la mise en route du palier, le coefficient de frottement entre l'arbre et le coussinet peut atteindre facilement 25%. Le démarrage de l'arbre sous charge peut engendrer le grippage des surfaces en glissement et le régime de frottement sec ou même mixte devrait être limité dans le temps. La pression hertzienne doit rester inférieure à la contrainte conventionnelle d'élasticité en compression du revêtement du coussinet.

### 13.4.2.3 SÉPARATION DES SURFACES AU DÉMARRAGE

Dans les grandes machines ou dans les machines fortement sollicitées, il est absolument nécessaire de prévoir un décollement de l'arbre avant tout mouvement de démarrage. Comme discuté au chapitre 2, les régimes de frottement se succèdent du frottement sec vers le frottement hydrodynamique en passant par les régimes onctueux et mixtes. La séparation complète de l'arbre et du coussinet a lieu seulement en régime hydrodynamique. Pour éviter les frottements à forte usure et à grand coefficient de frottement, il est possible de donner un mouvement supplémentaire à l'arbre, à partir de la position de repos, en injectant le fluide lubrifiant sous haute pression entre les surfaces déformées au repos. L'arbre est alors mis à flot. L'arrivée du fluide dans le coussinet a lieu par un ou deux orifices de dimensions très limitées sur la génératrice de contact du coussinet, voir l'exemple d'un coussinet de grande machine selon figure 13.21. Il faut absolument éviter la présence d'une rainure de répartition du fluide dans cette zone à pression hydrodynamique élevée, car la rainure détruirait la création continue de cette pression. L'apport de fluide sous pression est supprimé dès que la vitesse angulaire atteint une valeur suffisante pour que le palier se trouve dans le domaine sûr du frottement hydrodynamique. Lorsque les paliers sont faiblement chargés, cette lubrification hydrostatique sous haute pression n'est pas nécessaire.

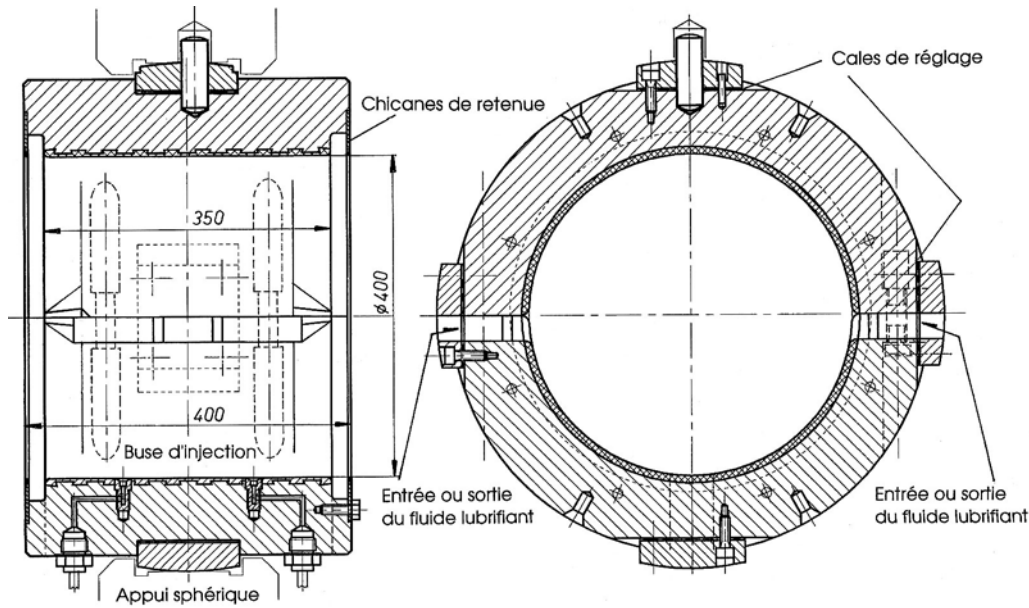


Figure 13.21 Coussinet de turbine à vapeur, diamètre  $D = 400\text{mm}$ , avec deux orifices d'injection de fluide sous pression. Le centrage du coussinet est ajusté au moyen de cales d'épaisseur (ABB).

#### 13.4.2.4 VITESSE LIMITE INFÉRIEURE

Les conditions de démarrage et de ralentissement sont les passages délicats dans la vie d'un palier hydrodynamique car tous les régimes de frottement sont présents. Au ralentissement de l'arbre, ce sont principalement les pertes dans les paliers et dans les autres parties de la machine qui imposent la décélération angulaire de l'arbre. Le glissement des surfaces cylindriques en frottement mixte provoque une usure importante des pièces en mouvement relatif. Il faut éviter de travailler dans ce domaine de glissement. Un second problème peut intervenir lorsque la charge radiale est variable : sous l'effet de pressions très élevées, l'excentricité de l'arbre avoisine  $\varepsilon = 1,0$  et l'épaisseur du film n'est plus suffisante pour séparer l'arbre du coussinet. On appelle vitesse limite inférieure, la vitesse angulaire minimale permettant d'atteindre le régime hydrodynamique. Dans une étude élasto-hydrodynamique effectuée à l'EPFZ par H.H. Ott et E. Wenig, cette vitesse peut se trouver par l'intermédiaire de deux chiffres définis comme suit :

- chiffre de charge :

$$W^* = \frac{F_r}{B R} \sqrt{\frac{\psi}{\eta_v \omega_{\text{lim}} E_{\text{ca}}}}, \quad (13.16.4)$$

- chiffre de film minimal :

$$H^* = \frac{h_0}{R} \sqrt{\frac{E_{\text{ca}} \psi}{\eta_v \omega_{\text{lim}}}}, \quad (13.16.5)$$

avec :  $h_0$  épaisseur minimale du film dans le palier,  
 $R$  rayon intérieur du coussinet,  
 $B$  largeur portante du coussinet,  
 $F_r$  charge radiale,  
 $E_{\text{ca}}$  module d'élasticité résultant selon relation (13.16.3),  
 $\psi$  jeu relatif,  
 $\eta_v$  viscosité dynamique du fluide,  
 $\omega_{\text{lim}}$  vitesse angulaire relative limite au début du régime hydrodynamique.

La figure 13.22 à gauche montre la relation existant entre ces deux chiffres pour la palier radial cylindrique. Cette courbe a été calculée dans le domaine de températures compris entre 20° et 40°C. Elle peut aussi s'appliquer pour d'autres lubrifiants à des températures supérieures. La fonction  $H^* = f(W^*)$  permet de trouver la vitesse angulaire limite à partir de l'épaisseur minimale du film  $h_0$  par voie itérative. Pour les paliers cylindriques de 50 à 100 mm de diamètre, les auteurs indiquent une épaisseur minimale du film de  $4 \pm 1 \mu\text{m}$ . La recherche de la correspondance entre  $H^*$  et  $W^*$  peut s'améliorer en exprimant ces chiffres au moyen de l'expression approximative :

$$H^* = a + b/W^*,$$

avec :  $a, b$  deux constantes trouvées à partir de deux points du graphique.

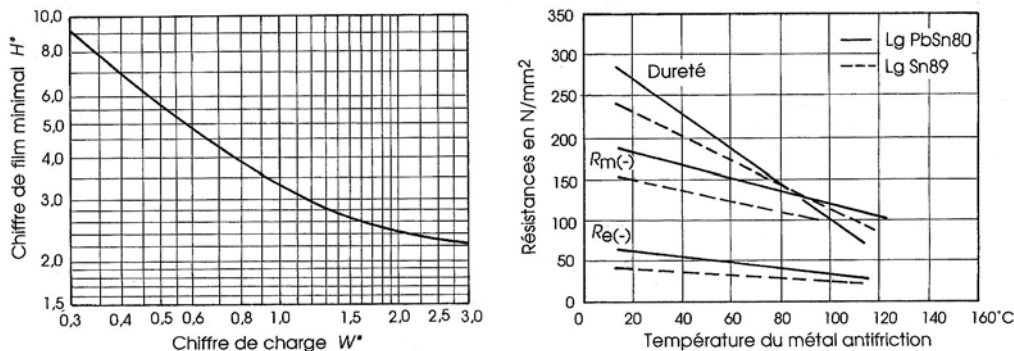


Figure 13.22 Relation entre les deux chiffres  $H^*$  et  $W^*$  pour la vitesse angulaire limite  
Caractéristiques du métal antifriction en fonction de la température

Ces deux constantes étant trouvées, la vitesse angulaire limite se calcule par :

$$\omega_{\text{lim}} = \frac{a^2 \bar{p}^2 \psi}{b^2 \eta_v E_{\text{ca}}} \left( \sqrt{\frac{2b E_{\text{ca}} h_0}{a^2 \bar{p} R} + 1} - 1 \right)^2. \quad (13.16.7)$$

#### 13.4.2.5 ALLIAGES POUR COUSSINETS

Les caractéristiques mécaniques des alliages métalliques utilisés dans la fabrication des revêtements des coussinets sont données dans le tableau ci-dessous. Elles sont complétées par quelques propriétés physiques.

##### 1. Revêtements en métal antifriction

Les coussinets des machines industrielles sont équipés d'un revêtement antifriction en métal blanc. Les conditions à remplir par cette couche de friction sont :

- *mouillabilité* : le film lubrifiant doit adhérer sur la surface et ne pas se rompre;
- *métal de base tendre avec inclusions dures* : les défauts initiaux de forme doivent pouvoir se compenser;
- *capacité d'inclusion* : les particules métalliques dans le film ne doivent pas rayer l'arbre;
- *conductibilité thermique* : la température du métal doit rester assez basse;
- *faible soudabilité* : en frottement mixte, le métal antifriction ne doit pas fondre;
- *résistance à la compression* : bonne ténacité à chaud, résistance suffisante au fluage et usure peu élevée;
- *liaison avec la coquille* : absorption des contraintes de cisaillement à la jonction (ancrage) et bonne conduction thermique,
- *dilatation* : semblable aux matériaux de l'arbre et des coquilles du coussinet,

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

- *point de fusion* : suffisamment bas afin de protéger l'arbre en marche d'urgence.

**Tableau 13.3**  
**Caractéristiques mécaniques et physiques des alliages pour coussinets**

Caractéristiques	Désignation de l'alliage selon norme DIN									
	Lg PbSn10	Lg PbSn80	Lg Sn89	CuPb22*	CuPb10Sn*	CuSn8	CuSn7ZnPb*	CuZn31Si	CuAl19Mn	AlZn5Si
Résistance statique										
$R_{p0,2}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	33	63	47	166	120	150	120			230
$R_m$ [N/mm <sup>2</sup> ]	70	91	78	213	245	270	240			280
Module d'élasticité										
$E$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	31	57	58	87	83	110	95	100	105	75
Compression										
$R_e$ 20°C [N/mm <sup>2</sup> ]	78	63	45	141	146					210
100°C	44	38								
$R_m$ 20°C [N/mm <sup>2</sup> ]	120	180	150	715	900					
100°C	76	120								
Résistance dynamique										
$R_a$ [N/mm <sup>2</sup> ]				69						
$R_{fa}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	33			89						125
Dureté HB [daN/mm <sup>2</sup> ]										
À 20°C	24	27	23	86	75	85	75	90	100	85
À 50°C	20	23	17							
À 100°C	10	13	10	79	67		65			72
Composition en %										
Cu	1	6	3,5	70	80	92	83	68	88	1
Pb	73	2		21	10		6			1
Sn	10	80	89	6	10	8	7			
Sb	16	12	7,5							
Zn							4	31		5
Al									9	91
Si										
Ni				3						1
Mn									3	
Propriétés physiques										
Températ. de fusion °C	235	183	237	327		860	326	900	980	550
Masse volum. kg/dm <sup>3</sup>	10	7,4	7,4	8,9	9,0	8,7	8,9	8,4	7,6	2,9
Coeff. dilatat.*E6 K <sup>-1</sup>	24	22	24	18	18	18	18	18	15	23
Conductivité W/m.K	18	28	31	39		43	34	48	31	108
* Alliage de fusion, métal pour coussinet moulé										

Le métal antifriction est appliqué dans la coquille du coussinet, généralement en acier, par le procédé de centrifugation. La température du métal blanc en service reste normalement en dessous de 120°C. L'épaisseur du métal antifriction, après usinage, est de 2 à 3 mm, cette épaisseur étant d'autant plus faible que la pression d'utilisation est élevée. L'alliage de base se compose de 80 à 90% d'étain complété par de l'antimoine et du cuivre afin d'obtenir un durcissement par formation de cristaux mixtes. Sous l'effet de charges élevées et/ou de

températures supérieures à 120°C, la structure cristalline se désagrège avec le temps et les propriétés spécifiques se détériorent fortement.

Les coussinets en métal massif sont utilisés seulement pour de petits paliers ou comme segments porteurs pour butée. La bonne conductibilité thermique des alliages à base de cuivre possède des effets avantageux sur la formation du film porteur.

#### 13.4.2.6 ALIGNEMENT DE L'ARBRE ET DU COUSSINET

Le mauvais alignement de l'arbre et du coussinet est très souvent responsable d'avaries de paliers. Sous l'effet des charges, les deux composants métalliques se déforment et les génératrices des cylindres s'incurvent et modifient ainsi l'épaisseur du film dans le sens axial. La théorie dite élastohydrodynamique essaie de fournir des valeurs sur les déformations des corps et sur la portance du fluide. Les moyens technologiques pour atteindre le mieux possible les conditions théoriques de parallélisme des axes sont les suivants :

1. *Fixation rigide* : cette solution simple pour le coussinet convient seulement pour les paliers courts avec  $B/D \leq 0,5$ . Un contrôle de l'épaisseur minimale du film est nécessaire afin de garantir une séparation sûre entre l'arbre et le coussinet.
2. *Fixation à rotule* : cette solution paraît être à première vue une bonne conception et consiste à soutenir le coussinet par une partie sphérique pleine sur l'extérieur des coquilles ajustée dans deux cavités sphériques creuses du carter. Comme le frottement de repos entre des pièces sèches est toujours très important, le déplacement du coussinet s'effectue seulement si la poussée résultante dépasse la tangente au cercle de frottement. Le parallélisme des axes n'est donc pas assuré et cette solution est de plus en plus abandonnée. Pour rendre ce type d'appui vraiment opérationnel, il faudrait prévoir par exemple une articulation sphérique avec une alimentation hydrostatique !
3. *Fixation sur appui sphérique* : La figure 13.21 montre une exécution d'un coussinet de turbine à vapeur équipé d'un appui pseudo sphérique. L'alignement avec l'arbre s'effectue par rotation et par déformation du plot inférieur. Le centrage horizontal et/ou vertical de l'axe du coussinet est assuré par des cales d'épaisseur. Un ergot, placé dans la partie supérieure, s'oppose à la rotation du coussinet et limite l'inclinaison du coussinet.
4. *Fixation sur appui déformable* : les petits coussinets peuvent être centrés et soutenus dans des parois élastiques et minces. Ce type de support peut se déformer facilement et compenser les erreurs de parallélisme.
5. *Rapport  $B/D$*  : La méthode générale consiste à limiter le rapport  $B/D$  aux valeurs comprises entre 0,4 et 0,8 . Les coussinets étroits sont réservés aux vitesses élevées et aux applications à encombrement réduit.

#### 13.4.2.7 LUBRIFICATION

Le système d'amenée et de récupération du fluide lubrifiant doit assurer un apport suffisant de liquide, refroidir les pièces, évacuer l'énergie perdue par cisaillement et les particules d'usure en suspension. Les moyens classiques sont :

1. *Par bague* : Le mouvement de la bague est provoqué par le frottement entre la bague et l'arbre. Cette pièce transporte le fluide par adhérence vers l'orifice d'alimentation du coussinet. La vitesse de la bague est limitée à environ 10 m/s. Ce type de lubrification se trouve dans les paliers faiblement chargés et aux températures d'équilibre inférieures à 60°C.
2. *Par circulation forcée* : La circulation du fluide lubrifiant est assurée par une pompe et une tuyauterie d'amenée et de récupération. La pression d'arrivée au niveau du coussinet



est comprise habituellement entre 1 et 2 bar. Le débit de la pompe est toujours supérieur au débit donné par les courbes ou formules afin de maintenir la température de sortie dans une limite acceptable. Le circuit comprend un bac à huile, un ou plusieurs filtres, un système de réfrigération interne ou externe, éventuellement de chauffage, des instruments de contrôle de la pression et des diverses températures.

Le palier comprend un certain nombre d'accessoires relatifs à la lubrification : niveau d'huile, voyant de circulation, orifice de remplissage et de vidange du bac, protection contre les fuites de fluide et contre l'introduction de poussières ou souillures.

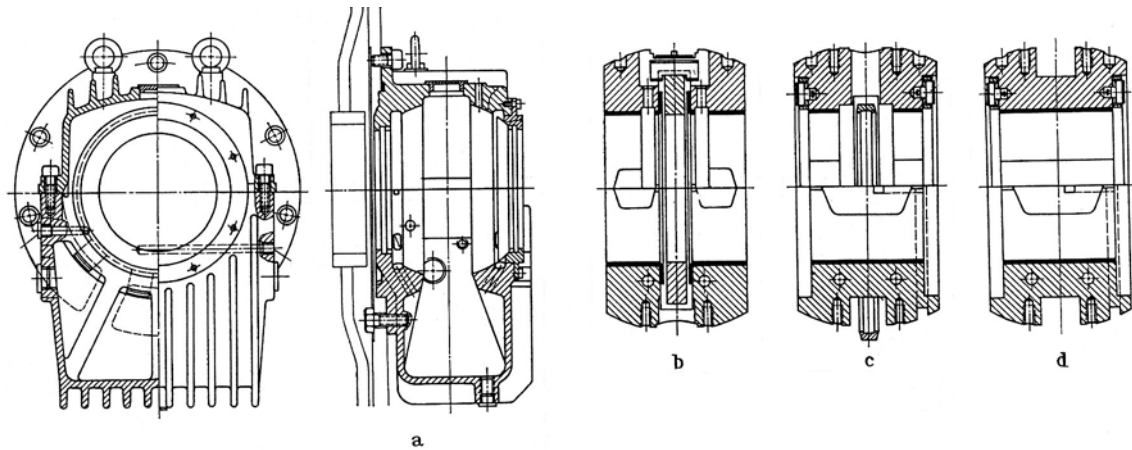


Figure 13.23 Palier fixé par une bride : conception Renk-Wülfel EF, avec carter nervuré :  
a) Carter; b) Coussinet avec bague de butée; c) Coussinet avec lubrification à bague et butées à patins;  
d) Coussinet avec lubrification sous pression et butées à patins.

#### 13.4.2.8 COMPLÉMENTS

Bien que le nombre de Sommerfeld, allié au rapport  $\beta = B/D$ , à la position de l'alimentation du fluide par rapport à la direction de la charge, à l'angle d'action du coussinet, caractérisent le comportement du palier, ce nombre ne suffit pas toujours pour juger la qualité des paramètres adoptés. La variation de la température et de la viscosité dans le film porteur, les modifications de la charge et la durée de vie probable du palier sont des facteurs essentiels. Ces grandeurs peuvent se trouver seulement par des mesures sur des exécutions industrielles ou déjà en laboratoire. En particulier, le choix de la matière des surfaces de glissement de l'arbre et du coussinet, du degré de finition, de la dureté jouent un rôle important. Tout essai de palier donne lieu à la détermination de nombreuses caractéristiques telles les pertes mécaniques, les températures maximales du métal antifriction, du débit de fluide entre les surfaces, des déformations sous l'effet des pressions et du gradient thermique. Les propriétés tribologiques de l'huile sont primordiales en particulier le choix de la viscosité de service, la durée de vie avant vieillissement et les possibilités de régénération. Le comportement d'une machine peut être influencé par le choix de la qualité du fluide porteur et par la température d'entrée dans le palier. Si les températures locales dépassent environ 120°C, des ségrégations d'huile se déposent sur les surfaces par formation de gomme et le jeu du palier peut disparaître plus ou moins complètement !

### 13.4.3 EXEMPLE DE COMPORTEMENT D'UN PALIER

Soit à déterminer le comportement d'un palier cylindrique de machines 180° devant supporter une charge radiale  $F_r = 80 \text{ kN}$  à la fréquence de rotation  $n = 30 \text{ t/s}$ . Les coquilles du coussinet sont en acier revêtues de métal blanc et reposent sur une articulation rotative. L'aire extérieure du palier est estimée à  $0,8 \text{ m}^2$ . Températures : ambiante  $25^\circ\text{C}$ , entrée du lubrifiant dans le palier  $35^\circ\text{C}$ , huile de lubrification ISO-VG 32.

#### 13.4.3.1 DIMENSIONS GÉNÉRALES ET VALEURS FONDAMENTALES

En admettant une pression moyenne  $p = 2,5 \text{ N/mm}^2$  et un rapport  $\beta = B/D = 0,8$ , le diamètre du coussinet ou de l'arbre à prévoir est trouvé par :

	$D = [80\,000 \text{ N} / (0,8 \cdot 2,5 \text{ N/mm}^2)]^{1/2} = 200 \text{ mm}.$
Longueur du coussinet :	$B = 150 \text{ mm}$ et $\beta = 150/200 = 0,75.$
Pression moyenne :	$\bar{p} = 80\,000 \text{ N} / (200 \cdot 150) \text{ mm}^2 = 2,667 \text{ N/mm}^2.$
Vitesse angulaire :	$\omega = 2 \pi 30 \text{ s}^{-1} = 60 \pi \text{ s}^{-1}.$
Vitesse de glissement :	$v_u = 0,1 \text{ m} \cdot 60 \pi \text{ s}^{-1} = 18,85 \text{ m/s}.$
Jeu relatif à prévoir	$\psi = 1,3 \text{ à } 2 \text{ ‰}.$
Lubrifiant : ISO-VG 32	$v_{40^\circ\text{C}} = 32 \text{ mm}^2/\text{s}$ $v_{100^\circ\text{C}} = 5,4 \text{ mm}^2/\text{s}.$ $\rho_{15^\circ\text{C}} = 0,872 \text{ kg/dm}^3.$
Métal antifricition	Pente de la droite $m = -3,6989$ , ordonnée à l'origine $n = 9,4114.$ Lg Sn 89      Pression admissible $p_{20^\circ\text{C}} = 45 \text{ N/mm}^2.$
Champs de tolérance	Coussinet : 200 H8      Arbre : 200 d8 Jeu moyen : $j_d = \frac{1}{2} (0 + 72) \text{ } \mu\text{m} - \frac{1}{2} (-170 - 242) \text{ } \mu\text{m} = 242 \text{ } \mu\text{m},$ Jeu relatif à froid : $\psi = 1,21 \text{ ‰}.$
Viscosité du lubrifiant :	admis provisoirement $30 \text{ mm}^2/\text{s}$ et $\eta_v = 0,027 \text{ Ns/m}^2.$
Nombre de Sommerfeld :	$So = 2,667 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \cdot 1,212 \cdot 10^{-6} / (60 \pi \text{ s}^{-1} \cdot 0,027 \text{ Ns/m}^2) = 0,767.$

#### 13.4.3.2 CONDITIONS DE REPOS

Les caractéristiques du métal antifricition sont :

Alliage selon DIN	Lg Sn 89
Modules d'élasticité	coussinet : $E_c = 58\,000 \text{ N/mm}^2$ , arbre : $E_a = 210\,000 \text{ N/mm}^2$ ,
Coefficient de contraction	$v_c = v_a = 0,3,$
Module d'élasticité "résultant"	$E_{ca} = 99\,885 \text{ N/mm}^2,$
Pression admissible	$p_{adm} = 45 \text{ N/mm}^2,$
Rayon réduit	$r_r = 100 \text{ mm} / 0,00121 = 82\,600 \text{ mm},$
Pression maximale	$p_{max} = [80000 \text{ N} \cdot 99885 \text{ N/mm}^2 / (2 \pi 82600 \text{ mm} \cdot 150 \text{ mm})]^{0,5} =$ $p_{max} = 10,1 \text{ N/mm}^2.$
Demi largeur de contact	$a = [8 \cdot 80000 \text{ N} \cdot 82600 \text{ mm} / (\pi 99885 \text{ N/mm}^2 \cdot 150 \text{ mm})]^{1/2} = 33,5 \text{ mm}.$

Toutes ces valeurs sont admissibles.

#### 13.4.3.3 COMPORTEMENT EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE DE CALCUL

En appliquant les relations proposées pour le palier 180°, il est possible de trouver le comportement de cet élément en fonction de la température de calcul. La première partie du tableau suivant contient les résultats numériques et la figure 13.24 montre la variation de la viscosité dynamique, de la hauteur minimale du film, du nombre de Sommerfeld et du coefficient de frottement équivalent en fonction de la température de calcul comprise entre  $20^\circ$  et  $80^\circ\text{C}$ .

#### 13.4.3.4 TEMPÉRATURE DE FONCTIONNEMENT

Le point de fonctionnement du palier hydrodynamique dépend directement de la température d'équilibre, cette grandeur se trouvant au moyen du bilan énergétique selon relation proposées :

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

$\dot{Q}_l + \dot{Q}_{ca} + \dot{Q}_r + P_{fr} = 0$  ou  $P_{fr} = -(\dot{Q}_l + \dot{Q}_{ca} + \dot{Q}_r)$ .  
 avec :  $\dot{Q}_l = -\rho_c C_c V_l (\vartheta_s - \vartheta_e)$   $\vartheta_e = 35^\circ\text{C}$  et  $\vartheta_s = ?$   $\rho_c, C_c, V_l$  dépendent de la température.  
 $\dot{Q}_{ca} = -\alpha A (\vartheta_{ca} - \vartheta_a)$   $\alpha = 19 \text{ W/m}^2\text{K}$  pour  $v_{air} = 1 \text{ m/s}$ ,  $A = 0,8 \text{ m}^2$   $\vartheta_a = 25^\circ\text{C}$  et  $\vartheta_{ca} = ?$   
 $\dot{Q}_r = -\rho_c C_c V_r (\vartheta_{rs} - \vartheta_{re})$  Cette puissance thermique est nulle car il n'y a pas de refroidisseur.  
 $P_{fr} = \mu_e F_r v_u$   $F_r = 80\,000 \text{ N}$ ,  $v_u = 18,85 \text{ m/s}$ ,  $\mu_e$  dépendant de  $So$ .  
 En substituant ces valeurs dans l'expression générale, le bilan numérique devient :  
 $\mu_e 80000 \cdot 18,85 = \rho_c C_c V_l (\vartheta_s - 35^\circ\text{C}) + 19 \cdot 0,8 (\vartheta_{ca} - 25^\circ\text{C})$ .

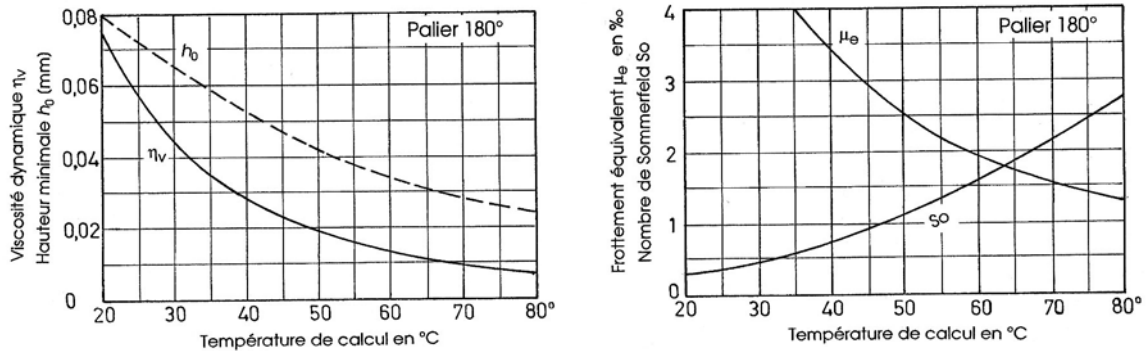


Figure 13.24 Comportement du palier en fonction de la température de calcul

La détermination du coefficient de frottement équivalent s'effectue, pour  $So \approx 1$ , à la température de calcul :  $\vartheta_c = \frac{1}{2} (\vartheta_e + \vartheta_s)$  et la température du carter est supposée correspondre à la température de sortie de l'huile du coussinet, soit  $\vartheta_{ca} = \vartheta_s =$  inconnue. Les caractéristiques de l'huile dépendent de la température de calcul : débit, masse volumique et chaleur massique. La recherche de la température d'équilibre consiste à déterminer les deux termes du bilan énergétique en fonction de la température de sortie de l'huile. Le tableau 13.4 donne les diverses valeurs nécessaires à ce contrôle.

Tableau 13.4  
Comportement du palier hydrodynamique et température d'équilibre  
Caractéristiques en fonction de la température de calcul

Tempér. °C	Viscosité Ns/m <sup>2</sup>	Nombre So	Excentr. Epsilon	Angle Bêta F	Hauteur h <sub>0</sub> [mm]	Débit dm <sup>3</sup> /s	Coefficient μ <sub>e</sub>
20	0.07442	0.278	0.337	65.869	0.080	0.0829	0.00794
25	0.05663	0.366	0.403	62.724	0.072	0.0948	0.00617
30	0.04395	0.471	0.465	59.270	0.065	0.1049	0.00494
35	0.03474	0.596	0.522	55.604	0.058	0.1133	0.00405
40	0.02790	0.742	0.572	51.927	0.052	0.1199	0.00340
45	0.02275	0.910	0.616	48.421	0.046	0.1248	0.00290
50	0.01880	1.102	0.655	45.201	0.042	0.1283	0.00252
55	0.01572	1.317	0.689	42.318	0.038	0.1306	0.00221
60	0.01330	1.558	0.719	39.778	0.034	0.1320	0.00197
65	0.01136	1.823	0.745	37.558	0.031	0.1326	0.00177
70	0.00980	2.114	0.768	35.623	0.028	0.1326	0.00160
75	0.00852	2.430	0.788	33.933	0.026	0.1322	0.00146
80	0.00747	2.773	0.806	32.452	0.024	0.1315	0.00134

Il est admis que le débit d'huile en circulation correspond exactement au débit entrant dans le coussinet. Le tableau ci-après permet de trouver les températures de calcul et de sortie du lubrifiant du palier en interpolant linéairement dans le tableau, soit :

- température de sortie de l'huile : entre  $55^\circ$  et  $60^\circ\text{C}$  → température  $55,9^\circ\text{C}$

## Organes de transmission directe

- température de calcul : entre 45 et 47,5°C → température 45,5°C.

À ces températures, les conditions de fonctionnement du palier en charge statique sont citées ci-après.

Tableau 13.5  
**Comportement du palier hydrodynamique et température d'équilibre**  
Recherche de la température d'équilibre

Températures du lubrifiant								
- d'entrée	35	35	35	35	35	35	35	35
- de sortie	35	40	45	50	55	60	65	70
- de calcul	35	37,5	40	42,5	45	47,5	50	52,5
Caractéristiques à la température de calcul								
Viscosité cinémat.	39,8	35,6	32,0	28,8	26,1	23,7	21,6	19,7
dynami.	0,0343	0,0306	0,0275	0,0247	0,0223	0,0202	0,0184	0,0167
Masse volumique	0,861	0,859	0,858	0,856	0,855	0,854	0,852	0,851
Chaleur massique	1763	1751	1740	1728	1717	1705	1694	1682
Nombre So	0,60	0,67	0,74	0,82	0,91	1,00	1,10	1,21
Débit huile	0,113	0,117	0,120	0,123	0,125	0,127	0,128	0,130
Frottement $\mu_e$ %	0,405	0,370	0,340	0,313	0,290	0,270	0,252	0,235
Puissances (en W)								
- produite	6110	5580	5130	4720	4370	4070	3800	3540
- évacuée carter	152	228	304	380	456	532	608	684
- évacuée huile	0	880	1792	2730	3670	4623	5542	6513
- évacuée totale	152	1108	2096	3110	4126	5155	6150	7197

### RÉSULTATS DU CALCUL DU PALIER HYDRODYNAMIQUE PALIER 180°

Température de calcul	51.5 °C
Température ambiante	25.0 °C
Température entrée huile	35.0 °C
Viscosité dynamique	0,00219 Ns/m <sup>2</sup>
Nombre de Sommerfeld	0,93
Excentricité relative	0.620
Angle de la fente minimale	47.80°
Coefficient de frottement	0.00282
Épaisseur du film d'huile	0.045 mm
Couple de frottement	22.86 m*N
Puissance thermique produite	4310 W
Puissance thermique dissipée	4310 W
Débit d'huile dans le palier	0.129 dm <sup>3</sup> /s

#### 13.4.3.5 VITESSE LIMITE INFÉRIEURE

Cette vitesse se détermine au moyen des deux chiffres proposés par H.H. Ott et E. Wenig. Le calcul des deux constantes  $a$  et  $b$  s'effectue à partir de deux points lus sur la courbe ou en introduisant les valeurs numériques proposées par les auteurs :

$$a = 1,4 \quad \text{et} \quad b = 2,25.$$

L'épaisseur minimale admissible est supposée égale à 6  $\mu\text{m}$  pour le diamètre 200 mm. En appliquant les relations données dans le texte, la vitesse angulaire limite est alors :

$$\omega_{\text{lim}} = 3,34 \text{ rad/s.}$$

Le contrôle des deux chiffres et la position du point représentatif sur le graphique donne :

- chiffre de charge :  $W^* = 2,17,$

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

- chiffre de film minimal :  $H^* = 2,44$ .

Le point défini par ces deux valeurs se trouve sur la courbe de la figure. La vitesse angulaire limite montre que le régime hydrodynamique existe déjà à partir de 0,5 tour par seconde.

Comme les coquilles du coussinet sont en acier et en admettant l'équilibre thermique atteint, l'effet de la température est pratiquement négligeable dans cette exécution. La puissance spécifique produite à l'intérieur du demi coussinet vaut :

$$P_{fr}/A_{0,5} = 4310 \text{ W} / (\pi \cdot 10 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}) = 9,2 \text{ W/cm}^2 !$$

Ce résultat montre une particularité du palier lisse : la production d'énergie calorifique est très localisée.

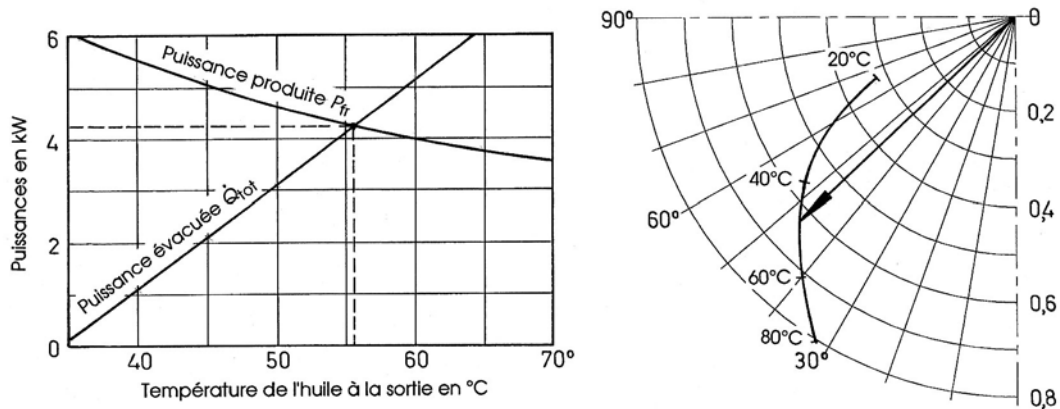


Figure 13.25 Equilibre thermique et déplacement du centre de l'arbre dans le coussinet

### 13.5 PALIERS MULTILOBES

Le palier cylindrique possède seulement un film porteur alors que les types dérivés, appelés paliers multilobes, présentent pratiquement deux à quatre films porteurs.

Nombre de films d'huile porteurs	Paliers à surfaces			Paliers à poches		Paliers à segments pivotants	
	Sens de rotation	→	←	→	←	→	←
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Figure 13.26 Géométrie de l'alésage des paliers multilobes en fonction du nombre de films porteurs et des sens de rotation (cliché ABB 504887.1 f)

Selon figure 13.26, il est possible de distinguer des paliers à surfaces fixes, à poches et à segments fixes ou pivotants pour un ou deux sens de rotation. Dans les paliers multilobes à surfaces fixes, ces surfaces sont en arc cylindrique à centres distincts. Des rainures axiales d'alimentation et d'évacuation sont placées à la jonction des lobes.

### 13.5.1 PALIER À DEUX LOBES

Le palier à deux lobes, appelé également palier citron, est constitué de deux demi coussinets usinés en cylindrique avec cales intermédiaires, les centres  $O_1$  et  $O_2$  des deux surfaces cylindriques étant confondus. Après élimination de ces pièces auxiliaires, le centrage de l'arbre et la stabilité de la ligne d'arbres sont améliorés grâce à la présence du double film hydrodynamique. Pour mettre en équation ce genre de palier, on considère séparément chaque lobe comme un palier à arc de film partiel, dans le cas particulier comme un palier  $180^\circ$ . La portance hydrodynamique globale est obtenue par sommation des portances partielles de chaque surface. La recherche des deux excentricités relatives en régime de marche doit s'effectuer comme dans le cas du palier cylindrique. À chaque position de l'arbre correspond une répartition de la pression sur les lobes supérieur et inférieur. Les caractéristiques générales de ce palier, utilisé dans les turbomachines, sont :

- conception : simple,
- montage : simple,
- prix : bas,
- réparation : simple,
- charge : modérée,
- stabilité : modérée,
- amortissement : modéré,
- pertes : élevées,
- pièces de rechange : palier complet,
- influence de l'arbre : modérée.

Les pertes dans ce palier sont élevées car les deux films participent aux forces de cisaillement s'opposant à la rotation de l'arbre.

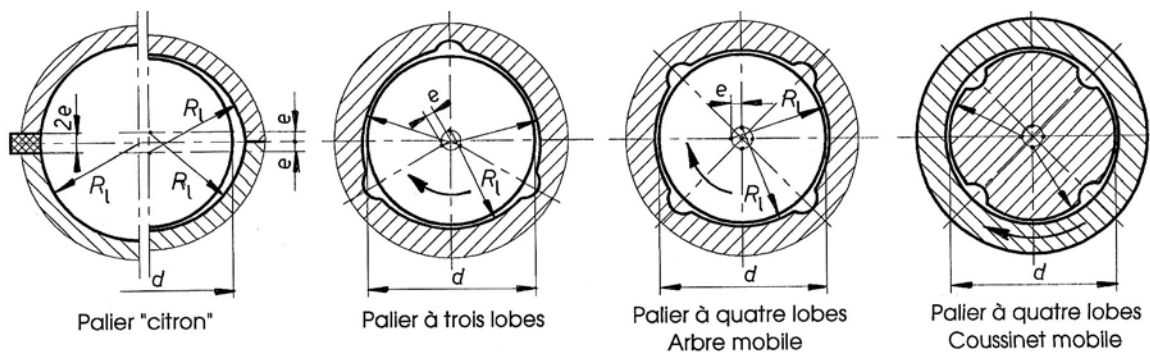


Figure 13.27 Principe de la géométrie des paliers à deux, trois et quatre lobes

### 13.5.2 PALIERS À TROIS OU QUATRE LOBES

Les paliers à trois ou quatre lobes permettent un meilleur centrage de l'arbre dans le coussinet et plusieurs fabricants offrent des exécutions dans des dimensions comprises entre 20 mm et 200 mm. Les exécutions courantes comprennent des paliers pour charge radiale seule et pour charges combinées radiale - axiale avec butées hydrodynamiques. Le contrôle de ces éléments de catalogue est fortement simplifié. Tous ces paliers présentent des pertes par

cisaillement très élevées et ne conviennent pas dans les grandes machines. De nombreuses variantes ont été proposées depuis des décennies. Le symbole utilisé en allemand, et se trouvant souvent cité dans les articles techniques, est : MGF pour Mehrflächengleitlagern.

### 13.5.3 PALIERS DE GUIDAGE À SEGMENTS FIXES

Les machines à axe vertical nécessitent l'emploi de paliers de guidage afin de centrer les parties mobiles et supporter les déséquilibres engendrés par des charges radiales parasites. Les pertes dans ce genre de palier sont relativement importantes et comme les dimensions diamétrales sont presque toujours très grandes, un mètre et même plus, il est très difficile d'exécuter un palier cylindrique et d'assurer une cylindricité suffisante. Le palier de guidage à segments fixes facilite la fabrication et le montage du guidage. L'ajustement des segments, généralement au nombre de quatre à six, permet de régler le jeu entre l'arbre et les surfaces de glissement, de diminuer les pertes, d'alimenter chaque segment en fluide lubrifiant, de contrôler la circulation du liquide et sa température, voir figure 13.28.

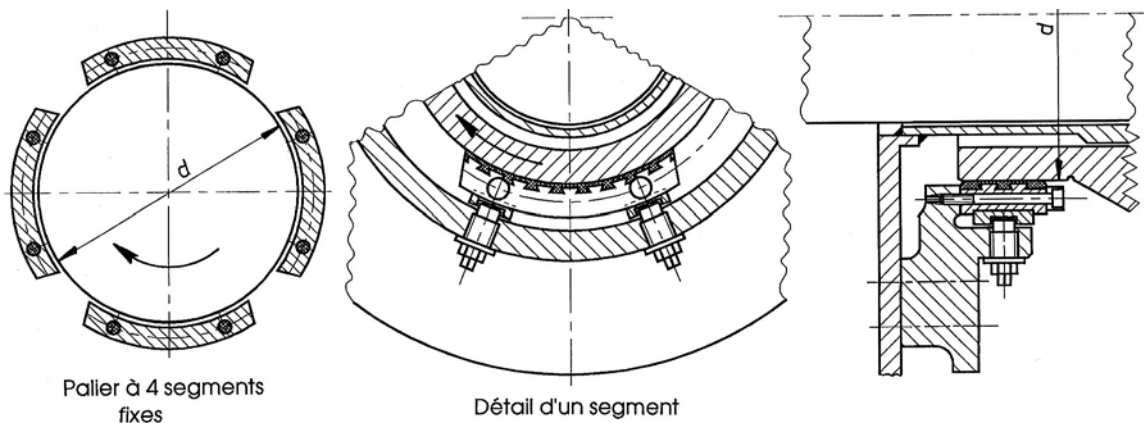


Figure 13.28 Palier de guidage à segments fixes dans une turbine hydraulique à axe vertical

### 13.5.4 PALIERS À SEGMENTS PIVOTANTS

Dans les grandes machines à axe horizontal ou vertical, l'augmentation des puissances à transmettre provoque une augmentation des fréquences de rotation et des diamètres des arbres transmettant les couples. Les pertes dans les paliers représentent facilement 0,5% de la puissance de la machine. Selon ABB, pour une turbine à vapeur de 1300 MW, la vitesse de glissement dans les paliers peut atteindre 135 m/s, la masse à soutenir par palier 200 tonnes et la puissance perdue 6,5 MW à évacuer vers l'extérieur du carter des paliers !

#### 1. Description générale

L'utilisation de paliers cylindriques ou multilobes dans les grandes machines fait apparaître malheureusement des pertes par frottement inadmissibles causées par leur fonctionnement en régime turbulent. Les recherches effectuées par ABB ont montré une limite supérieure du régime laminaire pour un nombre de Reynolds satisfaisant la condition suivante :

$$Re = v_u h_0 / \nu_0 \geq 1100 \pm 100.$$

avec :  $\nu_0$  viscosité du fluide lubrifiant à la température d'entrée dans le palier,  
 $h_0$  jeu moyen du palier :  $h_0 = 0,5 (D - d)$ ,  
 $v_u$  vitesse circonférentielle de l'arbre.

L'apparition du régime turbulent dans les paliers entraîne une forte augmentation des pertes et influence défavorablement le dimensionnement du système de refroidissement dans le sens d'une augmentation des coûts. Dans la relation ci-dessus, pratiquement un seul paramètre peut être modifié pour éviter ce régime : la hauteur de la fente, car la vitesse circonférentielle est imposée par le couple à transmettre et la fréquence de rotation de la machine, la viscosité pouvant varier seulement dans un domaine très limité. Les segments étant articulés, un ajustement automatique de la position du segment se crée par l'action des poussées hydrodynamiques, soit dans le sens circonférentiel, soit dans le sens axial afin de suivre la déformation de l'arbre. Le jeu radial moyen est plus petit que dans les autres types de paliers à coussinets fixes et de ce fait, les pertes sont plus faibles. Les caractéristiques dynamiques du palier à segments sont aussi plus favorables, car une bonne stabilité est obtenue pour une certaine rigidité de l'arbre.

## 2. Conditions de fonctionnement

Le nombre de patins est généralement compris entre trois et cinq. En fonctionnement, chaque segment présente une certaine inclinaison par rapport à l'arbre fixant la variation de l'épaisseur du film. Le calcul de la position de l'équilibre de l'arbre dans le palier impose une poussée hydrodynamique résultante directement opposée à la charge radiale extérieure. La poussée sur chaque patin doit être déterminée séparément, la ligne d'action de cette poussée devant passer obligatoirement par le point d'articulation du segment. La recherche de l'équilibre s'effectue par voie itérative. La direction des poussées partielles est dirigée, avec des écarts insignifiants, vers le centre de l'arbre. Cette direction reste pratiquement constante quelle que soit la direction de la charge extérieure. Le patin oscillant se comporte presque comme un segment fixe sous une charge de direction constante. Le calcul du patin est ainsi ramené au calcul du segment fixe pris isolément. Les mesures sur des paliers réels ont montré non seulement une variation importante de la pression sur chaque segment, mais également un gradient thermique non négligeable dans le film porteur, figure 13.29.

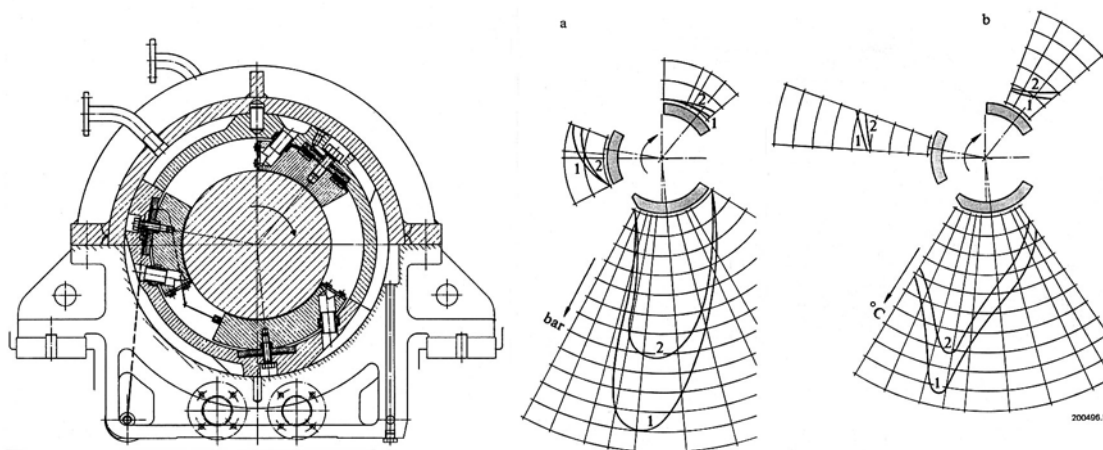


Figure 13.29 Palier d'essai équipé de patins oscillants prévu pour un diamètre  $d = 560$  mm. Valeurs obtenues au cours d'essais à 60 t/s, une charge radiale de 1 = 1000 kN, 2 = 750 kN : a) pression; b) température (clichés ABB)

## 3. Géométrie des segments et hypothèses de contrôle

Les dimensions particulières intervenant dans la définition du palier à segments orientables sont :

- le nombre de patins :  $z$ ,
- le jeu minimal du palier :  $\Delta R_{\min} = R - r$ ,



- le rayon de courbure du patin :  $R_p$ ,
- l'excentricité du centre de courbure :  $e = R_p - R$ ,
- le rapport des courbures :  $\psi_r = (e + \Delta R_{\min}) / \Delta R_{\min}$ ,
- la position relative du point fixe :  $\phi_r = \phi_1 / \phi_{\text{patin}}$ .

Si le palier doit pouvoir supporter les deux sens de rotation, la position relative du point fixe est égale à 0,5. Le calcul des propriétés du palier se déroulant dans le film porteur part de deux relations :

- l'équation différentielle de Reynolds complète si la charge est variable selon (4.39.3),
- une seconde équation aux dérivées partielles décrivant l'évolution des températures dans le film. Cette équation suppose que l'énergie produite dans le palier est évacuée entièrement par la circulation du fluide. La température est admise constante dans le sens axial et par conséquent dépend seulement de l'angle circonférentiel. La variation de la viscosité tient compte de l'effet de la température et de la pression. La solution se trouve encore simplifiée si l'on admet une répartition parabolique de la pression dans la direction axiale. L'équation de Reynolds devient une équation différentielle ordinaire non homogène de deuxième ordre. Les mesures effectuées sur des paliers réels montrent une bonne concordance entre la théorie et les résultats expérimentaux. Le nombre de Sommerfeld est encore défini par la relation de base. D'après ABB, le coefficient de frottement relatif mesuré à demi et pleine charge, à 30 t/s, vaut :

$$\text{pour } So = 0,6 \Rightarrow \mu_c / \psi = 0,55$$

$$\text{pour } So = 1,2 \Rightarrow \mu_c / \psi = 0,28.$$

### 13.5.5 PALIER À DOUILLE FLOTTANTE

Ce type de palier se compose de deux tubes cylindriques montés l'un dans l'autre, le premier, plutôt épais, constituant le coussinet fixe proprement dit, le second mince et libre, guidé axialement, entre le premier et l'arbre. L'alimentation en fluide porteur s'effectue de l'extérieur vers les parties centrales à travers des orifices de communication. Ce type de palier s'emploie dans les appuis faiblement sollicités et à fréquence de rotation élevée, un exemple étant donné par les paliers des petits turbocompresseurs pour moteur Diesel. Bien conçus, ils ont un bon comportement en charge et une stabilité suffisante.

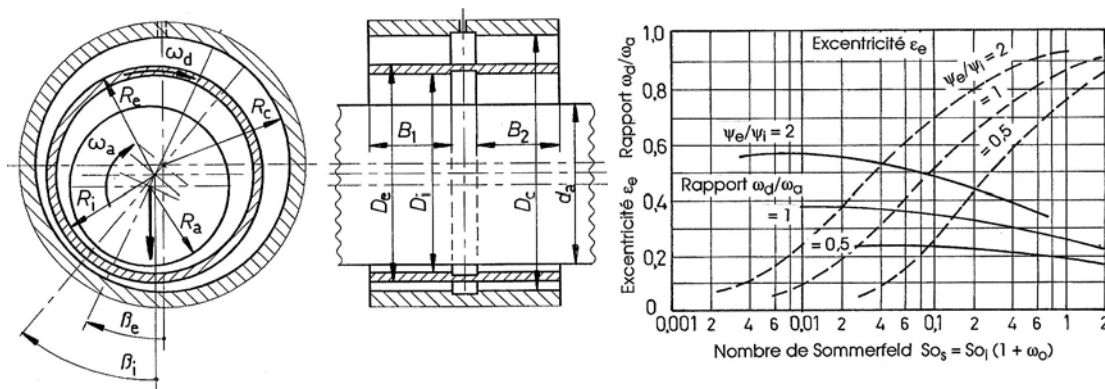


Figure 13.30 Palier cylindrique à douille flottante : principe de la conception  
Comportement en fonction de  $So_s$  pour :  $D_e/D_i = 1,25$ ;  $B_1/D_i = B_2/D_i = 0,5$

#### 13.5.5.1 DIMENSIONS GÉOMÉTRIQUES ET HYPOTHÈSES INITIALES

Les dimensions géométriques principales sont données sur la figure ci-dessus représentant un palier à douille flottante avec alimentation centrale par une rainure circulaire, le guidage de l'arbre étant assuré par deux cylindres de longueur  $B_1$  et  $B_2$ . Les dimensions sont :

$D_c = 2 R_c$	diamètre du coussinet,
$D_e = 2 R_e$	diamètre extérieur de la douille flottante,
$D_i = 2 R_i$	diamètre intérieur de la douille flottante,
$d_a = 2 R_a$	diamètre de l'arbre,
$B = B_1 + B_2$	longueur portante totale de la douille et du coussinet,
$F_r$	force radiale sur l'arbre, supposée agir verticalement vers le bas,
$\Delta R_i = R_i - R_a$	jeu radial intérieur,
$\Delta R_e = R_e - R_c$	jeu radial extérieur,
$\psi_i = \Delta R_i / R_a$	jeu relatif intérieur,
$\psi_e = \Delta R_e / R_e$	jeu relatif extérieur,
$\omega_a$	vitesse angulaire de l'arbre,
$\omega_d$	vitesse angulaire de la douille,
$\omega_c$	vitesse angulaire du coussinet : admis $\omega_c = 0$ .

Les hypothèses complémentaires introduites dans l'étude du comportement de ce palier sont :

- le fluide lubrifiant est incompressible et possède une viscosité et une densité constantes,
- le fluide obéit aux lois des fluides newtoniens, l'écoulement restant laminaire,
- la douille flottante est à masse négligeable donc le poids est beaucoup plus petit que les poussées oléohydrauliques. Le palier est du type palier 360°.

### 13.5.5.2 ÉQUILIBRE DE LA DOUILLE

Le comportement du palier dépend de la fréquence de rotation de la douille libre. La vitesse angulaire peut se trouver à partir de l'équilibre de translation et de rotation de la douille. La poussée intérieure  $F_i$  doit être égale à la poussée extérieure  $F_e$ , mais de sens contraire. Les vitesses angulaires entre l'arbre et la douille sont  $\omega_a$  et  $\omega_d$ , entre la douille et le coussinet seulement  $\omega_d$  si le coussinet est supposé fixe. Les deux nombres de Sommerfeld correspondant se trouvent par [2.44] :

$$\text{- intérieur :} \quad \text{So}_i = \frac{F_i \psi_i^2}{B D_i \eta_{vi} (\omega_a + \omega_d)}, \quad (13.17.1.1)$$

$$\text{- extérieur :} \quad \text{So}_e = \frac{F_e \psi_e^2}{B D_e \eta_{ve} \omega_d}. \quad (13.17.1.2)$$

Comme l'équilibre de translation impose d'égalité des poussées, alors  $F_i = F_e$  et :

$$\frac{\text{So}_i}{\text{So}_e} = \frac{D_e \eta_{ve}}{D_i \eta_{vi}} \left( \frac{\psi_i}{\psi_e} \right)^2 \frac{\omega_d}{\omega_a + \omega_d} = \frac{D_o \eta_{vo}}{\psi_o^2} \frac{\omega_o}{1 + \omega_o}. \quad (13.17.2)$$

avec comme simplification de l'écriture les rapports suivants :

$$D_o = D_e / D_i \quad \eta_{vo} = \eta_{ve} / \eta_{vi} \quad \psi_o = \psi_e / \psi_i \quad \text{et} \quad \omega_o = \omega_d / \omega_a.$$

Il vient :

$$F R_i \psi_i \left[ \frac{\pi}{\text{So}_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2}} \frac{\omega_a - \omega_d}{\omega_a + \omega_d} - \frac{\varepsilon_i}{2} \sin \beta_i \right] = F R_e \psi_e \left[ \frac{\pi}{\text{So}_e \sqrt{1 - \varepsilon_e^2}} + \sin \beta_e \right]. \quad (13.17.3)$$

L'équilibre de rotation peut se trouver à partir de la relation du coefficient de frottement équivalent valable pour le palier 360° en tenant compte du signe des vitesses angulaires. Il est possible d'écrire l'égalité :

$$\frac{1}{\omega_o} = \frac{\omega_a}{\omega_d} = \frac{So_e}{So_i} \frac{D_o \eta_{vo}}{\psi_o^2} - 1. \quad (13.17.4)$$

Cette dernière relation se laisse résoudre numériquement en partant des effets soit sur l'extérieur, soit sur l'intérieur de la douille en supposant  $\psi_o^2/(D_o \eta_o)$  constant. En admettant même viscosité dans les deux fentes, donc  $\eta_o = 1$ , les grandeurs  $D_o$  et  $\psi_o$  caractérisent le palier. En simplifiant l'expression du coefficient de frottement équivalent et en utilisant la relation de Vogelpohl, soit  $\mu_e/\psi = \pi/So$  si  $So < 1$ , il est possible de trouver :

$$\frac{So_e}{So_i} = D_o \psi_o \frac{1 + \omega_o}{1 - \omega_o}. \quad (13.17.5.1)$$

et finalement

$$\omega_o = \frac{\omega_d}{\omega_a} = \frac{1}{1 + D_o^2 \eta_{vo} / \psi_o}. \quad (13.17.5.2)$$

le rapport des vitesses angulaires de la douille et de l'arbre. La figure 13.30 montre l'excentricité et ce rapport des vitesses en fonction du nombre de Sommerfeld de substitution  $So_s = So_i (1 + \omega_o)$  pour divers rapports  $\psi_o/\psi_i$ .

### 13.5.5.3 PORTANCE ET COMPORTEMENT

Pour trouver la portance et le comportement du palier réel à partir du palier infiniment large, P.A. Fink [4.64] a introduit une répartition parabolique de la pression dans la direction axiale. Le chiffre moyen de pression  $\Pi(\varphi)$  est relié au chiffre de pression local  $\Pi(\varphi)$  par une relation :

$$\underline{\Pi}(\varphi) = [m/(m+1)] \Pi(\varphi),$$

avec :  $m = 2 + \beta^2/(1 + \beta)$ .

Pour un rapport  $\beta = B/D = 0,5$ ,  $m = 2,17$  et le facteur de correction vaut 0,684 . Cette hypothèse, proposée par divers auteurs, correspond assez bien avec la réalité. Les deux nombres de Sommerfeld peuvent s'exprimer en fonction des deux excentricités et il est possible de trouver par voie itérative la trajectoire du centre de l'arbre et du centre de la douille par rapport au coussinet fixe. Cet auteur a comparé le comportement du palier à douille et du palier cylindrique sous charges constante et variable en fonction du temps. Les conditions favorables de fonctionnement du palier à douille flottante sont données pour :

- un jeu relatif égal à l'intérieur et à l'extérieur,
- une diminution des risques de régime turbulent dans l'écoulement,
- une diminution des pertes à jeux identiques,
- une amélioration de la stabilité et une augmentation de la raideur et de l'amortissement.

## 13.6 PALIERS HYDRODYNAMIQUE SOUS CHARGE VARIABLE

Le palier radial cylindrique 360° peut aussi supporter des charges variables en module et direction. Sous l'effet de ce genre de charges, le fluide lubrifiant subit non seulement un cisaillement tangentiel mais aussi un écrasement radial qu'il est possible d'estimer à partir de la relation différentielle de Reynolds. Le comportement non linéaire du palier hydrodynamique est un autre problème à résoudre et la stabilité d'une ligne d'arbre centrée dans des paliers hydrodynamiques sera discutée en fin de chapitre.

### 13.6.1 PALIER INFINIMENT LONG EN ÉCRASEMENT

Le comportement du palier en écrasement est tout d'abord étudié pour un palier cylindrique infiniment long afin de pouvoir résoudre simplement un cas particulier de l'équation différentielle aux dérivées partielles de Reynolds et de découvrir les propriétés sous l'effet de l'écrasement.

#### 13.6.1.1 RELATION ET CONDITIONS AUX LIMITES

La mise en équation du comportement en écrasement part du mouvement radial pur, donc sans rotation, du centre de l'arbre par rapport au coussinet cylindrique. La cinématique générale du centre de l'arbre peut se donner sous la forme :

$$v_{\dot{\epsilon}} = dh/dt = \psi R \dot{\epsilon} \quad \text{avec} \quad \dot{\epsilon} = d\epsilon/dt.$$

Le premier terme du second membre de l'équation différentielle de Reynolds tombe et le chiffre de pression se transforme alors en :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}} = \frac{p \psi^2}{\eta_v \dot{\epsilon}}. \quad (13.18.1)$$

L'équation différentielle aux dérivées partielles de Reynolds en écrasement devient :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi_{\dot{\epsilon}}}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{D}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi_{\dot{\epsilon}}}{\partial \bar{y}} \right) = 12 \cos \varphi. \quad (13.18.2)$$

Les premières recherches sur le comportement du palier cylindrique en écrasement datent des années 1950 et les conditions aux limites diffèrent d'un auteur à l'autre. Les hypothèses introduites sont principalement les suivantes :

1. Pression nulle sur l'axe perpendiculaire à la direction du déplacement :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}}(0,5 \pi) = \Pi_{\dot{\epsilon}}(1,5 \pi) = 0.$$

2. Pression symétrique de part et d'autre du déplacement :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}}(\pi - \varphi_0) = \Pi_{\dot{\epsilon}}(\pi + \varphi_0).$$

La pression nulle se situe généralement plus loin que  $\varphi_0 = \pm 90^\circ$  dans le coussinet. Il est nécessaire de fixer une condition supplémentaire afin de satisfaire l'équation de continuité et la répartition de la pression sous la forme :

$$(d\Pi_{\dot{\epsilon}}/d\varphi)_{\pi-\varphi_0} = (d\Pi_{\dot{\epsilon}}/d\varphi)_{\pi+\varphi_0} = 0.$$

Cette condition complémentaire correspond à la condition proposée par Reynolds en rotation pure. Elle est nommée souvent condition physique aux limites.

## 13.6.1.2 MISE EN ÉQUATION GÉNÉRALE

L'équation différentielle de Reynolds se transforme en une équation différentielle ordinaire de second ordre, la pression ne dépendant plus de la position du point dans le sens axial :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi_{\dot{\epsilon}}}{\partial \varphi} \right) = 12 \cos \varphi. \quad (13.18.3)$$

En introduisant la hauteur relative  $H(\varphi)$  selon (4.39.5), soit :

$$H = 1 + \epsilon \cos \varphi,$$

et après double intégration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\dot{\epsilon}}}{\partial \varphi} &= 12 \frac{\sin \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^3} + C_1. \\ \Pi_{\dot{\epsilon}} &= 12 \cos \varphi \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2 \epsilon \cos \varphi} + C_1 \varphi + C_2. \end{aligned} \quad (13.18.4)$$

La première constante d'intégration  $C_1$  peut se trouver à partir de la symétrie des pressions :

$$(d\Pi_{\dot{\epsilon}}/d\varphi)_{\varphi=\pi} = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

La relation se simplifie en :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}} = \frac{6}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2 \epsilon \cos \varphi} + C_2. \quad (13.18.5)$$

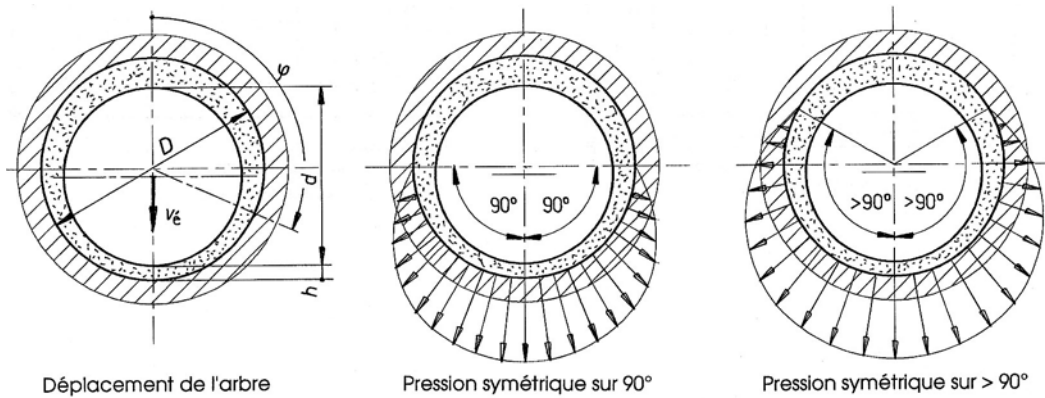


Figure 13.31 Déplacement en écrasement et hypothèses sur la répartition de la pression

 13.6.1.3 CONDITIONS AUX LIMITES AVEC PRESSION NULLE À  $\pi \pm \varphi_0$ 

La pression devient nulle aux angles  $(\pi \pm \varphi_0)$  et le gradient de pression vaut également zéro en ces deux points. Cette condition est satisfaite, avec  $C_1 = 0$ , pour :

$$\sin(\pi + \varphi_0) = \sin(\pi - \varphi_0) = 0,$$

soit pour 0 et  $2\pi$ , c'est-à-dire pour une pression agissant sur toute la surface intérieure du coussinet. Remplaçons ces angles dans l'expression et recherchons la constante  $C_2$  :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}(\varphi_0)} = \frac{6}{\epsilon (1 + \epsilon^2)} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{6}{\epsilon (1 + \epsilon^2)}.$$

Le chiffre de pression vaut alors :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}} = \frac{6}{\epsilon} \left[ \frac{1}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} - \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \right]. \quad (13.19.1)$$

Comme la pression est symétrique par rapport à l'axe vertical situé à  $\varphi = \pi$ , la portance dépend seulement de la poussée composante parallèle à l'axe de symétrie. Le nombre de Sommerfeld en écrasement peut s'exprimer par :

$$So_{\dot{\epsilon}} = \frac{\bar{p} \psi^2}{\eta_v \dot{\epsilon}} = \frac{F_r \psi^2}{B D \eta_v \dot{\epsilon}}, \quad \text{et} \quad F_r = So_{\dot{\epsilon}} B D \frac{\eta_v \dot{\epsilon}}{\psi^2}. \quad (13.19.2)$$

Intégrons :

$$So_{\dot{\epsilon}} B D \frac{\eta_v \dot{\epsilon}}{\psi^2} = \int_0^{2\pi} B \frac{\eta_v \dot{\epsilon}}{\psi^2} \Pi_{\dot{\epsilon}} \cos \varphi R d\varphi.$$

ou encore :

$$So_{\dot{\epsilon}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Pi_{\dot{\epsilon}} \cos \varphi R d\varphi = -\frac{3}{2} 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} d\varphi - \frac{\cos \varphi}{(1 + \epsilon^2)^2} d\varphi.$$

et finalement :

$$So_{\dot{\epsilon}} = \frac{6\pi}{(1 + \epsilon^2)^{3/2}}. \quad (13.19.3)$$

La pression maximale se trouve à  $\varphi = \pi$ , donc :

$$\Pi_{\dot{\epsilon} \max} = \frac{6}{\epsilon} \left[ \frac{1}{(1 - \epsilon)^2} - \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \right] = \frac{24}{(1 - \epsilon^2)^2}. \quad (13.19.4)$$

et le rapport entre la pression maximale et la pression moyenne :

$$\frac{\Pi_{\dot{\epsilon} \max}}{So_{\dot{\epsilon}}} = \frac{4}{\pi \sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (13.19.5)$$

L'excentricité en écrasement dans le palier 360° peut varier de -1,0 à +1,0 . Les résultats sont identiques pour les écrasements négatifs et positifs.

#### 13.6.1.4 CONDITIONS AUX LIMITES AVEC PRESSION NULLE À $\pm \pi/2$

La pression est nulle pour  $\varphi = \pm \pi/2$  ou pour  $\Pi_{\dot{\epsilon}}(\varphi = \pm \pi/2) = 0$ . La seconde constante d'intégration devient :

$$C_2 = -6/\epsilon,$$

et le chiffre de pression :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}} = \frac{6}{\epsilon} \left[ \frac{1}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} - 1 \right]. \quad (13.20.1)$$

La portance du palier se calcule pour les deux genres d'écrasement définis par : un écrasement positif vers le bas, un écrasement négatif vers le haut.

Elle se trouve par les expressions générales :

$$So_{\dot{\epsilon}(+)} = -\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Pi_{\dot{\epsilon}} \cos \varphi d\varphi, \quad So_{\dot{\epsilon}(-)} = -\frac{1}{2} \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \Pi_{\dot{\epsilon}} \cos \varphi d\varphi.$$

Après substitution, intégration et simplification, les deux nombres de Sommerfeld valent :

$$So_{\dot{\epsilon}(+)} = \frac{6}{\epsilon} \left[ \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} + \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} \cdot \left( \pi - 2 \arctan \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \right) \right].$$

$$So_{\dot{\epsilon}(-)} = \frac{6}{\epsilon} \left[ \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} - 2 \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} \cdot \arctan \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \right]. \quad (13.20.2)$$

Le chiffre de pression est maximal à  $\varphi = \pi$  pour un écrasement positif, à  $\varphi = 0$  pour un écrasement négatif. Il s'exprime par :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}_{\max(+)}} = \frac{6(2-\epsilon)}{(1-\epsilon^2)^2}. \quad (13.20.3)$$

Ces dernières valeurs permettent de trouver les deux rapports entre les pressions maximale et moyenne. Attention : les résultats sont différents en excentricités positive et négative.

### 13.6.1.5 CAS PARTICULIER : COUSSINET TRÈS ÉTROIT

Le coussinet très étroit est aussi un cas particulier pouvant se résoudre approximativement au moyen de la relation de Reynolds. En négligeant le gradient de pression dans la direction circonférentielle, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi_{\dot{\epsilon}}}{\partial \bar{y}} \right) = \left( \frac{B}{D} \right)^2 \cdot 12 \cos \varphi. \quad (13.21.1)$$

Après simplification de l'écriture et intégration :

$$\frac{d\Pi_{\dot{\epsilon}}}{d\bar{y}} = \left( \frac{B}{D} \right)^2 \cdot \frac{12}{H^3} \cos \varphi \cdot \frac{\bar{y}^2}{2} + C_1.$$

et avec :  $(d\Pi_{\dot{\epsilon}}/d\bar{y})_{\bar{y}=0} = 0$ , alors  $C_1 = 0$ . Après nouvelle intégration, la relation devient :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}} = \left( \frac{B}{D} \right)^2 \cdot \frac{12}{H^3} \cos \varphi \cdot \frac{\bar{y}^2}{2} + C_2. \quad (13.21.2)$$

La pression est nulle à  $\bar{y} = \pm 1$ , donc  $\Pi_{\dot{\epsilon}}(\varphi, \bar{y} = \pm 1) = 0$  et  $C_2 = - (B/D)^2 6 \cos \varphi / H^3$ .

Finalement, le chiffre de pression s'exprime par :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}} = \left( \frac{B}{D} \right)^2 \cdot \frac{6 \cos \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^3} \cdot (\bar{y}^2 - 1). \quad (13.21.3)$$

La recherche de la portance du coussinet s'effectue pour :  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$  et pour  $-1,0 \leq \bar{y} \leq 1,0$ . Les relations pour le nombre de Sommerfeld en écrasements positif et négatif sont :

$$\begin{aligned} \text{So}_{\dot{\epsilon}(+)} &= -4 \left( \frac{B}{D} \right)^2 \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{5/2}} \left[ \frac{3}{2} \epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} + (1+2\epsilon^2) \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right) \right] \\ \text{So}_{\dot{\epsilon}(-)} &= -4 \left( \frac{B}{D} \right)^2 \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{5/2}} \left[ -\frac{3}{2} \epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} + (1+2\epsilon^2) \cdot \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right]. \end{aligned} \quad (13.21.4)$$

Ces expressions donnent des valeurs correctes pour le coussinet étroit réel, l'erreur commise étant inférieure à 1% lorsque  $B/D = 0,125$ . La pression maximale se trouve au milieu de la longueur du coussinet pour  $\varphi = \pi$  en écrasement positif ou  $\varphi = 0$  en écrasement négatif :

$$\Pi_{\dot{\epsilon}_{\max}} = \left( \frac{B}{D} \right)^2 \cdot \frac{6}{(1-\epsilon)^3}. \quad (13.21.5)$$

Finalement, le débit latéral relatif se trouve par :  $\bar{V} = \frac{\dot{V}}{R^3 \psi \epsilon} = 4 \frac{B}{D}$ .

### 13.6.2 PALIER DE LONGUEUR FINIE EN ÉCRASEMENT

La recherche du comportement du palier cylindrique 360° en écrasement nécessite la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles de Reynolds, généralement sous forme numérique. L'utilisation d'hypothèses simplificatrices sur la répartition de la pression dans le sens axial, par exemple une répartition polynomiale, facilite ce travail. L'emploi de la méthode des éléments finis est également possible. Ce sous-chapitre contient soit les formules, soit les représentations graphiques des propriétés principales du palier en écrasement.

### 13.6.2.1 NOMBRE DE SOMMERFELD $So_\epsilon$

Le nombre de Sommerfeld est relié à l'excentricité relative, positive ou négative, et au rapport  $B/D$  par une expression :  $So_\epsilon = f(\epsilon, B/D)$ .

Constantes :

$$\begin{aligned} a_{1s} &= 0,70038 + 3,2415 B/D - 12,2486 (B/D)^2 + 18,895 (B/D)^3 - 9,3561 (B/D)^4, \\ a_{2s} &= -0,999936 + 0,0157434 B/D - 0,74224 (B/D)^2 + 0,42278 (B/D)^3 - \\ &\quad - 0,368928 (B/D)^4. \end{aligned}$$

Nombre de Sommerfeld :

$$So_\epsilon = 4 \left( \frac{B}{D} \right)^2 (1 - \epsilon^2)^{5/2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \epsilon \right) (1 + 2\epsilon^2) + \frac{3}{2} \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \right] \cdot \frac{a_{1s}(1 - \epsilon)}{-a_{2s} - \epsilon}. \quad (13.22.1)$$

La figure 13.32 montre le nombre de Sommerfeld en écrasement en fonction de l'excentricité relative  $\epsilon$  pour cinq valeurs du rapport  $B/D$  : 1,0 ; 0,75 ; 0,50 ; 0,25 et 0,125. Le comportement en excentricité négative est fortement différent du comportement en excentricité positive.

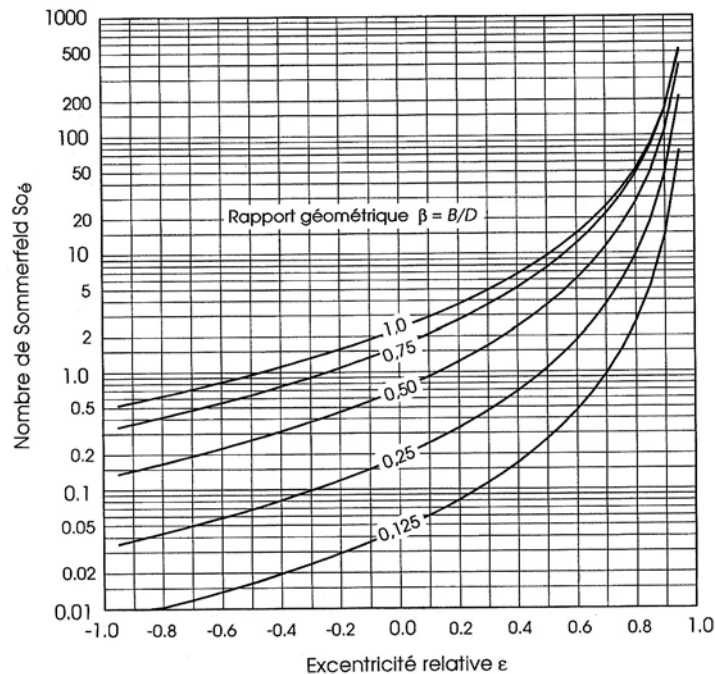


Figure 13.32 Nombre de Sommerfeld  $So_\epsilon$  en fonction de l'excentricité relative  $\epsilon$

### 13.6.2.2 DÉBIT RELATIF

Le débit relatif dans le palier peut aussi s'exprimer au moyen d'une formule approximative et ce débit dépend essentiellement de l'excentricité et du rapport géométrique  $B/D$ . Il est représenté sur la figure 13.33 à gauche.

Constantes :

$$\begin{aligned} a_{1v} &= -0,00401 + 4,053471 B/D - 0,23579 (B/D)^2 - 0,3546 (B/D)^3, \\ a_{2v} &= -0,3021 + 0,3434 B/D - 0,96401 (B/D)^2 - 0,0358 (B/D)^3, \\ a_{3v} &= -0,02609 + 0,3017 B/D - 0,89376 (B/D)^2 + 0,24087 (B/D)^3. \end{aligned}$$

Débit relatif :



$$\bar{V} = \frac{\dot{V}}{R^3 \psi \dot{\epsilon}} = a_{1v} + a_{2v} \epsilon + a_{3v} \epsilon^2. \quad (13.22.2)$$

### 13.6.2.3 PRESSION MAXIMALE

La figure 13.33 à droite représente le rapport entre la pression maximale atteinte et la pression moyenne ou entre le chiffre maximal de pression  $\Pi_{\epsilon \max}$  et le nombre de Sommerfeld  $So_{\epsilon}$ . La pression augmente très rapidement seulement dans le domaine  $0,95 \leq \epsilon \leq 1,00$ . Pour  $B/D = 0,5$  par exemple, les rapports valent :

$\epsilon =$	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995	0,999
$p_{\max}/p_{\text{moy}} =$	5,88	6,40	7,14	8,35	10,96	14,68	30,29

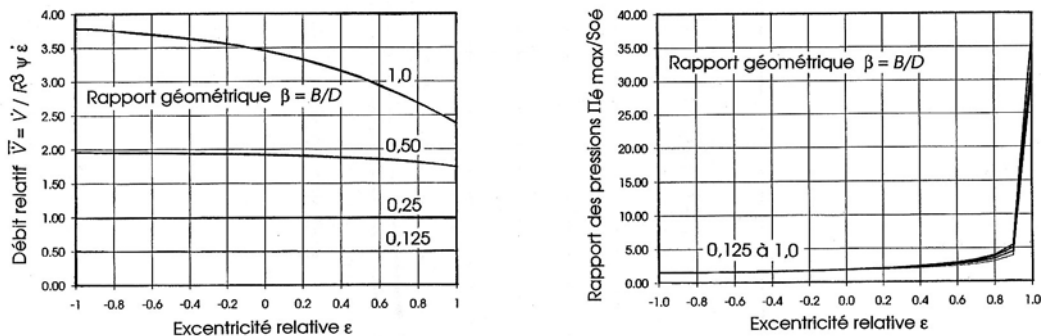


Figure 13.33 Débit relatif en fonction de l'excentricité relative et du rapport  $B/D$   
Rapport de la pression maximale à la pression moyenne :  $p_{\max}/p_{\text{moy}} = \Pi_{\epsilon \max} / So_{\epsilon}$

### 13.6.3 RAIDEUR ET AMORTISSEMENT DANS LE PALIER CYLINDRIQUE

Sous l'effet de charges variables et en rotation, la poussée résultante des forces hydrauliques élémentaires est générée par le déplacement relatif de l'arbre par rapport au coussinet et par l'écrasement du film porteur. Le comportement hydrodynamique d'une ligne d'arbre centrée dans des paliers hydrodynamiques peut devenir instable, cette instabilité dépendant des masses en présence et de l'élasticité des couches de fluide dans les paliers.

#### 13.6.3.1 PALIER CYLINDRIQUE 360° EN CHARGE DYNAMIQUE

Le calcul du palier cylindrique en rotation sollicité par une charge radiale variable doit permettre de trouver la trajectoire du centre de l'arbre par rapport au centre du coussinet, la répartition de la pression et sa valeur maximale, la variation de l'épaisseur du film lubrifiant. La solution de ce problème passe par l'écriture de l'équation différentielle complète de Reynolds, le second membre contenant l'effet de la rotation et de l'écrasement du film. L'équation différentielle contient la vitesse angulaire hydrodynamique, cette vitesse se trouvant par l'expression générale :

$$\bar{\omega} = \omega_a + \omega_c - 2\dot{\delta}. \quad (13.23.1)$$

avec :  $\omega_a$  vitesse angulaire de l'arbre,

$\omega_c$  vitesse angulaire du coussinet,

$\dot{\delta}$  vitesse angulaire du centre de l'arbre créée par son mouvement dans le coussinet.

Le déplacement du centre de l'arbre se décompose en deux composantes, l'une radiale, l'autre tangentielle. Ce déplacement engendre la vitesse angulaire  $d\delta/dt$ . Cette vitesse influence la

formation de la pression et la portance dans le sens inverse de la rotation de l'arbre. L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{D}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{y}} \right) = 6 \frac{\partial}{\partial \varphi} H + 12 \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos \varphi. \quad (13.23.2)$$

Le centre de l'arbre se meut sur une trajectoire à une vitesse généralement ni radiale, ni tangentielle. La composante tangentielle provoque un déplacement angulaire  $d\delta$  pendant le temps élémentaire  $dt$ , la vitesse angulaire correspondante s'exprimant par  $d\delta/dt$ .

### 13.6.3.2 RAIDEUR DU PALIER RADIAL

L'équation différentielle de Reynolds en à charge variable en rotation fait intervenir dans le membre de droite la vitesse angulaire résultante  $\omega$  tenant compte du mouvement de l'arbre. Dans le cas général, cette équation s'écrit sous une forme légèrement différente tenant compte de la position excentrée  $\varepsilon$ ,  $\delta$  et / ou des vitesses correspondantes  $d\varepsilon/dt$ ,  $d\delta/dt$  :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{D}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( H^3 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{y}} \right) = -6 \left[ \varepsilon \sin(\varphi - \delta) - 2 \frac{\varepsilon \dot{\delta}}{\omega} (\sin(\varphi - \delta) - 2 \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos(\varphi - \delta)) \right]. \quad (13.23.3)$$

Le premier terme du membre de droite  $\varepsilon \sin(\varphi - \delta)$  décrit la formation de la pression sous charge stationnaire dans le coin hydrodynamique. La raideur du palier augmente avec l'excentricité. Les deux termes suivants  $-2 (\varepsilon \dot{\delta}/\omega) \sin(\varphi - \delta)$  et  $-2 (\varepsilon/\omega) \cos(\varphi - \delta)$  engendrent des poussées s'opposant au mouvement et sont considérés comme effet amortisseur. Ces forces sont proportionnelles aux vitesses radiale et tangentielle de l'arbre. Les variations de la portance hydrodynamique sont linéarisées pour de petits mouvements du centre de l'arbre autour de sa position d'équilibre statique.

Les propriétés élastiques du palier sont obtenues à partir du champ de portance stationnaire. À chaque position de l'arbre dans le palier correspond une poussée ou une charge extérieure à direction et intensité déterminées. La figure 13.34 montre un champ de portance pour le palier 360°, champ facile à construire car toutes les courbes sont semblables. La trajectoire parcourue par le centre de l'arbre sous l'effet d'une charge verticale progressivement croissante est la courbe dite de Gumbel représentée sur la figure 13.19.

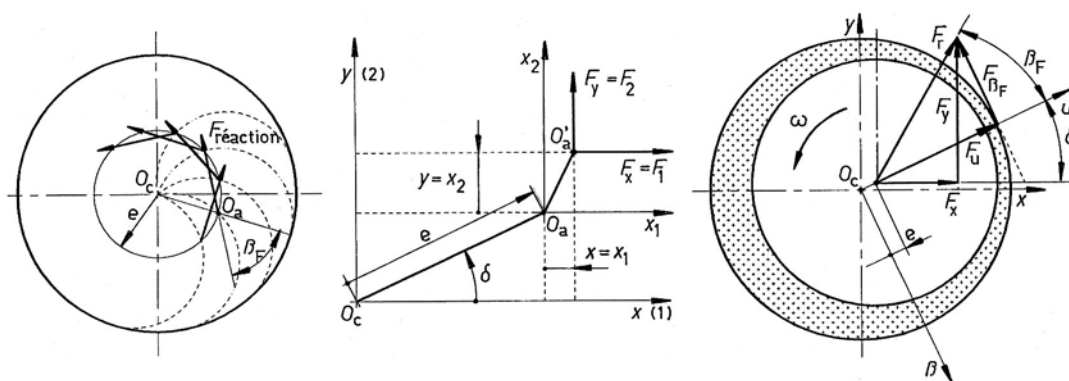


Figure 13.34 Champ de portance dans le palier radial cylindrique 360°  
Systèmes de coordonnées et variation de la portance pour un déplacement élémentaire fini

Les points situés sur une circonférence de même excentricité relative  $\varepsilon$  représentent le lieu géométrique des forces de même module, mais de directions différentes. L'angle  $\beta_F$  entre la position de la fente minimale et la direction de la force reste conservé.

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

En adoptant un système de coordonnées  $O x y$  selon figure 13.34 et en admettant tous les mouvements positifs, les variations finies de portance, à partir de la position d'équilibre stationnaire, s'expriment par les deux composantes :

$$\begin{aligned} F_1 = F_x &= k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = k_{xx} x + k_{xy} y, \\ F_2 = F_y &= k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = k_{yx} x + k_{yy} y. \end{aligned} \quad (13.23.4)$$

avec :  $k_{ij}$  les diverses raideurs du palier (par tradition, les indices  $1 \equiv x$  et  $2 \equiv y$ ).

Les raideurs peuvent se trouver en adoptant quatre nouveaux points d'équilibre stationnaire distants de  $\Delta x$  et  $\Delta y$  du point considéré. Les raideurs se définissent par la méthode des différences finies centrées :

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \frac{F_x(x + \Delta x, y) - F_x(x - \Delta x, y)}{2 \Delta x}, & k_{xy} &= \frac{F_x(x, y + \Delta y) - F_x(x, y - \Delta y)}{2 \Delta y}, \\ k_{yx} &= \frac{F_y(x + \Delta x, y) - F_y(x - \Delta x, y)}{2 \Delta x}, & k_{yy} &= \frac{F_y(x, y + \Delta y) - F_y(x, y - \Delta y)}{2 \Delta y}. \end{aligned}$$

Ces raideurs sont souvent reliées au jeu radial  $\Delta R = (D-d)/2$ , à la force stationnaire  $F_r$  et au nombre de Sommerfeld  $So = F_r \psi^2 / B D \omega \eta_v$  par :

$$k_{ij} = \gamma_{ij} \cdot F_r / \Delta R, \text{ ou } \gamma_{ij} = k_{ij} \Delta R / F_r \quad \{\text{ou selon Glienicke } k_{ij} = \gamma_{ij}^* \cdot F_r / [\Delta R So] \}.$$

Sous l'effet de la raideur seule, les forces composantes s'expriment alors par :

$$F_x = (\gamma_{xx} x + \gamma_{xy} y) F_r / \Delta R, \quad \text{et} \quad F_y = (\gamma_{yx} x + \gamma_{yy} y) F_r / \Delta R.$$

Sous forme matricielle, ces deux expressions s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{F_r}{\Delta R} \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En adoptant un second système de coordonnées  $O\beta u$  repéré par la fente d'épaisseur minimale, les composantes de la force totale dans ce système de coordonnées sont :

$$F_u = F \cos \beta_F \quad \text{et} \quad F_{\beta_F} = -F_u \sin \beta_F,$$

$$\text{ou encore : } F_1 = F_x = F_u \cos \delta - F_{\beta_F} \sin \delta \quad \text{et} \quad F_2 = F_y = F_u \sin \delta + F_{\beta_F} \cos \delta.$$

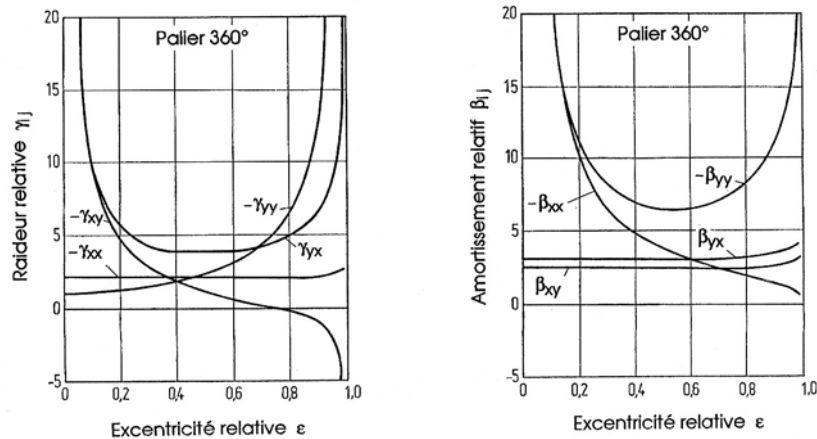


Figure 13.35 Coefficients relatifs de raideur et d'amortissement dans le palier 360°

### 13.6.3.3 AMORTISSEMENT DANS LE PALIER RADIAL

Les coefficients d'amortissement  $b_{ij}$  se définissent d'une façon semblable et les forces d'amortissement sont proportionnelles à la vitesse angulaire provenant des deux derniers termes du membre de droite de l'équation de Reynolds. Les vitesses composantes dans le système de coordonnées  $Oxy$  s'écrivent :

$$v_x = dx/dt = \dot{x}, \quad \text{et} \quad v_y = dy/dt = \dot{y}.$$

Les vitesses de l'arbre sont introduites pour les quatre positions différentes de l'équilibre stationnaire et sont symbolisées par :  $\pm \Delta x = \pm \Delta \dot{x}_1$ ,  $\pm \Delta y = \pm \Delta \dot{x}_2$ . Il est ainsi possible d'écrire les coefficients d'amortissement sous la forme générale :

$$\begin{aligned} b_{11} = b_{xx} &= \frac{F_x(\Delta \dot{x}) - F_x(-\Delta \dot{x})}{2 \Delta \dot{x}}, & b_{12} = b_{xy} &= \frac{F_x(\Delta \dot{y}) - F_x(-\Delta \dot{y})}{2 \Delta \dot{y}}, \\ b_{21} = b_{yx} &= \frac{F_y(\Delta \dot{x}) - F_y(-\Delta \dot{x})}{2 \Delta \dot{x}}, & b_{22} = b_{yy} &= \frac{F_y(\Delta \dot{y}) - F_y(-\Delta \dot{y})}{2 \Delta \dot{y}}. \end{aligned} \quad (13.23.6)$$

Les coefficients relatifs se définissent aussi par :

$$b_{ij} = \beta_{ij} \cdot F_r / \Delta R \omega, \text{ ou } \gamma_{ij} = b_{ij} \omega \Delta R / F_r \quad \{\text{ou selon Glienicke } b_{ij} = \beta_{ij}^* \cdot F_r / (\Delta R \omega So)\}.$$

Finalement, pour de petits déplacements autour du point d'équilibre en régime stationnaire, les composantes rectangulaires s'expriment par :

$$\begin{aligned} F_x &= (\gamma_{xx} x + \gamma_{xy} y) F_r / \Delta R + (\beta_{xx} \dot{x} + \beta_{xy} \dot{y}) F_r / (\omega \Delta R), \\ F_y &= (\gamma_{yx} x + \gamma_{yy} y) F_r / \Delta R + (\beta_{yx} \dot{x} + \beta_{yy} \dot{y}) F_r / (\omega \Delta R). \end{aligned} \quad (13.23.7)$$

*Attention* : Comme le comportement du palier hydrodynamique n'est pas linéaire,  $\gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}$  et  $\beta_{ij} \neq \beta_{ji}$ . Ces divers coefficients sont représentés sur la figure 13.35 en fonction de l'excentricité relative  $\varepsilon$  pour le palier cylindrique 360°.

### 13.6.4 COMPORTEMENT D'UN ARBRE CENTRÉ DANS DES PALIERS

Le comportement vibratoire prévisible d'un arbre centré dans des paliers hydrodynamiques peut se vérifier d'une manière élémentaire en recherchant les vitesses angulaires critiques comme décrit au chapitre 5 en supposant les appuis parfaitement rigides. Les fréquences propres des arbres varient beaucoup avec l'élasticité des paliers et un calcul complet doit tenir compte des élasticités du film et des fondations, de l'amortissement, dans les plans horizontal et vertical ainsi que des effets gyroscopiques, figure 13.36.

#### 13.6.4.1 TURBOROTOR CENTRÉ DANS DEUX PALIERS LISSES

Soit un arbre de machine, par exemple un turborotor symétrique, centré dans deux paliers hydrodynamiques et modélisé sous forme d'une masse concentrée ou disque  $m$  et d'un arbre élastique de raideur  $k_a$ . Le centre de masse est légèrement décalé de la quantité  $r_e$  par rapport à l'axe géométrique du disque. Observons la position occupée par la masse à partir de la position du centre de l'arbre  $O_{a \text{ stat}}$  en régime stationnaire. Soit :

- $O_{a \text{ stat}}$  le centre de l'arbre dans le palier sous charge stationnaire,
- $O_{a \text{ dyn}}$  le centre de l'arbre dans le palier sous l'effet des efforts dynamiques,
- $O_{\text{axe}}$  le point définissant l'axe instantané du disque,
- $O_m$  le centre de masse,
- $r_d$  le rayon positionnant le centre de l'arbre dynamique,

### 13. Butées et paliers hydrodynamiques

- $r_f$  la déformation transversale en flexion de l'arbre,  
 $r$  le rayon définissant le centre du disque,  
 $r_m$  le rayon définissant la position du centre de masse.

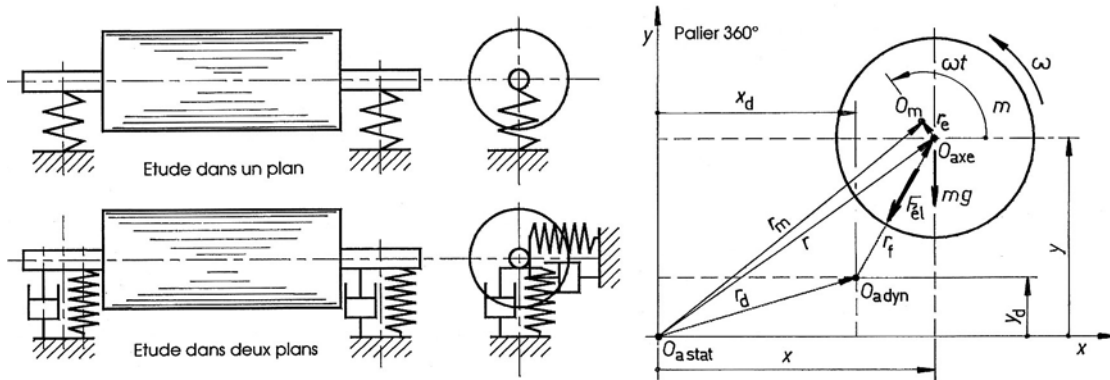


Figure 13.36 Rotors sur appuis élastiques Position d'un disque dans un palier hydrodynamique

Les divers rayons représentés sur la figure 13.36 donnent les sommes vectorielles :

$$\vec{r}_m = \vec{r}_d + \vec{r}_f + \vec{r}_e = \vec{r} + \vec{r}_e \quad \text{avec : } \vec{r}_e = r_e \mathbf{e}_j \omega t.$$

Le système de coordonnées  $O x y$  passe par le centre stationnaire de l'arbre. Les diverses forces appliquées sur le disque sont :

- la force d'inertie trouvée par l'application du principe de d'Alembert :

$$\vec{F}_A = -m \vec{a} = -m \frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2} = -m \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} \right), \text{ avec : } \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = -\omega^2 r_e \mathbf{e}_j \omega t,$$

$$\underline{F}_A = -m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + j \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + m \omega^2 r_e \cos \omega t + j m \omega^2 r_e \sin \omega t,$$

composantes :  $F_{Ax} = -m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \omega^2 r_e \cos \omega t,$

$$F_{Ay} = -m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \omega^2 r_e \sin \omega t.$$

- la force élastique provoquée par la déformation en flexion de l'arbre :

$$\vec{F}_{el} = k_a \vec{r}_f = k_a (\vec{x} - \vec{x}_d) + k_a (\vec{y} - \vec{y}_d).$$

- le poids du disque :  $\vec{G} = m \vec{g}$ .

L'équilibre de translation du disque sous l'effet des forces appliquées s'écrit :

$$\Sigma F_X = 0 : -m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \omega^2 r_e \cos \omega t - k_a (x - x_d) = 0,$$

$$\Sigma F_Y = 0 : -m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \omega^2 r_e \sin \omega t - k_a (y - y_d) - m g = 0.$$

Ou encore :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k_a (x - x_d) = m \omega^2 r_e \cos \omega t,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k_a (y - y_d) = m \omega^2 r_e \sin \omega t - m g. \quad (13.24.1)$$

Pour un arbre parfaitement équilibré avec  $r_e = 0$ , en absence de la pesanteur terrestre  $g = 0$ , la relation se simplifie en un système de deux équations différentielles homogènes du second ordre :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k_a (x - x_d) = 0,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k_a (y - y_d) = 0. \quad (13.24.2)$$

Ce système de deux équations différentielles du second ordre fait apparaître une vitesse angulaire critique de flexion :

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{k_a}{m}}. \quad (13.24.3)$$

C'est la vitesse critique de flexion d'un arbre sur deux appuis rigides.

#### 13.6.4.2 STABILITÉ D'UN ARBRE DANS DEUX PALIERS LISSES

Pour un arbre symétrique centré dans deux paliers, les réactions d'appui dynamiques valent la moitié de la charge  $F_{\text{él}}$ . Ces forces valent :

$$\begin{aligned} F_{B1x \text{ dyn}} = F_{B2x \text{ dyn}} &= 0,5 F_{\text{él}x} = 0,5 k_a (x - x_d), \\ F_{B1y \text{ dyn}} = F_{B2y \text{ dyn}} &= 0,5 F_{\text{él}y} = 0,5 k_a (y - y_d). \end{aligned}$$

Remplaçons ces forces dans l'expression du comportement du palier hydrodynamique :

$$\begin{aligned} 0,5 k_a (x - x_d) &= k_{xx} x_d + k_{xy} y_d + b_{xx} \frac{dx_d}{dt} + b_{xy} \frac{dy_d}{dt}, \\ 0,5 k_a (y - y_d) &= k_{yx} x_d + k_{yy} y_d + b_{yx} \frac{dx_d}{dt} + b_{yy} \frac{dy_d}{dt}. \end{aligned} \quad (13.24.4)$$

Les équations différentielles (13.24.2) et (13.24.4) forment un système d'équations différentielles linéaires contenant 4 inconnues :  $x$ ,  $x_d$ ,  $y$  et  $y_d$ . Pour éliminer la déformation dynamique, il faudrait intégrer le dernier système. Afin de trouver simplement le comportement de l'arbre, choisissons la solution générale :

$$x = A e^{pt} \quad y = B e^{pt} \quad x_d = C e^{pt} \quad y_d = D e^{pt} \quad \text{avec } p = a + b j.$$

Remplaçons ces solutions dans les quatre équations différentielles et après mise en évidence de  $e^{pt}$ , puis simplification :

$$\begin{pmatrix} k_a + mp^2 & 0 & -k_a & 0 \\ 0 & k_a + mp^2 & 0 & -k_a \\ -0,5k_a & 0 & 0,5k_a + k_{xx} + b_{xx}p & k_{xy} + b_{xy}p \\ 0 & -0,5k_a & k_{yx} + b_{yx}p & 0,5k_a + k_{yy} + b_{yy}p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.24.5)$$

Pour satisfaire ce système homogène, il faut que le déterminant de la matrice carrée soit nul et il faut calculer le polynôme du sixième degré correspondant, les coefficients  $c_i$  étant réels :

$$c_6 p^6 + c_5 p^5 + c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0 = 0. \quad (13.24.6)$$

La discussion du comportement de l'arbre peut employer l'une des deux méthodes suivantes :

1. Recherche des zéros en  $p$  du polynôme et observation de la valeur des deux coefficients  $a$  et  $b$ , les points correspondants devant se trouver dans le demi plan réel négatif si la stabilité doit être assurée.
2. Utiliser des critères de stabilité : ces critères donnant des notions partielles sur la stabilité comme par exemple les cartes de stabilité. Les cartes de stabilité sont à interpréter avec beaucoup de prudence car elles divergent fortement d'un auteur à l'autre.

Habituellement, les cartes de stabilité sont construites en valeur relatives :

- rapport des vitesses angulaires :  $\omega_{\text{lim}}/\omega_{cr}$ ,
- Nombre de Sommerfeld "critique" :  $So_{cr} = F_{\text{stat}}/(BD) \cdot \psi_{\text{min}}^2/(\eta_v \omega_{cr})$ ,
- rapport des déplacements :  $\mu = f/\Delta R_{\text{min}}$   $f$  flexion statique de l'arbre.

Les courbes limites dépendent des raideurs et de l'amortissement donc de la vitesse critique de flexion et des coefficients  $\gamma_{ij}$  et  $\beta_{ij}$ . La figure 13.37 montre deux représentations de cartes de stabilité, le domaine stable se situant en dessous de la droite passant par l'origine. Lors du démarrage, le point représentatif se déplace verticalement vers haut à charge radiale constante.

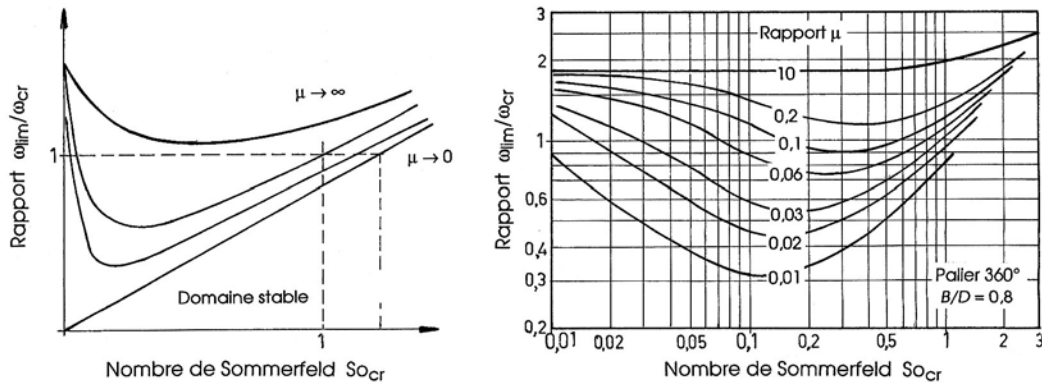


Figure 13.37 Principe de la carte de stabilité. Carte de stabilité du palier cylindrique 360° selon Glienicke

Pour les paliers de turbomachines et à la fréquence de rotation nominale, les amplitudes de vibration calculées de l'arbre, selon ABB, ne devraient pas dépasser  $180/(n[t/s])^{0,5}$  exprimées en  $\mu\text{m}$ . Il est possible d'influencer la vitesse critique en raccourcissant la distance entre paliers et la vitesse limite en choisissant des paliers à 2, 3 ou 4 lobes. Les vibrations auto-excitées par le film dans le palier provoquant l'instabilité sont heureusement relativement rares en pratique et une modification des composants, rotor et paliers, permet d'éviter ce phénomène.

### 13.6.5 PALIERS EN CHARGE FORTEMENT VARIABLE

La paliers lisses de chaînons des systèmes articulés, comme par exemple les paliers des bielles de moteurs à combustion interne, sont également sollicités par des forces fortement variables en intensité et direction. Ce sous chapitre expose brièvement les nombreux problèmes rencontrés dans ces mécanismes et les diverses méthodes utilisées pour les résoudre.

#### 13.6.5.1 PRINCIPE DE LA SOLUTION ET CHARGE

La solution directe part de l'équation différentielle générale de Reynolds et de la description du champ de température dans le palier afin de rechercher les caractéristiques du fluide porteur en chaque point de la surface. Elle doit permettre de trouver la trajectoire du centre de l'arbre en fonction du temps, la répartition des pressions dans le coussinet, le débit de fluide et les pertes. Le problème réel se base sur la charge appliquée sur le palier et cette charge doit rester à tout instant en équilibre avec la poussée intérieure résultante engendrée par la pression du fluide créée par le déplacement de l'arbre par rapport au coussinet, déplacement résultant de la vitesse angulaire hydrodynamique  $\omega$ . La charge peut avoir en principe une variation quelconque en fonction du temps ou posséder une allure périodique comme c'est le cas dans les moteurs.

##### 1. Méthode des mouvements successifs (Mobility Method)

La méthode de résolution la plus simple consiste à rechercher le comportement du palier pour une combinaison de modifications de mouvements successifs caractérisés par une position initiale  $\varepsilon$  dans le coussinet et par une direction et sens de la charge, les équations étant linéarisées. C'est une amélioration des premières solutions dans lesquelles la trajectoire du centre de l'arbre était supposée connue, simple et stable.

## 2. Méthode par superposition des pressions

La méthode par superposition des pressions additionne les pressions produites par la rotation et l'écrasement en pas successifs. Ces deux composantes sont sommées tant que la pression résultante reste positive. La recherche du champ caractéristique du palier exige des moyens de calcul très étendus. Le rapport des vitesses d'écrasement et de rotation se représente par un paramètre :

$$q = d\epsilon/dt / (0,5 - d\delta/dt).$$

La caractéristique  $q = 0$  est valable pour la rotation pure et  $q$  tend vers l'infini avec l'augmentation de l'écrasement. La solution d'un problème réel s'effectue à partir du champ caractéristique du palier et des conditions momentanées :

Force et vitesses :  $F_i, \gamma_i, \underline{\omega}_i^* = \omega_a + \omega_c, \epsilon_i, \delta_i,$

Nombre de Sommerfeld :  $So = F_i \psi^2 / (B D \eta_v \omega_i^*).$

Ces grandeurs, alliées à l'excentricité relative  $\epsilon$  et à la différence des angles  $(\delta - \gamma)$ , permettent de trouver le paramètre  $q$  ainsi que le nombre de Sommerfeld relatif  $So'$ . Finalement, le mouvement se trouve par recherche des deux vitesses angulaires  $d\delta/dt$  et  $d\epsilon/dt$ . Si la charge appliquée est périodique, la trajectoire définitive du centre de l'arbre par rapport au coussinet est calculée par voie itérative jusqu'à ce que les trajectoires de deux périodes successives se recouvrent suffisamment avec précision.

## 3. Méthode par superposition des poussées

Dans la méthode par superposition des poussées (ou des pressions composantes), la poussée résultante se trouve en tenant compte des deux composantes :

- composante de rotation  $F_{\text{rotation}}$

- composante d'écrasement  $F_{\text{écrasement}}$

L'introduction de limites d'intégration fixes facilite cette recherche. La somme vectorielle des composantes doit être opposée à la charge extérieure. Les deux valeurs se laissent calculer sous la forme de deux nombres de Sommerfeld  $So_{\text{rot}}$  et  $So_{\text{écri}}$  et les lignes d'action des deux forces sont connues par les angles  $\beta_F$  correspondants.

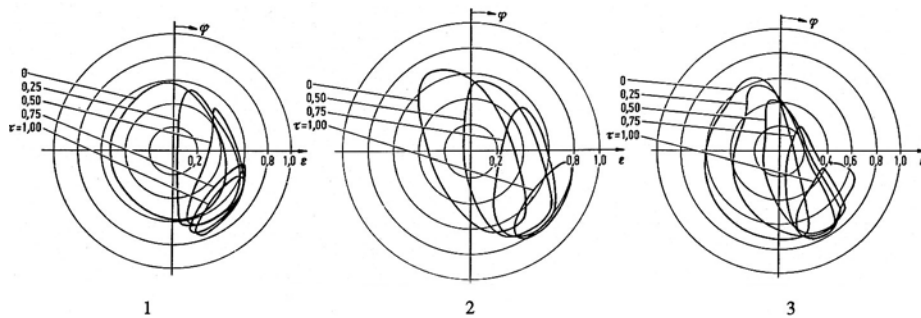


Figure 13.39 Comparaison entre les résultats de mesures et de calcul pour une charge harmonique :  
1. Mesure selon Carl, 2. Calcul selon Hahn 3. Calcul selon Holland

Les mesures de Carl datent de 1962 pour  $B/D = 0,5$ , le calcul selon Hahn utilise la méthode de superposition des pressions, le calcul selon Holland, la méthode de superposition des poussées. Chaque méthode de calcul donne un autre ensemble de trajectoires distinctes. La comparaison entre la mesure et le calcul s'effectue sur une charge harmonique superposée à une charge constante, rapport  $\tau$ .



## CHAPITRE 14

# BUTÉES ET PALIERS À ROULEMENTS

Les butées et les paliers à roulements sont des éléments de machines de catalogue fabriqués en très grande série qui servent à supporter des axes, des arbres et des pièces de machines en mouvement de rotation ou de translation. Les avantages de ces composants à roulement, par rapport aux éléments lisses, sont :

- remplacer le frottement de glissement par le frottement de roulement,
- normalisation internationale des dimensions courantes,
- gamme très étendue de modèles et de dimensions,
- coût très avantageux.

Ces mécanismes de haute précision exigent un choix judicieux du type, de la grandeur, un montage correct dans le guidage, un entretien soigné et une lubrification adaptée au but poursuivi. Les fabricants de ces éléments fournissent des renseignements détaillés sur les diverses propriétés de leurs produits et des recommandations pratiques dans les catalogues ou les publications spécialisées.

L'utilisateur d'éléments à roulements désire en général connaître les dimensions géométriques avec les tolérances de fabrication et de montage, la capacité de charge en service, les domaines d'utilisation, le prix de revient plutôt que les détails constructifs internes des roulements. Pendant l'étude d'une butée, d'un palier ou d'un guidage à roulements, il faut se préoccuper constamment :

1. de la nature de la charge et de la répartition de cet effort sur le roulement et ses composants;
2. des possibilités de montage, de dilatations mécanique et thermique, des déformations des arbres, des logements, des supports et des guidages;
3. des erreurs de fabrication en particulier des erreurs de forme et des états de surface des pièces adjacentes;
4. de l'état de surface des parties venant directement en contact avec les surfaces portantes du roulement afin d'obtenir facilement des conditions acceptables de montage dans les classes de tolérances 5, 6 ou 7 ;
5. des facilités et possibilités de montage et démontage du roulement;
6. de la lubrification et de son renouvellement, de la présence de souillures interne ou externe;
7. du milieu ambiant facilitant le refroidissement des pièces en mouvement, de l'étanchéité vis à vis de l'extérieur ou de l'intérieur, des protections contre l'action des poussières ou d'agents corrosifs.

Malgré la durée de vie limitée et un niveau sonore plus élevé que celui des paliers et guidages lisses, les éléments à roulements de petites ou moyennes dimensions se sont imposés dans toute la technique grâce aux possibilités d'approvisionnement, aux facilités de montage et de démontage, aux frottements très réduits pendant le démarrage et à faible vitesse, aux simplifications dans le mode de lubrification, à l'interchangeabilité des pièces, etc.

Les éléments à roulements peuvent se classer dans trois groupes :

1. Paliers et butées à roulements pour charge axiale, charge radiale ou charge combinée, l'arbre, le logement ou les deux étant en rotation;
2. Guidages à roulement pour charges transversales et mouvement rectiligne;
3. Vis et écrous à éléments roulants pour mouvement axial, de rotation ou hélicoïdal.

# Organes de transmission directe

Tous ces éléments présentent des propriétés semblables, en particulier des pressions superficielles élevées entre les pièces roulantes et leurs surfaces de roulement, des déformations relativement faibles mais non négligeables, une transmission des efforts à travers des parties métalliques sans amortissement des à-coups, des méthodes semblables de contrôle.

CLASSE	PARTIE PRINCIPALE				DOMAINE D'UTILISATION								APPENDICE
Principe de base	Effort supporté	Numéro	Géométrie des pièces	Exemples de butées, paliers et guidages à roulements	Diamètre de l'arbre	Série ou type	Capacité dynamique C en kN	Fréquence limite en tours/s	Domaine des températures	Rotulage admissible	Coefficient $f_0$	Qualités et / ou Défauts	
PALIERS ET BUTÉES À ROULEMENTS À BILLES	Radial	1	Sphérique et torique		(2,5) 10 à 200 (5) 10 à 120	161 618 619 60 62 63 64	62 : $\varnothing 10 \Rightarrow 5,1$ $\varnothing 50 \Rightarrow 35,1$ $\varnothing 100 \Rightarrow 124$	62 : $\varnothing 10 \Rightarrow 400$ $\varnothing 50 \Rightarrow 117$ $\varnothing 100 \Rightarrow 57$	Avec joints : -30°C à 110°C	Roult rigide : max : 2 minutes	60,64 : 0,0015 618,619 : 0,001	Roulement universel Bon marché Bruyant	
	Axial	2	Sphérique et torique		10 à 160 (670) 10 à 150	511 512 513 522 523 524	512 : $\varnothing 10 \Rightarrow 12,7$ $\varnothing 50 \Rightarrow 49,4$ $\varnothing 100 \Rightarrow 124$	512 : $\varnothing 10 \Rightarrow 100$ $\varnothing 50 \Rightarrow 40$ $\varnothing 100 \Rightarrow 30$	Jusqu'à 125°C Plus de 300°C Ac. spéciaux	Si possible pas de défaut	0,0013 pour tous les types	Butée universelle Bon marché Bruyant	
	Combiné	3	Sphérique et torique		10 à 200 (1000) 10 à 190 (240)	60 62 63 64 72 73 32 33	72 : $\varnothing 10 \Rightarrow 7,0$ $\varnothing 50 \Rightarrow 39,0$ $\varnothing 100 \Rightarrow 135$	72 : $\varnothing 10 \Rightarrow 317$ $\varnothing 50 \Rightarrow 100$ $\varnothing 100 \Rightarrow 50$	Jusqu'à 125°C Plus de 300°C Ac. spéciaux	Contact oblique : aucun	72,73 : 0,0020 32,33 : 0,0024	Contact oblique charge Plus silencieux	
PALIERS ET BUTÉES À ROULEMENTS À ROULEAUX	Radial	4	Cylindrique plein, creux		15 à 200 (380) 30 à 200 (320)	2 22 3 23 NN3 NNU3	NU2 : $\varnothing 15 \Rightarrow 12,5$ $\varnothing 50 \Rightarrow 30,8$ $\varnothing 100 \Rightarrow 85,8$	NU2 : $\varnothing 15 \Rightarrow 300$ $\varnothing 50 \Rightarrow 142$ $\varnothing 100 \Rightarrow 72$	Jusqu'à 125°C Plus de 300°C Ac. spéciaux	10,2,3,4 : 4 min 22,23 : 3 min	0,0011 pour tous les types	Capacité très importante Faibles pertes Charge radiale	
	Axial	5	Cylindrique Plan		15 à 240 (630) 60 à 360 (900)	811 812 293 294	811 : $\varnothing 15 \Rightarrow 11,2$ $\varnothing 50 \Rightarrow 47,5$ $\varnothing 100 \Rightarrow 146$	811 : $\varnothing 15 \Rightarrow 53$ $\varnothing 50 \Rightarrow 27$ $\varnothing 100 \Rightarrow 14$	Jusqu'à 125°C Plus de 300°C Ac. spéciaux	Si possible pas de défaut	0,0050 pour tous les types	Capacité très importante Faibles pertes Charge axiale	
	Combiné	6	Cylindrique plein, creux		15 à 200 (380) 20 à 320 (900)	2 22 3 23 202 203 213 222	222 : $\varnothing 20 \Rightarrow 30,5$ $\varnothing 50 \Rightarrow 84,5$ $\varnothing 100 \Rightarrow 311$	222 : $\varnothing 20 \Rightarrow 133$ $\varnothing 50 \Rightarrow 83$ $\varnothing 100 \Rightarrow 33$	Jusqu'à 125°C Plus de 300°C Ac. spéciaux	à rouler : 1" à 2,5" selon le type	0,0018 pour roult. à rouler	Contact sur faces planes Grandes dimensions	
PALIERS À AIGUILLES	Radial ou axial	7	Cylindrique plein, creux		5 à 115 (415) 30 à 110	NK RNA 48 RNA 69 NA 69	NA49 : $\varnothing 10 \Rightarrow 8,8$ $\varnothing 50 \Rightarrow 47,3$ $\varnothing 100 \Rightarrow 125$	NA49 : $\varnothing 10 \Rightarrow 283$ $\varnothing 50 \Rightarrow 83$ $\varnothing 100 \Rightarrow 40$	Jusqu'à 125°C Plus de 300°C Ac. spéciaux	Si possible pas de défaut	radial : 0,0025 axial : 0,0050	Peu de place Démontable Cartouches Pertes élevées	
GUIDAGES LINÉAIRES	Transversal	8	Cylindrique plein, creux		6 8 10 12 14 16 20 25 30 40 50	KH KGH K8 RAKB KGBS	C dépend du type d'élément roulant $v \leq 2$ m/s $v \leq 5$ m/s	Jusqu'à 100°C Si joints, température 80°C	Aucun dans le sens axial	0,0010 à 0,0025 0,0030 à 0,0050	Contact billes sur cylindre Faible rigidité Protection !		
	Transversal	9	Cylindrique Sphérique		Schneeberger 25 35 45 55	MIRA MRB MIRC MRD	C dépend du type d'élément roulant $v \leq 3$ m/s $a \leq 50$ m/s	Jusqu'à 100°C Si joints, température 80°C	Aucun dans le sens du rail	0,0005 à 0,0030 selon le type	Contact billes ou meilleur cylindres sur rail profilé		
VIS-ÉCROU	Force/Couple	10	Sphérique Hélicoïdal		RTH Transrol SF/PF SK/PHK P = 1 à 20	C dépend du type d'élément roulant Dépend du modèle et de la géométrie	Jusqu'à 100°C Si joints, température 80°C	Dépend du jeu radial	0,0016 à 0,0060 selon le type	Faible pertes Réversible Règlage du jeu axial			

Figure 14.1 Catalogue des éléments à roulements

\* Roulements lubrifiés à la graisse

## 14.1 DESCRIPTION DES PALIERS À ROULEMENTS

Les paliers et butées à roulements à billes, à rouleaux et à aiguilles sont constitués principalement par :

1. une bague intérieure et une bague extérieure, inférieure et supérieure dans les butées, glissées sur l'arbre et dans le logement. Ces deux pièces servent de chemin de roulement;
2. les éléments de roulement : billes, rouleaux cylindriques, coniques ou en tonnelet, aiguilles qui sont des rouleaux cylindriques de petit diamètre dont la longueur est un multiple du diamètre;
3. une cage intermédiaire en tôle d'acier, massive ou en matière synthétique armée pour maintenir les pièces roulantes à un écartement convenable.

Les bagues et les éléments de roulement sont fabriqués en acier fin au chrome traité thermiquement afin d'atteindre une dureté superficielle d'environ HRC = 58 à 62. La forme des éléments roulants permet aussi de distinguer deux catégories de contact :

1. Eléments dits à contact ponctuel : roulements, butées et guidages à billes;
2. Eléments dits à contact linéique : roulements, butées et guidages à rouleaux cylindriques et à aiguilles, à rouleaux coniques et en tonnelet.

La construction interne du roulement, en particulier la disposition des éléments roulants et des surfaces de contact limite la direction et l'intensité de la charge extérieure. Il existe : des roulements pour charge radiale seule, pour charge axiale seule et pour charge combinée axiale et radiale.

ISO (Organisation internationale de Normalisation) a établi un ensemble de normes concernant les cotes d'encombrement sous forme d'un plan général de dimensions. Ce plan contient plusieurs séries de diamètres qui correspondent à un même alésage, séries 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3 et 4 dans l'ordre croissant. Dans chaque série de diamètres, il existe plusieurs séries de largeurs, séries 8, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 dans l'ordre croissant et pour les butées plusieurs séries de hauteurs, séries 7, 9, 1 et 2. L'association d'une série de diamètres et d'une série de largeurs ou de hauteurs constitue une série de dimensions désignée par deux nombres : le groupe de droite correspond à la série de diamètres, celui de gauche à la série de largeur ou de hauteur.

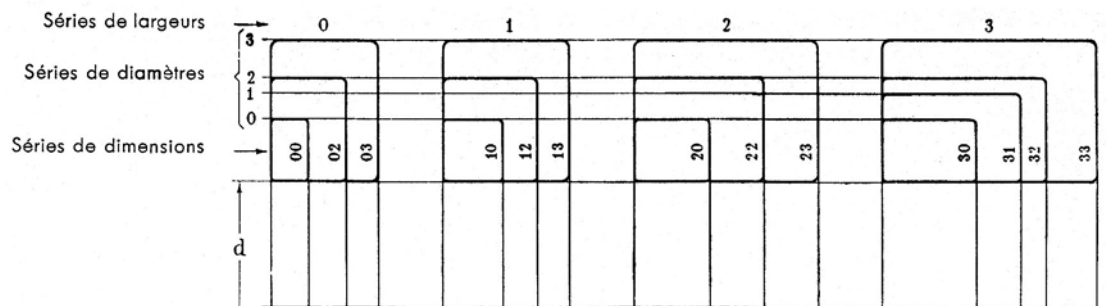


Figure 14.2 Série de diamètres et série de largeurs selon ISO

### 14.1.1 ROULEMENTS À BILLES

#### 14.1.1.1 ROULEMENTS RIGIDES À UNE RANGÉE DE BILLES

Ce sont les roulements les plus utilisés en conception de machines et d'appareillages. Grâce à la profondeur des gorges dans les bagues intérieure et extérieure, à la dimension des billes et à l'absence d'une gorge de remplissage, ces roulements supportent principalement des

charges radiales ou des charges combinées. Ces roulements sont indémontables et admettent des vitesses élevées en nécessitant un entretien réduit en service. La capacité de charge axiale dépend partiellement du jeu interne du roulement. La tendance des fabricants d'augmenter le diamètre des billes affaiblit l'épaisseur et la résistance des bagues. La cylindricité de l'arbre et du logement influence directement la portance et la durée de vie du roulement.

Certains roulements rigides à billes sont équipés de joints ou de flasques sur l'un des côtés ou sur les deux. Les flasques, suffixe Z ou 2Z, forment une chicane avec un faible passage sur la bague intérieure. Les joints, suffixe RS ou 2RS, sont équipés de lèvres frottant ou ne frottant pas sur la bague intérieure suivant les exécutions. Ils sont en caoutchouc synthétique et fonctionnent pour des températures comprises entre  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $+120^{\circ}\text{C}$ . Ces roulements sont garnis de graisse en usine et sont dits lubrifiés à vie. Plusieurs exécutions spéciales sont à disposition selon les fabricants : roulements à encoches de remplissage avec un plus grand nombre de billes, roulements miniatures et pour instruments, roulements pour applications "silencieuses", roulements rigides à billes appariés pour monter deux roulements côte à côte, roulements en acier inoxydable, etc.

Les roulements à rainure sur la bague extérieure sont conçus pour recevoir un segment d'arrêt ou un anneau élastique fixant la position axiale du palier dans le logement.

Séries des roulements à billes à une rangée :

Série étroite : 160 161 618 619

Série normale : 60 62 63 64

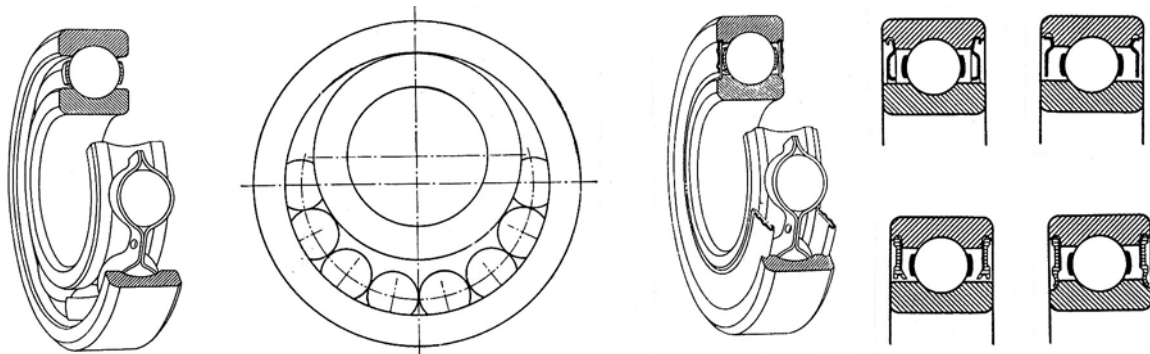


Figure 14.3 Roulements à billes à une rangée, méthode de montage des billes, Roulement à deux joints, flasques et joints dans les roulements

#### 14.1.1.2 ROULEMENTS RIGIDES À DEUX RANGÉES DE BILLES

Ces roulements conviennent pour supporter des charges radiales importantes et des charges axiales dans les deux sens s'ils ne possèdent pas d'encoches de remplissage. Ils ont une conception analogue à celle des roulements à une rangée de billes.

Séries des roulements à deux rangées de billes : 42 43

#### 14.1.1.3 ROULEMENTS À ROTULE SUR BILLES

Ces roulements sont équipés d'une bague intérieure à deux chemins de roulement et d'une bague extérieure avec un seul chemin de roulement sphérique. L'ensemble bague intérieure, cage avec les billes peut basculer librement dans la bague extérieure et compenser de ce fait les défauts d'alignement ou les déformations en flexion des arbres. Le déversement admissible en marche est compris entre  $1,5^{\circ}$  et  $3^{\circ}$ . Dans les applications fortement sollicitées, il convient d'employer des roulements à rotules sur rouleaux. La charge axiale doit toujours rester faible. Plusieurs exécutions spéciales sont à disposition : roulements avec joints des deux côtés,

roulements avec bague intérieure large, roulements à alésage conique et manchon de serrage, etc.

Séries des roulements à rotule sur billes : 12 22 23 112 113

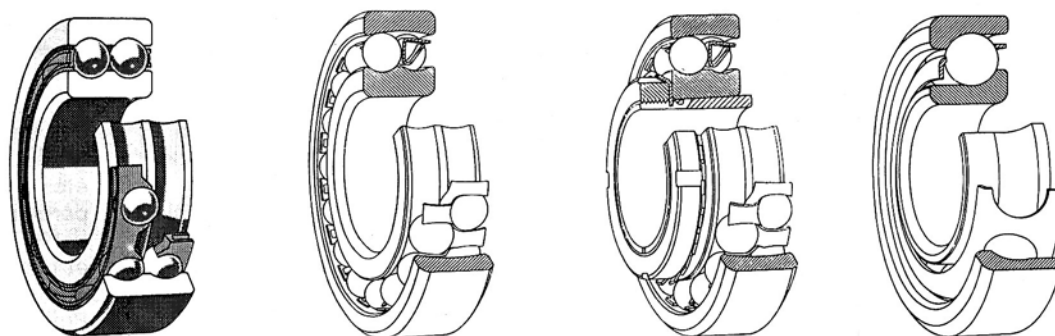


Figure 14.4 Roulements à deux rangées de billes  
Roulement à rotule sur deux rangées de billes, avec manchon de serrage  
Roulement à billes à contact oblique à une rangée de billes

#### 14.1.1.4 ROULEMENTS À BILLES À CONTACT OBLIQUE

Ces roulements conviennent bien pour supporter des charges combinées car les chemins de la bague intérieure et de la bague extérieure sont décalés axialement l'un par rapport à l'autre. Ces roulements ne sont pas démontables ou ne doivent pas être démontés. La capacité de charge axiale dépend de l'angle de contact  $\alpha$ . Sous l'effet d'une charge radiale, les roulements à une rangée de billes engendrent des efforts axiaux qu'il convient de compenser par un second roulement. Les roulements à contact obliques se subdivisent en :

- roulement à billes à contact oblique à une rangée de billes,
- roulement à billes à contact oblique à deux rangées de billes,
- roulement à quatre points de contact.

Les roulements spéciaux sont : roulements de précision pour machines-outils dits roulement de broche, roulements de roue intégrés, dits Hub Units, produits pour l'industrie automobile, roulements de grandes dimensions.

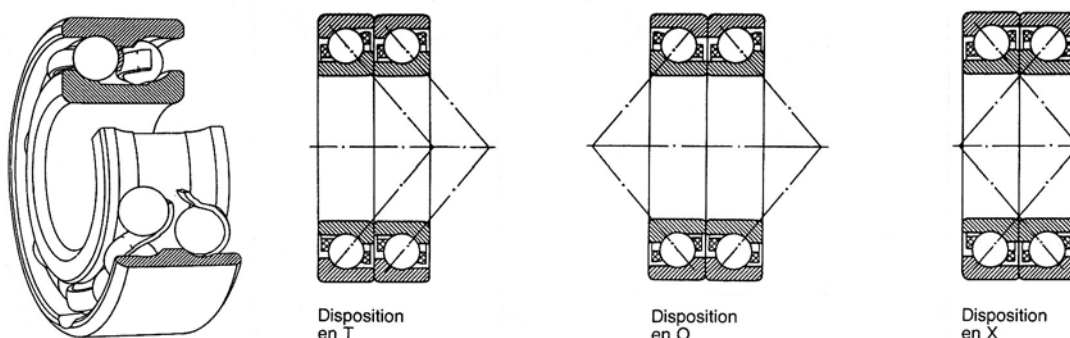


Figure 14.5 Roulement à billes à contact oblique à deux rangées de billes  
Genres d'appariement des roulements à une rangée de billes

Les roulements à billes à contact oblique à une rangée de billes supportent les charges axiales dans un seul sens. L'angle de contact vaut  $\alpha = 40^\circ$  et la conception de base prévoit un seul roulement comme support de la charge radiale. Les roulements appariés sont fabriqués spécialement de telle sorte qu'on obtient une répartition uniforme de la charge sur les deux

pièces. Le montage par paire est utilisé lorsqu'un seul roulement ne suffit pas, disposition en T, ou lorsque la charge axiale peut agir dans les deux sens, disposition en O ou en X.

Le roulement à deux rangées de billes à contact oblique, disposées en O, supporte des charges axiales et des couples de déversement. Ils peuvent être livrés avec divers angles de contact selon les fournisseurs. Ces roulements ne sont pas séparables. Par exemple, SKF produit des roulements avec un angle  $\alpha = 32^\circ$  et des cages en polyamide 6.6 renforcé de fibres de verre, diamètre jusqu'à 90 mm et pour les diamètres supérieurs, la cage est en tôle emboutie ou massive, la bague étant munie d'encoches de remplissage d'un côté.

Les roulements à quatre points de contact possèdent une rangée de billes à contact oblique, une bague extérieure et une bague intérieure en deux pièces supportant les efforts axiaux dans les deux sens. Cette conception permet d'introduire un grand nombre de billes dans le roulement, donc d'augmenter sa capacité de charge dans un volume réduit.

Séries des roulements à billes à contact oblique :

à une rangée de billes :	72	73	(de broches	700	719	720)
à deux rangées de billes :	32	33				
à quatre points de contact :	QJ2	QJ3				

#### 14.1.1.5 BUTÉES À BILLES À SIMPLE EFFET

Ces butées sont destinées à supporter des charges purement axiales dans un seul sens à l'exclusion de toute charge radiale. Les butées à simple effet se composent d'une rondelle à fixer sur l'arbre avec une gorge formant le chemin de roulement et d'une rondelle à fixer dans le logement munie aussi d'une gorge servant de chemin de roulement. Ces roulements sont séparables, en trois pièces, ce qui facilite leur montage. Afin d'éviter le glissement entre les billes et les chemins de roulement engendré par la force centrifuge, les butées doivent être chargée par une force axiale minimale dépendant de la fréquence de rotation. La rondelle logement peut présenter une surface d'appui plane ou sphérique, cette dernière solution permettant de compenser les erreurs d'alignement initial.

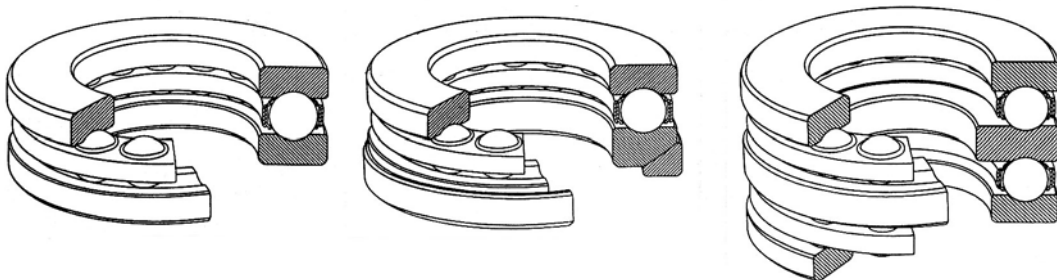


Figure 14.6 Butées à billes à simple effet à rondelle plane, à rondelle sphérique.  
Butée à billes à double effet

Séries de butées à billes à simple effet :

à rondelles planes :	511	512	513	514
à rondelles sphériques :	532	533	534	

#### 14.1.1.6 BUTÉES À BILLES À DOUBLE EFFET

Les butées à billes à double effet supportent des charges axiales dans les deux sens à l'exclusion de toute charge radiale. Elles se composent d'une rondelle arbre avec gorge formant chemin de roulement sur les deux faces, deux ensembles cage et billes, deux rondelles à monter dans les logements équipées d'une gorge servant de chemin de roulement.

Les rondelles logement peuvent avoir une surface d'appui plane ou sphérique, cette dernière solution admettant de légères erreurs d'alignement initial. Ces butées sont séparables en cinq parties.

Séries de butées à billes à double effet :

à rondelle planes :	522	523	524
à rondelles sphériques :	542	543	544

### 14.1.1.7 ROULEMENTS Y ET ROULEMENTS DIVERS

Les roulements Y sont des roulements à billes protégés des deux côtés, garnis de graisse, avec bague extérieure sphérique permettant de compenser les erreurs d'alignement. Ils trouvent leur application dans les machines agricoles, les machines de chantier, les machines textiles et les machines de conditionnement. La plupart des roulements Y sont fixés sur l'arbre par des méthodes spéciales autorisant leur montage sur des arbres étirés.

Les fabricants de roulement offrent également des galets de cames à une rangée ou à deux rangées de billes. Ces éléments sont équipés d'une bague extérieure épaisse légèrement bombée permettant de transmettre des forces radiales importantes sans logement supplémentaire. La conception correspond aux séries 62 et 32 des roulements à billes usuels. Une série de supports de paliers avec roulements est aussi à disposition des utilisateurs. Ces paliers complets représentent des ensembles économiques, interchangeables et nécessitant un entretien réduit. Ils sont fabriqués en fonte grise de la classe GG 20 ou en fonte à graphite sphéroïdal.

### 14.1.2 ROULEMENTS À ROULEAUX

#### 14.1.2.1 ROULEMENTS À ROULEAUX CYLINDRIQUES

Les roulements à une rangée de rouleaux cylindriques supportent, à encombrement égal, des charges radiales nettement supérieures à celles des roulements à billes, le contact entre les rouleaux et les chemins de roulement étant linéique. Pour compenser les déformations, éviter des pressions locales très élevées aux extrémités des galets et tenir compte de très légères erreurs d'alignement, les galets ne sont pas cylindriques mais à profil logarithmique. Cette forme géométrique modifiée assure une répartition optimale des pressions et des contraintes dans le roulement. Des états de surface optimisés facilitent la formation du film lubrifiant et ces améliorations augmentent les performances de ce type de roulement. Les galets cylindriques sont guidés par des épaulements dans l'une des bagues ou dans les deux. La bague avec épaulement fixe et l'ensemble cage rouleaux peuvent se séparer de l'autre bague, ce qui facilite le montage et le démontage. La bague libre du roulement ne présente généralement pas d'épaulement et autorise ainsi un déplacement axial afin de compenser les dilatations mécaniques ou thermiques. Les diverses variantes d'exécution sont :

1. type NU : deux épaulements fixes dans la bague extérieure, une bague intérieure sans épaulement.
2. type N : deux épaulements fixes dans la bague intérieure, une bague extérieure sans épaulement.
3. type NJ : deux épaulements fixes dans la bague extérieure et un épaulement fixe dans la bague intérieure. Ce roulement peut guider l'arbre dans un sens.
4. type NUP : deux épaulements fixes dans la bague extérieure et un épaulement fixe dans la bague intérieure, un épaulement rapporté de l'autre côté. Ce roulement peut guider l'arbre dans les deux sens.

5. type NJ ou NU avec bague d'épaulement HJ : ces roulements peuvent guider l'arbre dans le sens d'action de la bague complémentaire.

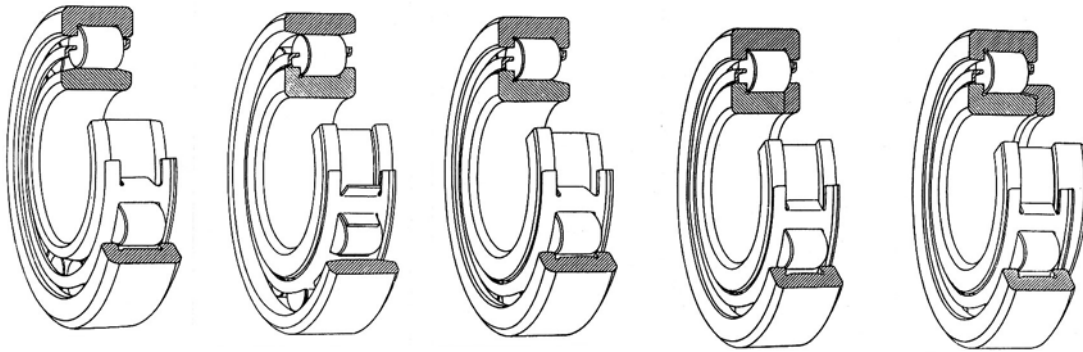


Figure 14.7 Roulements à rouleaux cylindriques des types N...

Tous ces roulements répondent aux exigences sévères de rigidité supérieure à celles des roulements à billes. Les faibles coefficients de frottement équivalent autorisent des fréquences de rotation élevées. Par contre, ces roulements sont très sensibles aux erreurs d'alignement, le déversement admissible étant seulement 2 à 4 minutes.

Séries des roulements à rouleaux cylindriques : 2 3 4 10 22 23

#### 14.1.2.2 ROULEMENTS À PLUSIEURS RANGÉES DE ROULEAUX

Les roulements à plusieurs rangées de rouleaux cylindriques présentent une faible hauteur radiale par rapport à leur largeur, une forte capacité de charge et une rigidité accrue. Ces roulements sont à rouleaux jointifs ou équipés de cage; ils sont utilisés principalement dans les laminoirs et dans les machines-outils selon les exécutions. Les roulements à deux rangées de rouleaux cylindriques pour broches sont fabriqués avec une précision de la classe SP et sont équipés d'un alésage conique afin d'ajuster le jeu diamétral au montage et après exploitation. Les roulements à rouleaux jointifs ne supportent pas des fréquences de rotation élevées car les conditions cinématiques de glissement des galets les uns sur les autres empêchent la formation d'un film hydrodynamique efficace.

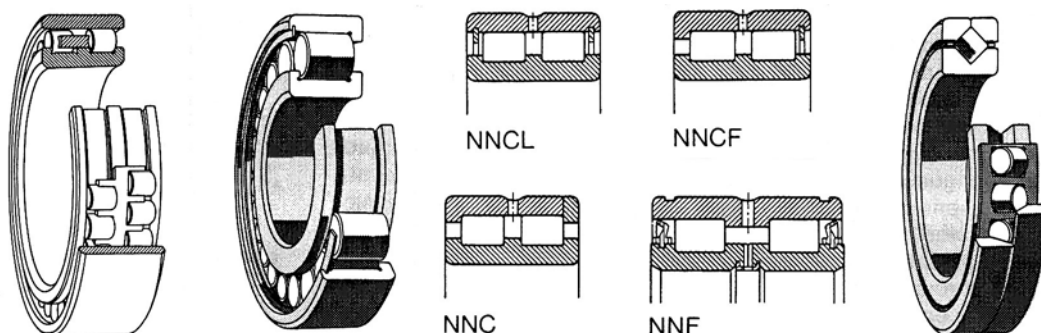


Figure 14.8 Roulement pour broches de machines-outils. Roulements à deux rangées de rouleaux jointifs. Roulement à rouleaux cylindriques croisés

Séries de roulements à deux rangées de rouleaux :

de broches (FAG) :	NN30	NNU49		
à rouleaux jointifs une rangée (SKF) :		NCF	NJG	
à rouleaux jointifs (SKF) :	NNCL	NNCF	NNC	NNF



En complément, SKF offre des roulements à rouleaux cylindriques croisés avec des chemins de roulement inclinés de  $45^\circ$  par rapport à l'axe du roulement. Le diamètre des rouleaux est supérieur à leur longueur. Ces roulements supportent des charges radiales, des charges axiales dans les deux sens ainsi que des couples de déversement. Ces roulements sont à section étroite et permettent de réaliser des montages extrêmement compacts.

#### 14.1.2.3 ROULEMENTS À ROTULE SUR ROULEAUX

Les roulements à rotule sur rouleaux sont destinés à supporter des charges élevées et grâce au chemin de roulement sphérique dans la bague extérieure, ils peuvent s'aligner et compenser les défauts de montage et d'exploitation. L'ensemble bague intérieure, cage et rouleaux en tonnelet peut basculer librement dans la bague extérieure, le déversement admissible étant compris entre  $1^\circ$  et  $2,5^\circ$  selon les modèles. Plusieurs variantes ont été développées ces dernières années afin d'améliorer les performances de ces paliers. Les deux rangées de rouleaux en tonnelet sont séparées par un épaulement ou éventuellement la bague intérieure ne possède pas d'épaulement afin de diminuer les frottements. Dans cette variante, la charge résultante sur un rouleau agit dans le plan de symétrie et l'élément roulant se met en place automatiquement. La capacité de charge de base de ce roulement est aussi augmentée par la longueur des rouleaux. L'alésage est soit cylindrique, soit conique afin de pouvoir régler le jeu et la position du roulement sur l'arbre par exemple avec un manchon de serrage. La bague extérieure est équipée d'une rainure centrale et d'orifices de lubrification.

Les roulements à rotule sur une rangée de rouleaux en tonnelet s'alignent aussi automatiquement et s'introduisent dans les applications exigeant une haute capacité de charge radiale et la compensation des erreurs d'alignement. Leur capacité de charge axiale reste faible puisque l'axe des rouleaux est parallèle à celui du roulement.

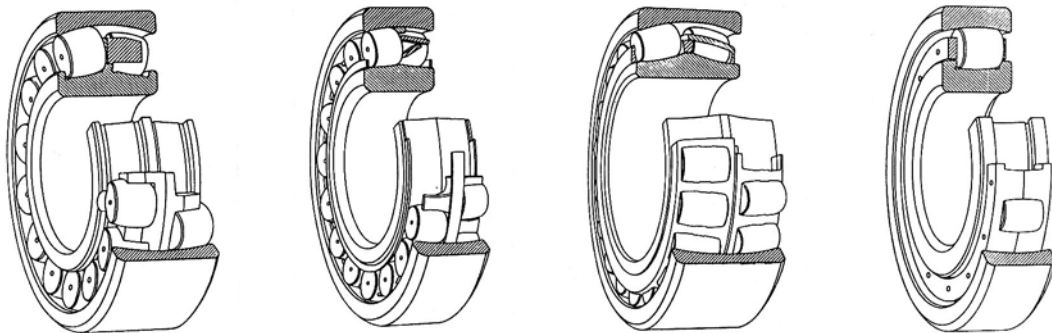


Figure 14.9 Roulements à rotule sur rouleaux : avec épaulement de guidage, avec rouleaux symétriques et bague de guidage mobile. Roulement à rotule sur une rangée de rouleaux

Séries de roulements à rotules sur rouleaux

à deux rangées :	213	222	223	230	231	232	240	241
à une rangée :	202	203	204					

#### 14.1.2.4 ROULEMENTS À GALETS CONIQUES

Les roulements à galets coniques possèdent sur les bagues intérieure et extérieure des chemins de roulement coniques dont les génératrices se coupent en un point afin d'éviter le glissement des rouleaux coniques par suite d'une cinématique défectueuse. Ces roulements conviennent particulièrement bien aux cas de charge combinée. La capacité de charge axiale est déterminée par l'angle de contact  $\alpha$  correspondant à l'angle du cône dans la bague extérieure. Ces roulements sont généralement séparables et peuvent se monter séparément, la

bague extérieure dans le logement, la bague intérieure avec les rouleaux et la cage sur l'arbre. Ces roulements existent dans plusieurs exécutions : à une rangée de rouleaux, à deux rangées et à quatre rangées. Le roulement à une rangée de galets coniques engendre une poussée axiale par suite des poussées normales sur les chemins de roulement. Il faut donc monter un second roulement en opposition avec le premier. Quelques améliorations ont été apportées ces dernières années en particulier sur la forme des épaulements et galets afin d'accroître l'alimentation en lubrifiant et sur la correction logarithmique choisie sur les génératrices des cônes. Le frottement parasite a été diminué de façon notable et la capacité de charge a été augmentée.

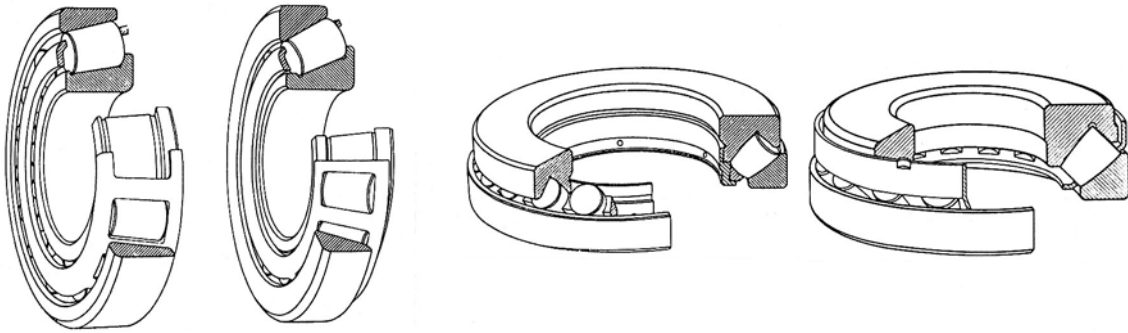


Figure 14.10 Roulements à rouleaux coniques, butées à rouleaux

La maison Timken produit seulement des roulements à galets coniques et offre une gamme très étendue de modèles et d'exécutions spéciales : choix de divers aciers, roulements avec bague extérieure à collet, divers assemblages à deux roulements à une rangée.

Séries de roulements à galets coniques :

à une rangée de galets    302    303    313    320    322    323    330    331

#### 14.1.2.5 BUTÉES À ROTULE SUR ROULEAUX EN TONNELET

Les butées à rotule sur rouleaux possèdent une rangée de galets bombés placés obliquement. Elles supportent surtout des charges axiales très importantes dans un sens combinées à des charges radiales dans une proportion déterminée par la géométrie des chemins de roulement et des rouleaux. Ces butées sont séparables : un ensemble rondelle à fixer sur l'arbre et une cage contenant les galets, une rondelle à monter dans le logement. Une particularité très importante de ces éléments est d'admettre un certain déversement compris entre 2° et 3° selon le type. Les dimensions de catalogue vont du diamètre 60 mm au diamètre 1120 mm (SKF). Ces butées sont à lubrifier à l'huile sauf de rares exceptions.

Séries des butées à rotule sur rouleaux :            292    293    294

#### 14.1.2.6 BUTÉES À ROULEAUX CYLINDRIQUES OU CONIQUES

Les butées à rouleaux cylindriques sont constituées de deux rondelles planes, d'une cage et de rouleaux cylindriques légèrement incurvés afin d'assurer une répartition admissible de la pression. Elles peuvent supporter de très grandes charges axiales et sont peu sensibles aux chocs. Elles admettent seulement les charges axiales et aucun défaut d'alignement entre l'arbre et le logement. Les butées à rouleaux coniques possèdent des rouleaux soit jointifs, soit placés dans une cage. Le premier type est conçu pour des applications oscillantes comme les pivots de direction, le second type pour de très fortes charges axiales.

Séries des butées à rouleaux :

cylindriques :            811    812

coniques (Timken) :      TTC    TTSP   TTHD

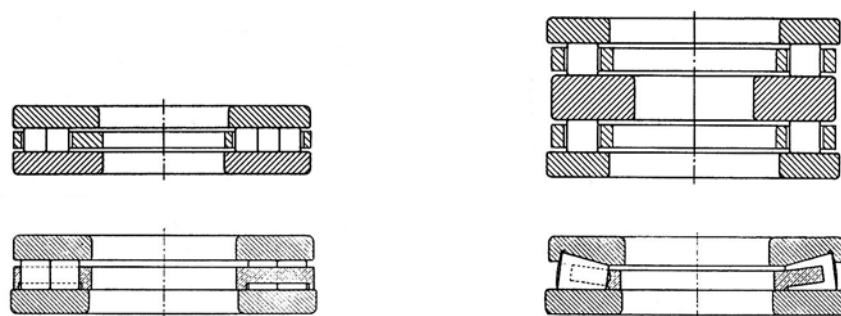


Figure 14.11 Butées à rouleaux cylindriques ou coniques

### 14.1.3 ROULEMENTS ET BUTÉES À AIGUILLES

Les roulements à aiguilles peuvent être considérés comme une variante des roulements à rouleaux cylindriques. La longueur des aiguilles est un multiple de leur diamètre. Ces roulements ont une faible hauteur de section mais une forte capacité de charge. Ils conviennent pour des montages à place limitée dans la direction radiale.

#### 14.1.3.1 ROULEMENTS À AIGUILLES AVEC CAGE INDIVIDUELLE

Le roulement à aiguilles se compose d'une ou de deux bagues et de la cage à aiguilles destinée à guider et maintenir en place les éléments roulants. Les aiguilles du roulement avec leur cage sont placées dans la bague extérieure équipée soit d'épaulements fixes, soit d'épaulements rapportés. Ces roulements peuvent s'utiliser sans la bague intérieure qui est démontable. Cette solution est favorable lorsqu'il est possible de tremper, de rectifier les chemins de roulement sur l'arbre et d'assurer la précision dimensionnelle requise. Les roulements avec bague intérieure s'introduisent dans les conceptions où il n'est pas possible ou trop coûteux d'effectuer ces opérations. La plupart des dimensions des roulements à aiguilles sont normées par ISO, d'autres dimensions sont acceptées d'une façon générale dans l'industrie. Les roulements peuvent recevoir des joints d'étanchéité à frottement sur un côté ou sur les deux et ces éléments complémentaires les protègent contre l'infiltration d'agents extérieurs. Tous ces roulements supportent seulement des charges radiales et peuvent se déplacer axialement afin de compenser les dilatations thermiques ou mécaniques.

La douille à aiguilles se compose d'une bague extérieure mince en tôle d'acier trempé obtenue par formage et d'une cage à aiguilles. La hauteur de ce roulement est très faible et le roulement possède une grande capacité de charge. Les douilles existent avec et sans fond et sont montées sans bague intérieure. Les chemins de roulement sur les arbres doivent présenter la même qualité que celle des roulements : dureté comprise entre 58 et 64 HRC, rugosité maximale  $R_a \leq 0,2 \mu\text{m}$  ou  $R_z \leq 1 \mu\text{m}$ . Les défauts de cylindricité ne doivent pas dépasser 25% de la tolérance réelle sur le diamètre du chemin. Les matières appropriées sont : 100 C6 pour trempe à cœur; 15 CrNi 6 ou 16 MnCr 5 pour les aciers de cémentation, ainsi que les aciers pour trempe superficielle à la flamme ou par induction. Certains fabricants offrent des cages à aiguilles à une ou deux rangées permettant d'obtenir des constructions très compactes.

Séries des roulements à aiguilles

roulements à une rangée d'aiguilles

NA 49

NKJ(S)

roulements à deux rangées d'aiguilles

NA 69

NA 69A

douilles à une rangée d'aiguilles

K

HK

BK (avec fond)

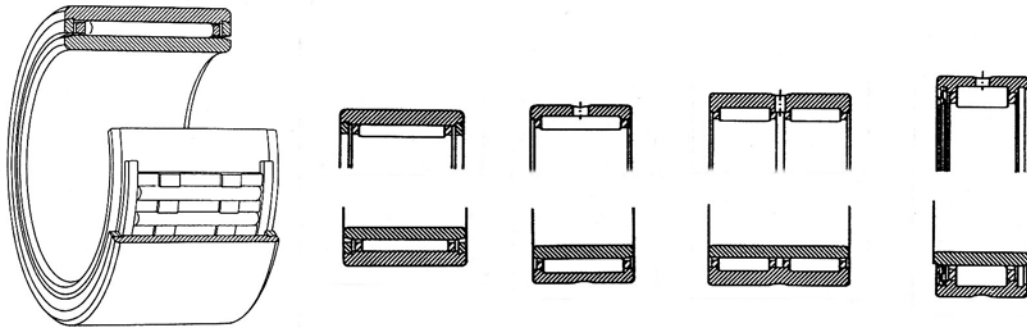


Figure 14.12 Roulement à aiguilles avec cage, épaulements rapportés et bague intérieure  
Modèles de roulements à aiguilles et de douilles à aiguilles

#### 14.1.3.2 ROULEMENTS À AIGUILLES JOINTIVES

Ce roulement comporte habituellement une bague intérieure démontable et une bague extérieure dans laquelle les aiguilles sont maintenues parallèles au moyen de rondelles épaulées. Le chemin de roulement ou les aiguilles ne sont pas parfaitement cylindriques afin d'éviter les concentrations de pression aux extrémités des éléments roulants. Ces roulements sont utilisables aussi sans bague intérieure pour autant que la dureté de l'arbre soit suffisante, que l'état de surface corresponde aux prescriptions du fabricant et que les défauts de cylindricité soient admissibles. Les variantes à disposition offertes par certains fabricants sont : manchons à aiguilles, douilles à aiguilles, cartouches d'aiguilles, etc.

#### 14.1.3.3 BUTÉES À AIGUILLES

La butée à aiguilles se compose d'une cage à aiguilles, les aiguilles étant disposées dans la direction radiale, et de rondelles planes. Malgré l'effet de roulement glissement sur les chemins de roulement, les conditions de fonctionnement, en particulier la capacité de charge et les pertes, restent très favorables. Les butées à aiguilles sont à simple effet et supportent seulement des charges axiales. Les cages à aiguilles axiales consistent en une cage rigide qui guide et maintient un grand nombre d'aiguilles. Les butées à aiguilles n'admettent aucun défaut d'alignement entre l'arbre et le logement, ni aucun voile des épaulements d'appui.

Séries de butées à aiguilles : cage à aiguilles + rondelles de butée

Cages à aiguilles

AXK

Rondelles de butée

LS

AS

WS

GS

## 14.2 GÉOMÉTRIE ET TOLÉRANCES DIMENSIONNELLES

Les roulements et les butées à billes, à rouleaux et à aiguilles sont fabriqués dans les dimensions métriques et les dimensions en pouces. Cette présentation de la géométrie et des tolérances se limite aux dimensions métriques.

### 14.2.1 DIMENSIONS EXTÉRIEURES

La fabrication en très grande série des éléments à roulements et les possibilités d'interchangeabilité d'éléments fabriqués dans de nombreux pays du monde entier ont imposé très tôt une normalisation des dimensions extérieures et une classification des qualités. Cette classification s'est effectuée avant la normalisation ISA, reprise par ISO, des tolérances pour arbres et logements. Comme présenté sous 14.1, la désignation des roulements comprend dans le cas général : un préfixe, un code chiffré constitué par deux parties, la première désignant le type de roulement et sa série, la seconde la dimension du diamètre de l'arbre, le tout suivi d'un suffixe.

Pour les roulements montés sur des arbres à partir de 10 mm de diamètre, les deux derniers chiffres du code numérique du roulement représentent les valeurs suivantes :

code	00 :	diamètre d'arbre 10 mm,
	01	diamètre d'arbre 12 mm,
	02	diamètre d'arbre 15 mm,
	03	diamètre d'arbre 17 mm,
	04 et en dessus :	diamètre de l'arbre $d = 5 \text{ mm} \cdot \text{code}$ .

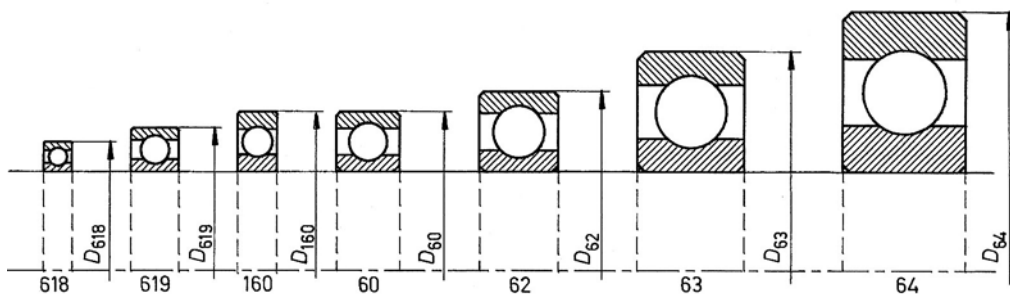


Figure 14.13 Roulements à billes à même diamètre d'arbre, séries 618, 619, 160, 60, 62, 63 et 64

Le plan général des dimensions et l'offre des fabricants permettent d'obtenir pour les divers types de roulement :

1. pour un diamètre d'arbre donné : plusieurs roulements avec un diamètre de logement différent, figure 14.13.
2. pour un diamètre de logement donné : plusieurs roulements avec un diamètre d'arbre différent, figure 14.14.
3. les dimensions extérieures d'un type de roulement se retrouvent dans un autre type de roulement, en particulier les mêmes dimensions extérieures existent pour les roulements à billes des séries 62, 63 et pour les roulements à rouleaux cylindriques des séries 2, 3.

Cette propriété est très intéressante pendant le choix d'un roulement dans la phase de conception : il est non seulement possible de choisir plusieurs roulements de diamètres de logement différents pour un diamètre d'arbre donné, mais aussi d'adopter d'autres types ou d'autres diamètres d'arbre pour un diamètre de logement imposé.

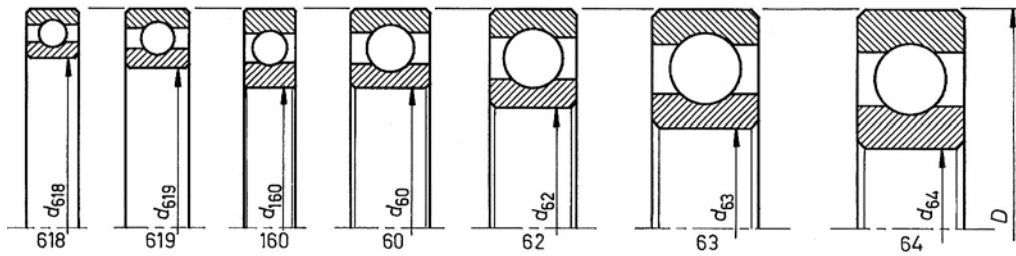


Figure 14.14 Roulements à billes à même diamètre de logement, séries 618, 619, 160, 60, 62, 63, 64

La précision dimensionnelle des diamètres d'arbre et de logement, des largeurs des roulements est fixée par des normes ISO comprenant non seulement les roulements avec tolérances normales, classe 0, mais aussi des tolérances plus serrées comme les classes 6 et 5. Pour des applications particulières, comme par exemple les broches de machines-outils, les fabricants de roulements offrent des roulements avec une plus grande précision, classe de tolérances SP ou UP. Les catalogues contiennent des tables détaillées citant les champs de tolérances et les valeurs des écarts pour la classe normale et quelques classes complémentaires. Les écarts et les variations dimensionnelles sont classées dans : les paliers radiaux, les butées et les roulements à galets coniques. Les dimensions proposées concernent principalement :

- le diamètre nominal de l'arbre :  $d$ ,
- le diamètre du logement :  $D$ ,
- la largeur du roulement :  $B$ ,
- les écarts sur l'alésage cylindrique :  $\Delta_{dmp}$ ,  
l'écart supérieur est nul, l'écart inférieur est négatif;
- les écarts sur le diamètre extérieur :  $\Delta_{Dmp}$ ,  
l'écart supérieur est nul, l'écart inférieur est négatif;
- les écarts sur la largeur :  $\Delta_{Bs}$ ,  
l'écart supérieur est nul, l'écart inférieur est négatif;
- le faux rond de rotation :  $K_{ia}, K_{ea}$ .

Les variations dimensionnelles sur le diamètre de l'alésage dépendent de la série de diamètre pour  $V_{dp}$  : différence entre le plus grand et le plus petit des diamètres isolés dans un plan radial et pour  $V_{dmp}$  dépendant de la dimension nominale. La gamme des diamètres nominaux intervenant dans la fixation des champs de tolérances et des erreurs correspond à celle utilisée pour les tolérances ISO des arbres et alésages, sauf pour les dimensions inférieures à 10 mm.

### 14.2.2 JEU INTERNE DU ROULEMENT

Le jeu interne du roulement est la capacité de déplacement relatif d'une bague par rapport à l'autre dans le sens radial (jeu radial) ou dans le sens axial (jeu axial). Il faut bien distinguer le jeu du roulement avant montage ou jeu initial du jeu après montage et en fonctionnement. Le jeu initial est toujours plus grand que le jeu dans le roulement monté. Ce dernier jeu est réduit par le serrage des bagues sur l'arbre et/ou dans le logement ainsi que par les dilatations thermiques ou mécaniques des diverses pièces.

Le jeu radial de fonctionnement est d'une importance vitale pour les performances du palier ou de la butée car il influence directement la répartition de la charge entre les divers éléments roulants sur les chemins de roulement des bagues. Ce jeu doit être :

1. *Roulements à billes* : le jeu radial doit être à peu près nul ou même une légère précharge n'a aucune suite fâcheuse;

2. *Roulements à rouleaux cylindriques et roulements à rotule sur rouleaux* : le jeu radial doit être faible, mais sans précharge. Il en va de même pour les roulements à galets coniques sauf dans les montages particulièrement rigides.

Les jeux radial et axial, axial pour les roulements à une ou deux rangées de billes à contact oblique et à quatre points de contact, sont à trouver dans les tables des catalogues. Lorsque les conditions de fonctionnement s'écartent de la normale, des roulements avec jeu plus grand ou plus petit que le jeu normal sont nécessaires. Les jeux autres que normal sont désignés par un suffixe C :

- C1 jeu plus petit que C2,
- C2 jeu plus petit que le jeu normal,
- C3 jeu plus grand que le jeu normal,
- C4 jeu plus grand que C3,
- C5 jeu plus grand que C4.

Si la désignation comprend un suffixe de précision P4, P5 ou P6, la lettre C est omise dans le suffixe et son chiffre se combine avec celui de la précision : P6 + C2 = P62.

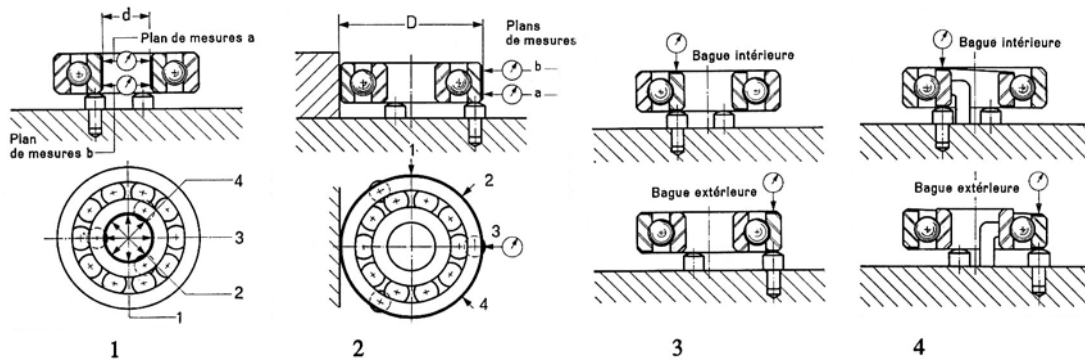


Figure 14.15 Principe des mesures de quelques dimensions sur les roulements :

1. détermination du diamètre moyen de l'alésage du roulement;
2. détermination du diamètre moyen extérieur du roulement;
3. détermination de la largeur du roulement;
4. mesure de parallélisme des faces.

### 14.2.3 DIMENSIONS DE L'ARRONDI

Les dimensions d'arrondis minimales dans le sens radial et dans le sens axial sont des valeurs prescrites dans la norme ISO 582-1979. Le raccordement entre les surfaces cylindriques de l'alésage ou de la bague extérieure et des faces latérales est le résultat du procédé de fabrication des bagues : usinage des bagues en acier non traité avec un arrondi complet, traitement thermique et rectification des surfaces cylindriques et des faces. La forme résultante est une sorte de chanfrein bombé. Les catalogues donnent la dimension  $r_{ijmin}$  pour chaque roulement.

## 14.3 CHOIX DU TYPE DE ROULEMENT

Chaque roulement possède ses propres caractéristiques le rendant particulièrement adapté aux applications envisagées.

#### 4.4.3.1 DIRECTION DE LA CHARGE

Le premier point à prendre en considération est la direction et l'intensité de la charge appliquée sur le roulement, cette charge se trouvant en mettant en équilibre statique l'arbre.

##### 14.3.1.1 RECHERCHE DES RÉACTIONS D'APPUI

Les réactions d'appui se trouvent par les méthodes usuelles entrevues précédemment. Dans la recherche de l'équilibre, les réactions d'appui seront placées au milieu de la largeur du roulement excepté dans tous les roulements à contact oblique ou à galets coniques. Dans ce cas particulier, la position de la réaction sera placée au point de concours des normales aux chemins de roulement, distance  $a$  depuis la face d'appui. L'intensité de la charge détermine le plus souvent la taille du roulement. Les roulements à contact linéique supportent habituellement une charge plus grande que les roulements à contact ponctuel et les roulements à billes ou rouleaux jointifs admettent de plus fortes charges que les roulements correspondants avec cage. Le premier choix doit porter sur l'introduction de roulements à billes lorsque la charge est faible à moyenne, sur l'emploi de roulements à rouleaux pour les grandes charges.

##### 14.3.1.2 CHARGE RADIALE

L'équilibre de l'arbre fait apparaître deux réactions, l'une purement radiale, l'autre possédant deux composantes radiale et axiale. Le principe de l'équilibre statique d'une poutre sur deux appuis sera respecté : appui articulé fixe d'un côté, appui "sur rouleaux" de l'autre côté. À part les roulements à rouleaux cylindriques ayant une bague sans épaulement et les roulements à aiguilles admettant seulement des charges radiales, tous les autres types de roulements radiaux peuvent supporter une charge axiale combinée à une charge radiale. Il est difficile de matérialiser exactement l'appui "sur rouleaux" au moyen des roulements.

##### 14.3.1.3 CHARGE AXIALE

Les charges axiales pures sont retenues principalement par les butées à billes et les roulements à billes à quatre points de contact. Les roulements à contact oblique supportent également des charges axiales moyennes à vitesse élevée. Si la charge axiale peut agir dans les deux sens, comme par exemple par suite d'une inversion du sens de rotation, la butée doit être à double effet.

##### 14.3.1.4 CHARGE COMBINÉE

La charge combinée est une charge résultant d'une composante radiale et d'une composante axiale. Les roulements ordinaires sont conçus pour une charge à direction déterminée : radiale ou axiale. La capacité de charge combinée des roulements à contact oblique et à galets coniques dépend de l'angle de contact  $\alpha$  et croît avec sa valeur. Si la charge combinée comprend une composante axiale pouvant inverser son sens, la conception du palier doit prévoir cette possibilité soit par un roulement adéquat, soit par deux roulements distincts. Si la charge axiale est très importante, il est possible d'utiliser le principe de la séparation des fonctions un roulement supportant la charge radiale, un autre roulement la charge axiale.

La figure 14.16 montre les possibilités de charges radiale, axiale ou combinée des deux familles de roulements : roulements à billes et roulements à rouleaux cylindriques, coniques et en tonnelet.



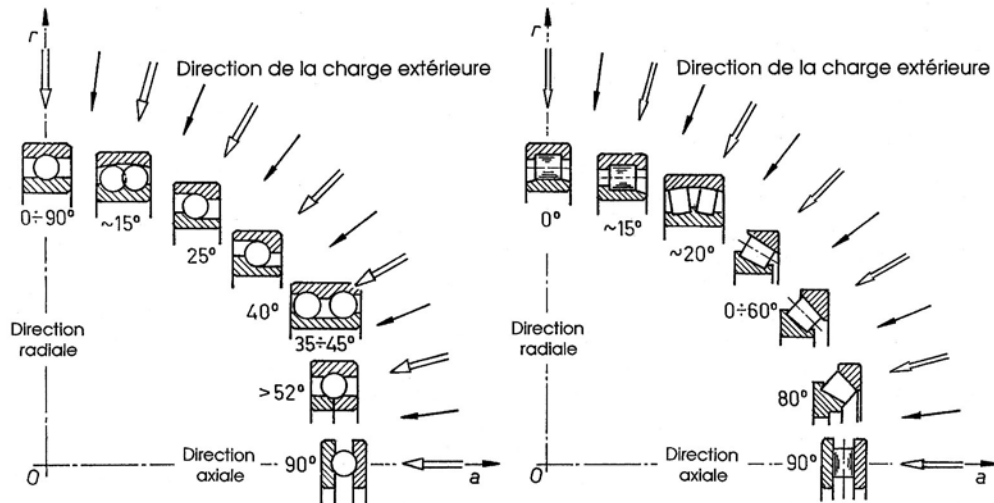


Figure 14.16 Choix du type de roulement en fonction de la direction de la charge :  
Roulements et butées à billes      Roulements et butées à billes

Si la charge produit un couple sur l'appui, les roulements à deux rangées billes peuvent reprendre ce genre de charge. Les roulements à billes à contact oblique appariés et les roulements à galets coniques, disposés en X ou mieux en O, sont bien adaptés pour ce type de charge.

### 14.3.2 PRIX DES ROULEMENTS

La figure 14.17 représente les prix relatifs pour les roulements à billes et à rouleaux radiaux des séries usuelles. Le prix du roulement n'est pas le seul critère de choix et du coût de fabrication car l'usinage de l'arbre et du logement ainsi que les opérations nécessaires au montage ne sont jamais à négliger.

#### 14.3.2.1 ROULEMENTS À BILLES

Pour les roulements à billes, la base de calcul est le roulement à billes à gorges profondes 6206, diamètre de l'arbre 30 mm, série moyenne 62. Pour ce roulement, le prix relatif est 1 et tous les autres roulements sont rapportés à ce prix de base :

- série 72 : roulements à billes à contact oblique,
- série 12 : roulements à rotule sur deux rangées de billes,
- série QJ2 : roulements à billes à quatre points de contact.

#### 14.3.2.2 ROULEMENTS À ROULEAUX

Pour les roulements à rouleaux, la base du calcul est donnée par le roulement à une rangée de rouleaux cylindriques, type NU 208, diamètre de l'arbre 40 mm, série 2. Pour ce type de roulement, le prix relatif est 1 et tous les autres prix ont été comparés à cette valeur nominale. Les autres séries du graphique sont :

- série 202 : roulements à rotule sur une rangée de rouleaux,
- série 222 : roulements à rotule sur deux rangées de rouleaux,
- série 302 : roulements à rouleaux coniques.

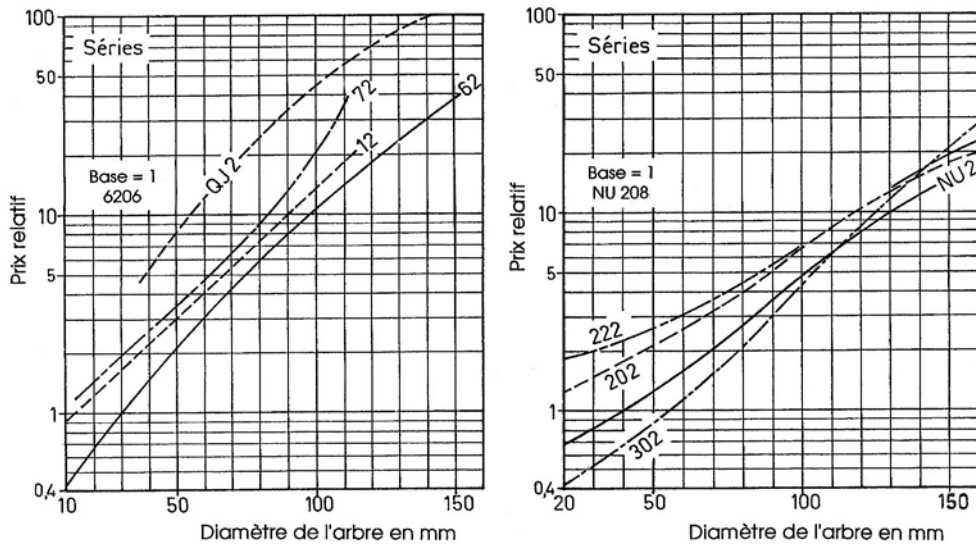


Figure 14.17 Comparaison des prix relatifs pour les roulements à billes et à rouleaux de diverses séries

La comparaison des prix sous cette forme n'est pas directement utilisable car les possibilités de supporter des charges radiales seules ou des charges supplémentaires axiales diffèrent d'un type de roulement à l'autre. Les capacités de charge, pour un même diamètre d'arbre, varient également d'une série à l'autre.

### 14.3.3 PRESSIONS ET FATIGUE

La pression superficielle existant entre les chemins de roulement et les éléments roulants, billes, rouleaux ou aiguilles, est excessivement grande. Comme la géométrie exacte de ces surfaces ou de ces corps n'est pas donnée par les fabricants, nous voulons soulever quelques problèmes de mécanique des contacts ponctuels et linéiques.

#### 14.3.3.1 PRESSIONS SUPERFICIELLES

La pression superficielle entre l'élément roulant et le chemin de roulement de la bague intérieure ou entre l'élément roulant et le chemin de roulement de la bague extérieure peut se trouver par les relations de Hertz. Les rayons de courbure de ces diverses pièces, positifs et/ou négatifs, influencent directement l'intensité de cette pression. Dans le roulement à galets cylindriques et en supposant les pièces parfaitement cylindriques, le rayon de courbure réduit pour le contact galet - bague cylindrique intérieure est plus petit que le rayon de courbure réduit pour le contact galet - bague cylindrique extérieure. Dans le premier contact, le rayon réduit est plus petit que celui du galet, plus grand dans le second cas. La pression superficielle sur la bague intérieure est donc notablement plus élevée que sur la bague extérieure. Pratiquement, les galets ou les chemins de roulement, ou les deux, ne sont pas cylindriques mais légèrement bombés afin d'éviter les concentrations des pression aux extrémités des galets.

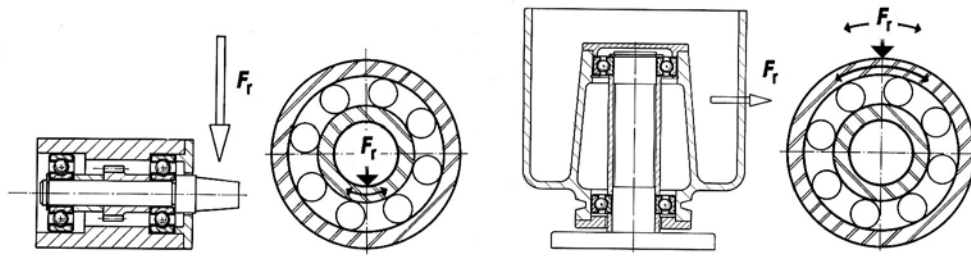


Figure 14.18 Types de charge sur les roulements :  
Charge radiale mobile sur la bague intérieure (SRO)

#### 14.3.3.2 SURFACES D'ACTION DE LA PRESSION SUPERFICIELLE

La durée de vie nominale, définie dans la norme ISO et dans les catalogues, impose une répartition de la pression superficielle ou une charge extérieure de la manière suivante :

1. *Sur le chemin de roulement de la bague intérieure :*

Comme la bague intérieure est supposée en rotation et la charge radiale extérieure à direction constante, la pression superficielle se déplace sur toute la surface du chemin de roulement de cette bague, les éléments roulants se déplaçant à la moitié de la vitesse du chemin.

2. *Sur le chemin de roulement de la bague extérieure :*

La bague extérieure étant supposée immobile, la pression superficielle se répartit sur la moitié du chemin de roulement de cette bague et elle est maximale dans la zone d'action de la force radiale.

3. *Fatigue du métal :*

La fatigue du métal est due pour une bonne part à l'effet de la pression superficielle engendrant des contraintes très élevées à l'intérieur du métal. La pression la plus élevée est appliquée sur la bague intérieure et voyage sur la surface totale du chemin de roulement de cette bague. La répartition de la charge, donc de la pression, dépend non seulement de la géométrie du roulement, mais également des conditions de montage du roulement et de la déformation des pièces : arbre et logement. Pour la bague extérieure, la pression est concentrée sur la ligne d'action de la force extérieure, cette pression étant plus faible.

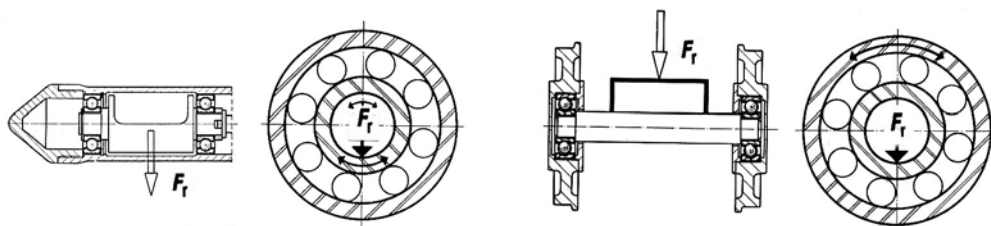


Figure 14.19 Types de charge sur les roulements : Charge radiale mobile sur la bague extérieure

Cette discussion de la répartition de la pression et de la fatigue du métal met en évidence le cas la plus défavorable de charge : zones de charge et de pression situées sur le chemin de roulement de la bague intérieure aux environs de la ligne d'action de la force radiale et déplacement de la charge sur toute la périphérie du chemin de roulement de la bague extérieure. Le calcul de la durée de vie probable d'un roulement devrait tenir compte de la répartition de la pression superficielle en service.

### 14.3.3.3 CINÉMATIQUE DES ÉLÉMENTS MOBILES

La géométrie de la plupart des roulements permet d'obtenir, en principe, le roulement pur entre les éléments roulants et les chemins de roulement. La vitesse absolue d'un point situé sur un élément roulant est égale à la vitesse du chemin de roulement lorsque ce point vient en contact avec la piste. Le roulement pur n'existe pratiquement jamais dans les paliers à roulements car les pièces se déforment et la géométrie cinématique des composants réels ne permet plus de conserver des vitesses égales.

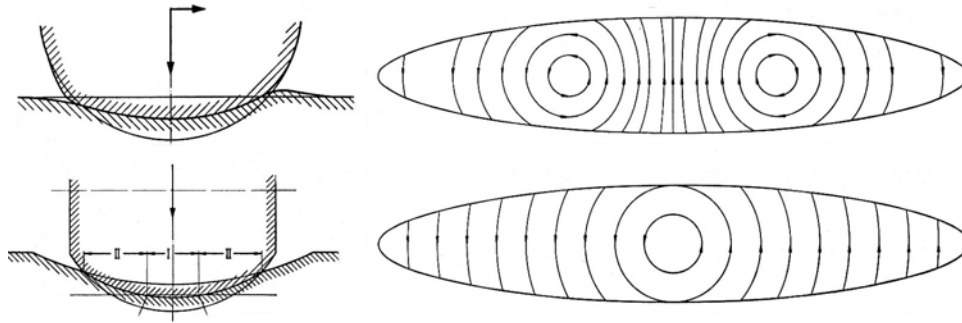


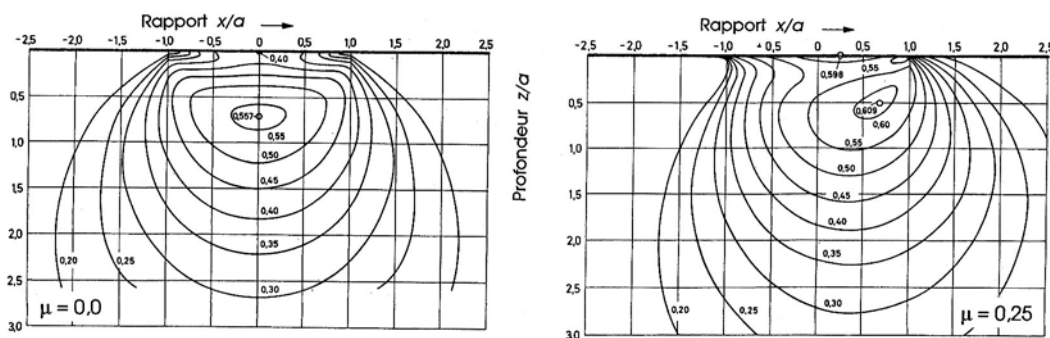
Figure 14.20 Déformations au niveau des surfaces de contact et déplacement des pièces  
Glissement dans les surfaces de contact : roulement rigide à billes et butée à billes

Une analyse détaillée des conditions exactes de roulement démontre la présence d'un ou éventuellement de deux points à roulement pur, points situés à l'intérieur de la surface déformée de contact. Il y a glissement et pertes pour tous les autres points de la surface.

### 14.3.3.4 RÉPARTITION DE LA PRESSION ET DES CONTRAINTES

La théorie de Hertz pour le contact entre sphères ou cylindres permet de trouver la répartition des contraintes à l'intérieur du semi-infini. Si le coefficient de frottement entre les chemins de roulement et les éléments mobiles est important, le mouvement relatif de glissement des pièces déplace le point à contrainte tangentielle maximale vers la surface extérieure de contact, voir figure 14.21.

En présence d'un lubrifiant et d'une vitesse suffisante, des conditions de frottement élasto-hydrodynamiques peuvent induire des pressions très élevées et des déformations incompatibles avec les propriétés mécaniques des matériaux. Des chocs thermiques peuvent également se produire et modifier la structure cristalline des aciers.



Les conseillers techniques en roulements des divers fabricants et les laboratoires de recherche essaient de répondre aux diverses questions soulevées par les avaries en service et le manque de performance des paliers et butées dans des conditions précises de montage et d'exploitation.

### 14.4 CONTRÔLE DES ROULEMENTS SELON ISO

Le calcul et le contrôle des paliers et butées à roulements font intervenir les facteurs suivants :

1. charges radiale et/ou axiale supportées par le roulement compte tenu de leurs variations ou de chocs éventuels;
2. fréquence de rotation : charge sur arbre en rotation ou pratiquement au repos;
3. température de fonctionnement;
4. dureté des chemins de roulement fabriqués par l'utilisateur si la bague intérieure ou extérieure ou les deux sont absentes;
5. mode de lubrification : graisse ou huile;
6. étanchéité et présence de souillures ou d'agents chimiques étrangers;
7. soins apportés à la maintenance;
8. rigidité souhaitée sous charge;
9. précision de guidage ou de centrage;
10. silence de fonctionnement;
11. forme géométrique des pièces adjacentes : cylindricité de l'arbre et du logement, alignement des axes sous charge, rigidité ou flexibilité des parois.

Le contrôle du roulement comprend la détermination des déformations des pièces adjacentes pour les roulements ne supportant que de très faibles erreurs d'alignement et le calcul de la durée de vie ou de la pression au repos.

#### 14.4.1 CHARGE DYNAMIQUE SUR LE ROULEMENT

Le contrôle de la fatigue d'un roulement part de la charge réellement appliquée sur cet élément. La recherche de l'équilibre doit tenir compte de tous les efforts transmis sur l'arbre et des effets d'inertie, en particulier les forces centrifuges non compensées. Bien souvent, seule la charge nominale est calculable à partir de la puissance à transmettre par l'arbre et la variation de cette charge reste indéterminée ou peu sûre à estimer. Pour des applications dérivées d'une conception connue et dans un calcul élémentaire, la charge nominale sera majorée par le facteur de service au moyen du produit :

$$\text{Charge de calcul} = \text{charge nominale} * \text{facteur de service.}$$

Les hypothèses simplificatrices suivantes sont introduites dans la recherche de l'équilibre statique de l'arbre avec ses appuis :

- l'arbre est considéré comme une poutre reposant sur deux appuis rigides,
- les déformations de l'arbre, du logement et des roulements sont négligées,
- les roulements ne transmettent aucun couple sur l'arbre et vice versa.

Tableau 14.1

**Facteur de service pour le calcul élémentaire de la charge**

Type de machine	Facteur de service
<b>Machines et mécanismes fonctionnant sans à-coups</b>	1,0 à 1,3
Transmission par roue dentées : suivant la qualité de l'exécution	1,1 à 1,5
Machines ou mécanismes soumis à des chocs répétés ou des vibrations	1,5 à 3,0
Transmission par courroies : Calcul à partir de l'effort tangentiel transmis	
<b>Courroies crantées</b>	1,2 à 1,5
Courroies trapézoïdales	2,0 à 2,5
<b>Courroies plates suivant la tension initiale</b>	2,5 à 5,0

**14.4.2 FRÉQUENCE DE ROTATION VARIABLE**

Lorsque la fréquence de rotation est variable et la charge extérieure constante, la fréquence de rotation intervenant dans le calcul de la durée de vie du roulement peut se trouver par la somme :

$$n_{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) dt, \quad (14.1.1)$$

avec :  $n(t)$  la fréquence de rotation en fonction du temps,  
 $T$  la période pendant laquelle la charge reste constante,  
 $n_{\dot{\epsilon}}$  la fréquence de rotation équivalente.

Cette relation générale se simplifie lorsque la fréquence de rotation varie par paliers. La fréquence de rotation équivalente se trouve simplement par :

$$n_{\dot{\epsilon}} = \sum_{i=1}^n q_i n_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{T} n_i. \quad (14.1.2)$$

avec :  $q_i = \Delta t_i / T$  le temps relatif correspondant à chaque vitesse constante  $n_i$ .

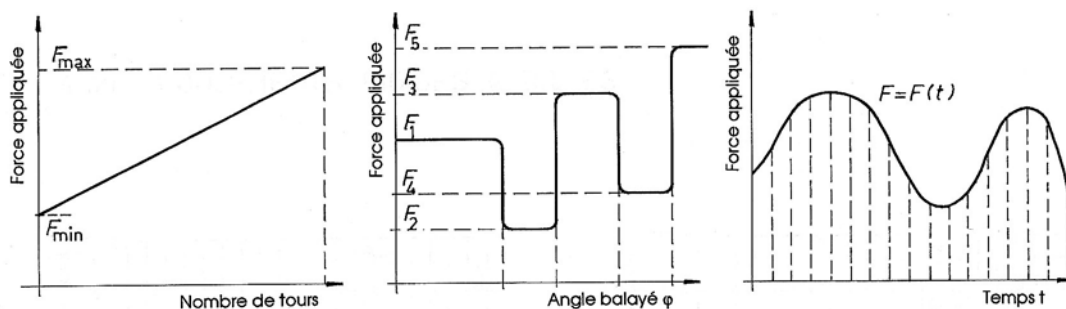


Figure 14.22 Variations typiques de la charge sur les roulements en fonction du temps ou de la rotation : Variations linéaire, par palier ou quelconque en fonction de l'angle ou du temps

Dans un mouvement oscillatoire, la fréquence de rotation équivalente se trouve par la relation suivante :

$$n_{\dot{e}} = n_{osc} \frac{\beta}{\pi / 2}, \quad (14.1.3)$$

avec :  $n_{osc}$  fréquence d'oscillation pour un aller - retour,  
 $\beta$  amplitude angulaire de l'oscillation.

### 14.4.3 CHARGES VARIABLES

Quand la charge et la fréquence de rotation sont variables, le calcul du roulement s'effectue en introduisant une charge et une fréquence de rotation fictives constantes, équivalentes à leurs effets sur la fatigue du roulement. Si pendant la période  $T$ , la fréquence de rotation et la charge sont définies par des fonctions du temps :  $n = n(t)$  et  $F = F(t)$ , la fréquence de rotation est définie par la relation générale et la charge fictive par :

$$F_m = \left( \frac{\int_0^T F^p(t) n(t) dt}{\int_0^T n(t) dt} \right)^{1/p}. \quad (14.2.1)$$

avec :  $p = 3$  pour le contact ponctuel dans le roulement,  
 $p = 10/3$  pour le contact linéique (cet exposant ne figure plus dans les catalogues).

Si la charge appliquée et la fréquence de rotation ne sont pas des fonctions du temps mais de l'angle décrit par l'une des bagues du roulement, la charge fictive pourra se trouver par :

$$F_m = \left( \frac{\int_0^{\Delta\varphi} F^p(\varphi) d\varphi}{\Delta\varphi} \right)^{1/p}. \quad (14.2.2)$$

avec :  $F(\varphi)$  la force appliquée en fonction de la position angulaire  $\varphi$  du roulement,  
 $\Delta\varphi$  l'angle balayé total.

Comme la durée de vie dépend essentiellement du nombre de tours effectué par la bague mobile par rapport à la bague fixe, la force de calcul peut se trouver pratiquement en supposant la charge constante par palier :

$$F_m = \sqrt[p]{\frac{F_1^p \Delta\varphi_1 + F_2^p \Delta\varphi_2 + F_3^p \Delta\varphi_3 + \dots + F_n^p \Delta\varphi_n}{\sum \varphi_i}}. \quad (14.2.3)$$

avec :  $F_i$  la force constante pendant la rotation  $\Delta\varphi_i$ ,  
 $\Delta\varphi_i$  l'angle balayé à force pratiquement constante  
 $\Sigma\varphi_i$  l'angle balayé total.

### 14.4.4 CHARGES DYNAMIQUE ET STATIQUE DE BASE

La norme ISO 281/1-1977 fixe la méthode de calcul de la durée de vie des roulements en rotation. Les définitions sont :

#### *Charge dynamique de base*

La charge dynamique de base est la charge pour laquelle la durée de vie nominale ISO du roulement considéré atteint 1 million de tours sous certaines conditions d'application : charge constante en module et direction, radiale dans le cas d'un roulement radial, axiale et centrée dans le cas d'une butée. Cette charge est symbolisée par la lettre  $C$  dans les catalogues.

### Charge statique de base

La charge statique de base est utilisée pour le calcul des roulements soit à l'arrêt, soit à très faible vitesse de rotation ou animés de mouvements oscillatoires à faible amplitude angulaire. Cette charge est définie dans ISO 76-1987 et correspond à une contrainte, au centre du contact entre élément roulant et chemin de roulement, valant :

- roulements à rotule sur billes :  $4\,600 \text{ N/mm}^2$ ,
- autres roulements à billes :  $4\,200 \text{ N/mm}^2$ ,
- roulements à rouleaux :  $4\,000 \text{ N/mm}^2$ .

Cette contrainte produit une déformation permanente total d'environ 0,0001 du diamètre de l'élément roulant, les conditions d'application de la charge correspondant à celles de la charge dynamique de base. Cette charge est symbolisée par la lettre  $C_0$  dans les catalogues.

### 14.4.5 DURÉE NOMINALE AVANT FATIGUE

La durée d'un roulement est le nombre de tours que cet élément peut effectuer avant l'apparition des premiers signes de fatigue, se traduisant par un écaillage des surfaces portantes, sur l'une des bagues ou un élément roulant. La durée nominale, conformément aux recommandations ISO, est la durée atteinte ou dépassée par 90% des roulements apparemment identiques travaillant dans les mêmes conditions. La durée moyenne atteinte ou dépassée par 50% des roulements est environ cinq fois la durée nominale. La durée de service est la durée atteinte par un roulement avant qu'il ne périclite soit par suite de fatigue, d'usure, de corrosion, de joints défectueux, etc.

La relation entre la durée nominale, exprimée en millions de tours, la charge dynamique équivalente  $F_p$  (symbole  $P$  dans la norme et les catalogues) et la charge dynamique de base  $C$  se calcule au moyen de la formule ISO :

$$L_{10} = \left( \frac{C}{F_p} \right)^p \quad \text{ou} \quad \frac{C}{F_p} = L_{10}^{1/p}. \quad (14.3.1)$$

- avec :  $L_{10}$  durée nominale atteinte par 90% des roulements en millions de tours,  
 $C$  charge dynamique de base,  
 $F_p$  charge dynamique équivalente,  
 $p$  exposant, fonction du contact entre les chemins de roulement et les éléments :  
 $p = 3$  pour les roulements à billes, contact ponctuel,  
 $p = 10/3$  pour les roulements à rouleaux, contact linéique.

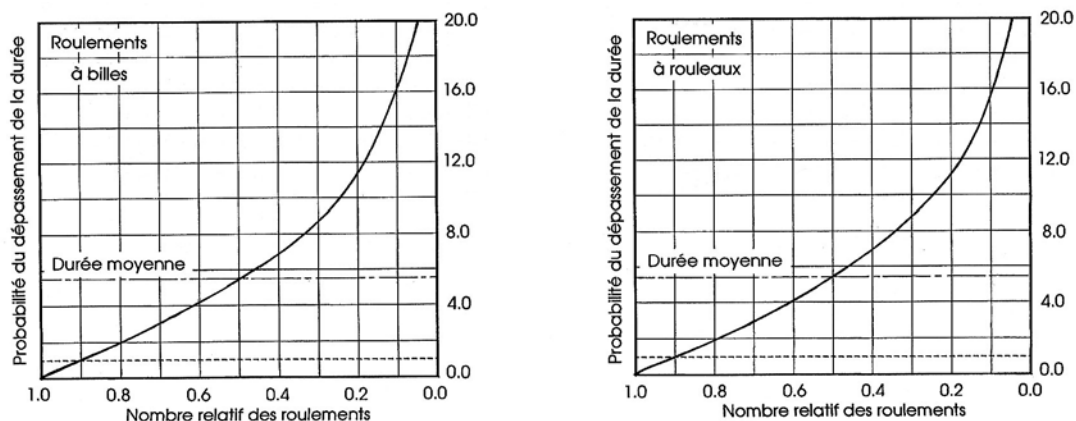


Figure 14.23 Probabilité de dépassement de la durée de vie des roulements à billes et à rouleaux



## 14. Butées et paliers à roulement

Comme la dispersion des valeurs expérimentales de la durée de vie est assez élevée et afin de concilier les exigences de sécurité de fonctionnement et un prix de revient aussi bas que possible, l'expression ISO est valable pour 90% d'un lot de roulements, l'indice de la durée nominale du roulement étant 10 et indiquant la différence de pourcentage à 100%. Cette relation, proposée initialement par Palmgren, est indépendante de la fréquence de rotation, la fréquence de rotation ne devant pas dépasser la limite donnée dans les catalogues en fonction du type de roulement, du mode de lubrification et des conditions de service.

L'influence des facteurs extérieurs à la conception du roulement et d'une fiabilité différente introduit la notion de durée de vie corrigée  $L_{na}$ . La formule de base a été proposée par ISO en 1977 et se transforme en :

$$L_{na} = a_1 a_2 a_3 L_{10} = a_1 a_{23} L_{10}, \quad (14.3.2)$$

avec :  $L_{na}$  durée corrigée, en millions de tours, n représentant la différence entre 100% de fiabilité et la fiabilité considérée,  
 $a_1$  facteur de correction relatif à la fiabilité,  
 $a_2$  facteur de correction relatif à la matière,  
 $a_3$  facteur de correction relatif aux conditions de fonctionnement,  
 $a_{23}$  facteur de correction combiné :  $a_{23} = a_2 a_3$ .

Tableau 14.2  
Facteur de fiabilité  $a_1$

Probabilité de défaillance en %	Facteur $a_1$	Symbole de la durée
10	1,00	$L_{10a}$
5	0,62	$L_{5a}$
4	0,53	$L_{4a}$
3	0,44	$L_{3a}$
2	0,33	$L_{2a}$
1	0,21	$L_{1a}$

### *Facteur de fiabilité $a_1$*

Le facteur de fiabilité  $a_1$  permet de trouver la durée de vie pour une valeur supérieure à 90% dans certains cas particuliers comme en aéronautique afin de réduire les risques de pannes donc d'augmenter la sécurité. Le facteur de correction  $a_1$  est calculé à partir de la fonction de Weibull.

### *Facteur de matière $a_2$*

Le facteur de matière  $a_2$  permet de tenir compte des qualités de la matière utilisée dans la fabrication des roulements et de son traitement thermique. Pour les aciers de qualité supérieure, introduits par les grands fabricants dans la production de roulements de qualités, ce facteur vaut actuellement  $a_2 = 1,0$ .

### *Facteur des conditions de fonctionnement $a_3$*

Le facteur des conditions de fonctionnement  $a_3$  tient compte de la lubrification à la fréquence et à la température existant en service ainsi que des modifications des caractéristiques mécaniques de la matière provoquées par des températures élevées.

L'efficacité de la lubrification dépend essentiellement de l'épaisseur du film porteur séparant les surfaces de contact. Pour obtenir un film suffisamment résistant à la pression, le lubrifiant doit posséder une viscosité adéquate à la température d'équilibre. La viscosité cinématique  $\nu_1$  nécessaire à assurer une lubrification correcte dépend des dimensions diamétrales du roulement et de la fréquence de rotation. Cette valeur peut se lire sur la figure 14.24 à gauche. Ce diagramme est également valable pour les graisses à base d'huile minérale, la viscosité proposée correspondant à celle de l'huile en suspension dans le savon. La valeur du facteur  $a_3$  dépend seulement du rapport des viscosités défini par le rapport de la viscosité  $\nu$  du lubrifiant réellement utilisé à la viscosité  $\nu_1$  donnée sur le graphique :

$$\kappa = \frac{\nu}{\nu_1}, \quad (14.3.3)$$

avec :  $\nu$  viscosité du lubrifiant utilisé à la température de service,  
 $\nu_1$  viscosité recommandée selon graphique de la figure 14.24 à gauche.

Les catalogues fournissent un graphique doublement logarithmique permettant de trouver la viscosité d'une huile à une température quelconque au moyen de la droite de Mac Coull et Walther. Ce graphique est construit pour des huiles minérales possédant un indice de viscosité IV = 85. La figure du chapitre 2 permet d'effectuer facilement cette opération à partir des huiles de la gamme ISO-VG et les relations proposées donnent la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite représentant l'huile étudiée.

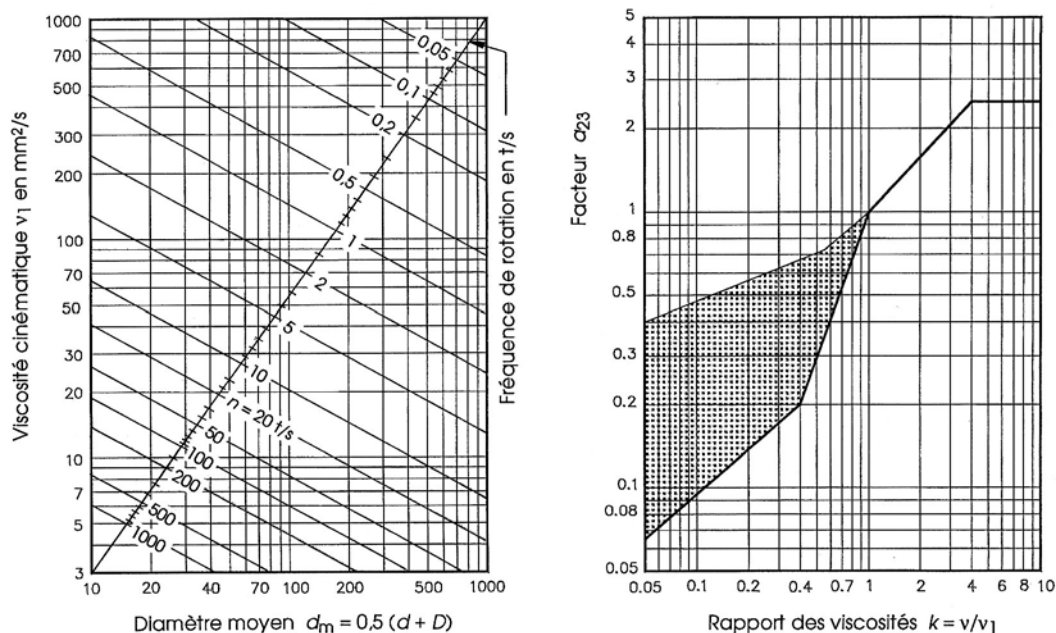


Figure 14.24 Viscosité cinématique du lubrifiant en fonction du diamètre moyen du roulement  
 Facteur combiné  $a_{23}$  en fonction du rapport des viscosités  $\kappa = \nu/\nu_1$

*Combinaison des facteurs  $a_2$  et  $a_3$  :  $a_{23} = a_2 a_3$*

Les facteurs  $a_2$  et  $a_3$  étant interdépendants, le calcul de la durée corrigée peut se simplifier en introduisant le facteur combiné  $a_{23}$  dans la relation générale. Ce facteur peut se lire sur la figure 14.24 à droite en fonction du rapport des viscosités cinématiques. La ligne continue du graphique est valable dans les conditions normales de propreté. Si le lubrifiant contient des additifs EP, il est possible d'obtenir des valeurs plus élevées situées dans la zone ombrée pour le facteur combiné. Les températures de fonctionnement supérieures à 150°C réduisent la

durée de vie des roulements. Pour ces températures, la charge de base dynamique  $C$  est à multiplier par le coefficient de température  $f_t$  :

Température en °C :	150	200	250	300
Facteur $f_t$ :	1,00	0,90	0,75	0,60

#### 14.4.6 CHARGE DYNAMIQUE ÉQUIVALENTE

Lorsque la charge appliquée sur le roulement correspond exactement à une force radiale ou une force axiale centrée sur une butée, cette charge peut s'introduire directement dans la relation de base. Par contre, si la charge est une charge combinée ou si le roulement est à contact oblique, il est nécessaire de transformer les efforts appliqués en un charge dynamique équivalente. La charge dynamique équivalente est la charge constante et stationnaire qui, appliquée sur le roulement, aurait pour résultat la même durée de vie avant fatigue que celle du roulement dans les conditions réelles de charge.

##### 14.4.6.1 RELATION GÉNÉRALE POUR LES ROULEMENTS

Les roulements radiaux sont souvent sollicités par des charges combinées : une composante radiale alliée à une composante axiale. La charge dynamique équivalente se trouve par :

$$F_P = X F_r + Y F_a, \quad (14.4.1)$$

avec :  $F_P$  la charge dynamique équivalente (dans les catalogues, le symbole est  $P$ ),  
 $F_r$  composante radiale de la charge,  
 $F_a$  composante axiale de la charge,  
 $X$  coefficient radial du roulement,  
 $Y$  coefficient axial du roulement.

Les catalogues de roulements donnent toutes les indications nécessaires pour la détermination des coefficients  $X$  et  $Y$ . Ces coefficients se trouvent soit dans la liste des dimensions, soit par calcul. Dans ce cas, ils dépendent habituellement du rapport entre les deux composantes. Discutons quelques cas particuliers de détermination de la charge dynamique équivalente.

##### 14.4.6.2 COEFFICIENTS $X$ ET $Y$ DES ROULEMENTS RIGIDES À BILLES

Les coefficients  $X$  et  $Y$  intervenant dans la détermination de la charge dynamique équivalente des roulements rigides à billes dépendent du rapport entre la composante axiale  $F_a$  et la charge statique de base  $C_0$ . Ils sont également influencés par le jeu radial interne car la capacité du roulement croît avec la valeur du jeu radial. La charge dynamique équivalente pour des roulements montés séparément se trouve par :

$$\begin{aligned} F_P &= F_r & \text{si } F_a/F_r \leq e, \\ F_P &= X F_r + Y F_a & \text{si } F_a/F_r > e. \end{aligned}$$

Les coefficients  $X$  et  $Y$  sont donnés pour le jeu radial normal, les jeux C3 et C4 :

Les valeurs intermédiaires seront interpolées linéairement dans le tableau. Les charges de base statique et dynamique de ces roulements sont représentées sur la figure 14.25 pour des diamètres de roulements à billes compris entre 20 et 120 mm.

Tableau 14.3

**Valeur des coefficients  $X$  et  $Y$  des roulements rigides à billes**

	Jeu normal			Jeu C3			Jeu C4		
$F_a/C_0$	$e$	$X$	$Y$	$e$	$X$	$Y$	$e$	$X$	$Y$
0,025	0,22	0,56	2,0	0,31	0,46	1,75	0,40	0,44	1,42
0,040	0,24	0,56	1,8	0,33	0,46	1,62	0,42	0,44	1,36
0,070	0,27	0,56	1,6	0,36	0,46	1,46	0,44	0,44	1,27
0,13	0,31	0,56	1,4	0,41	0,46	1,30	0,48	0,44	1,16
0,25	0,37	0,56	1,2	0,46	0,46	1,14	0,53	0,44	1,05
0,50	0,44	0,56	1,0	0,54	0,46	1,00	0,56	0,44	1,00

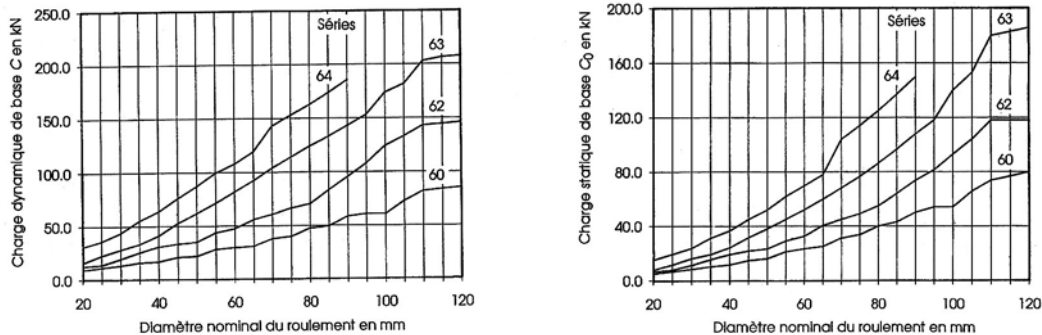


Figure 14.25 Charge dynamique de base et charges statique de base : roulements rigides à billes  
Séries 60, 62, 63 et 64 selon catalogue SKF 4000 F

Exemple de calcul de la charge équivalente :

Le roulement à billes de la série 62, jeu normal, diamètre nominal 65 mm, est sollicité par une force combinées dont les composantes sont :  $F_r = 4\,800\text{ N}$  et  $F_a = 2\,800\text{ N}$ , donc  $F_a/F_r = 0,583$ .

Les charges dynamique et statique de base du roulement 6213 sont :  $C = 55\,900\text{ N}$  et  $C_0 = 40\,500\text{ N}$ .

Rapport :  $F_a/C_0 = 2800\text{ N} / 40500\text{ N} = 0,069 \Rightarrow e = 0,27$  et  $F_a/F_r > e$ .

Coefficients :  $X = 0,56$   $Y = 1,6$ .

Charge dynamique équivalente :  $F_p = 0,56 \cdot 4800\text{ N} + 1,6 \cdot 2800\text{ N} = 7\,168\text{ N}$ .

*Charge minimale sur les roulements rigides à billes*

La charge minimale assure un roulement correct des billes sur les chemins de roulement en présence du lubrifiant et/ou à vitesse élevée en présence de l'effet de la force centrifuge. La charge minimale requise peut se trouver par la formule :

$$F_{r\min} = k_T (0,06 \nu n)^{2/3} \left( \frac{d_m}{1000} \right)^2.$$

avec :  $F_{r\min}$  charge radiale minimale en N,

$k_T$  facteur de charge radiale :

- roulements de la série 618 :  $k_T = 15$ ,
- roulements des séries 619 et 160 :  $k_T = 20$ ,
- roulements des séries 60, 161 et 62 :  $k_T = 25$ ,
- roulements de la série 63 :  $k_T = 30$ ,
- roulements de la série 64 :  $k_T = 35$ ,
- roulements de la série 42 :  $k_T = 50$ ,
- roulements de la série 43 :  $k_T = 60$ ;

$\nu$  viscosité cinématique du lubrifiant en  $\text{mm}^2/\text{s}$  à la température de fonctionnement,

## 14. Butées et paliers à roulement

$n$  fréquence de rotation en tours par seconde [t/s],  
 $d_m$  diamètre moyen du roulement en mm :  $d_m = (d + D) / 2$ .

### 14.4.6.3 BUTÉES À BILLES, À ROULEAU ET À AIGUILLES

Les butées à billes, à rouleaux ou à aiguilles cylindriques ne peuvent supporter que des charges axiales parfaitement centrées. Comme ces butées sont constituées de pièces séparables, elles présentent quelques caractéristiques dynamiques complémentaires :

1. *Force centrifuge* : le mouvement circulaire de l'élément roulant autour de l'axe de la butée fait naître une force centrifuge :  $F_c = m r_m \omega^2$  qui doit être compensée par les réactions des rondelles sur l'élément roulant ou par la cage. Les billes roulent sur un diamètre moyen plus grand.
2. *Couple gyroscopique* : le moment gyroscopique est particulièrement important car l'axe de rotation des éléments roulants change de direction à tout instant (accélération de Coriolis). Il en découle un glissement complémentaire possible des billes ou des rouleaux et une usure supplémentaire des éléments roulants.
3. *Charge axiale minimale* : Cette charge est donnée par :  $F_{a \min} = A (0,06 n)^2$ ,  
avec :  $A$  un facteur de charge donné dans les tableaux des butées,  
 $n$  la fréquence de rotation en tours par seconde.

Le calcul de la charge dynamique équivalente, pour les butées à billes à simple et double effet, s'effectue en égalant :

$$F_P = F_a.$$

Les butées à rotule sur rouleaux peuvent supporter une composante radiale dont l'intensité ne doit pas dépasser :  $F_r \leq 0,55 F_a$ . La charge équivalente se trouve par la relation générale :

$$F_P = X F_r + F_a,$$

avec :  $X = 1,2$  pour ce type de roulement.

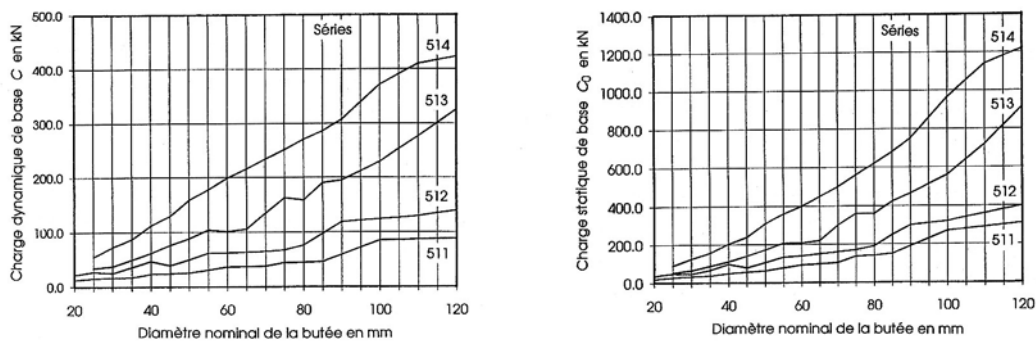


Figure 14.26 Charge dynamique de base et charges statique de base pour les butées à billes  
Séries 511, 512, 513 et 514 selon catalogue SKF 4000 F

Pour que les rouleaux travaillent correctement, la butée à rotule sur rouleaux doit être chargée par une force axiale minimale. Cette charge, exprimée en newtons, vaut :

$$F_{a \min} = 1,8 F_r + A (0,06 n)^2,$$

avec :  $A$  un facteur de charge donné dans les tableaux des butées à rotule,  
 $n$  la fréquence de rotation en tours par seconde.

La figure 14.26 donne les charges dynamique et statique de base pour les butées à billes. Les butées à billes supportent relativement mal les grandes fréquences de rotation.

#### 14.4.6.4 ROULEMENTS À BILLES À CONTACT OBLIQUE

La charge dynamique équivalente impose la connaissance des composantes appliquées sur le roulement unique ou la paire de roulements. Pour les roulements des exécutions B et BE, montés séparément ou par paire, avec disposition en T, cette charge vaut :

$$\begin{aligned} F_p &= F_r & \text{si } F_a/F_r \leq 1,14, \\ F_p &= 0,356 F_r + 0,57 F_a & \text{si } F_a/F_r > 1,14. \end{aligned}$$

Pour les roulements montés par paire selon les dispositions O et X, la charge dynamique équivalente se trouve par :

$$\begin{aligned} F_p &= F_r + 0,55 F_a & \text{si } F_a/F_r \leq 1,14, \\ F_p &= 0,57 F_r + 0,93 F_a & \text{si } F_a/F_r > 1,14. \end{aligned}$$

L'équilibre statique sera recherché en mettant les réactions radiales aux points d'intersection de la normale au chemin de roulement avec l'axe de rotation : composantes radiales  $F_{r1}$  et  $F_{r2}$ , composante axiale  $F_{a1}$  ou  $F_{a2}$ . Toute charge radiale sur un roulement à contact oblique produit une composante axiale induite qui modifie la valeur nominale trouvée dans l'équilibre statique. Les composantes radiales et axiale à introduire dans le calcul de la charge équivalente sont habituellement différentes des grandeurs trouvées dans l'équilibre simple.

Les formules à utiliser sont données dans le tableau 14.4 et sont valables pour des roulements montés en opposition avec un jeu pratiquement nul en fonctionnement et sans précharge. Le roulement 1 ou A est supposée sollicité par une charge radiale  $F_{r1} = F_{rA}$ , le roulement 2 ou B par une charge  $F_{r2} = F_{rB}$ , la charge axiale appliquée par l'arbre étant désignée par  $F_{a12}$ . Les charges radiales s'exercent aux centres de poussée des roulements. On considère toujours les composantes radiales comme positives même si elles agissent dans le sens opposé à celui représenté sur les figures. Le calcul fait intervenir une comparaison des composantes radiales. Les formules 1.3 et 2.3 sont aussi valables lorsque la force axiale extérieure nulle :  $F_{a12} = 0$ .

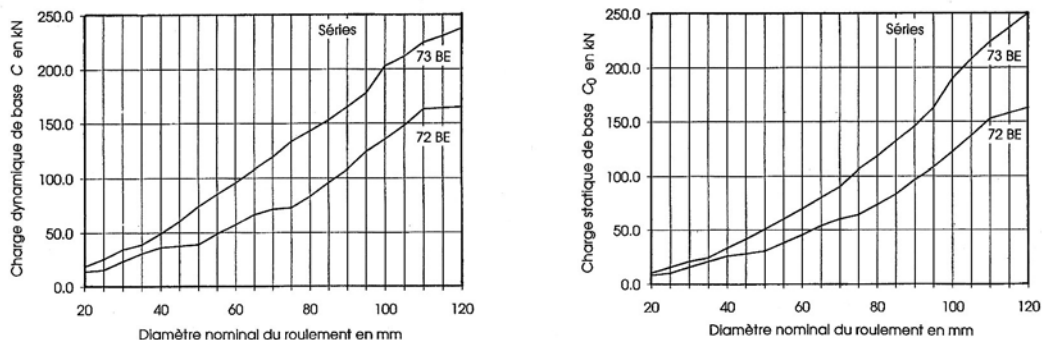


Figure 14.27 Charge dynamique de base et charges statique de base pour les roulements à billes à contact oblique à une rangée des séries 72 BE et 73 BE selon catalogue SKF 4000 F

Pour les roulements à deux rangées de billes à contact oblique avec un angle de contact de  $32^\circ$ , la charge équivalente se trouve par (selon SKF) :

$$\begin{aligned} F_p &= F_r + 0,73 F_a & \text{si } F_a/F_r \leq 0,86, \\ F_p &= 0,62 F_r + 1,17 F_a & \text{si } F_a/F_r > 0,86. \end{aligned}$$

Les roulements à billes à contact obliques à une rangée doivent être aussi soumis à une certaine charge minimale pour fonctionner d'une façon satisfaisante.

## 14. Butées et paliers à roulement

Tableau 14.4

### Charges axiales de calcul sur les roulements à contact oblique à une rangée Angle de contact 40°, Exécution B et BE (SKF)

Disposition en O		Disposition en X	
Charges		Charge axiale sur les paliers A et B à introduire dans le calcul	
1.1	$F_{rA} \geq F_{rB}$ si $F_{a12} \geq 0$	$F_{aA} = 1,14 F_{rA}$	$F_{aB} = F_{aA} + F_{a12}$
1.2	$F_{rA} < F_{rB}$ si $F_{a12} \geq 1,14 (F_{rB} - F_{rA})$	$F_{aA} = 1,14 F_{rA}$	$F_{aB} = F_{aA} + F_{a12}$
1.3	$F_{rA} < F_{rB}$ si $F_{a12} < 1,14 (F_{rB} - F_{rA})$	$F_{aA} = F_{aB} - F_{a12}$	$F_{aB} = 1,14 F_{rB}$
Disposition en O		Disposition en X	
Charges		Charge axiale sur les paliers A et B à introduire dans le calcul	
2.1	$F_{rA} \leq F_{rB}$ si $F_{a12} \geq 0$	$F_{aA} = F_{aB} + F_{a12}$	$F_{aB} = 1,14 F_{rB}$
2.2	$F_{rA} > F_{rB}$ si $F_{a12} \geq 1,14 (F_{rA} - F_{rB})$	$F_{aA} = F_{aB} + F_{a12}$	$F_{aB} = 1,14 F_{rB}$
2.3	$F_{rA} > F_{rB}$ si $F_{a12} < 1,14 (F_{rA} - F_{rB})$	$F_{aA} = 1,14 F_{rA}$	$F_{aB} = F_{aA} - F_{a12}$

#### 14.4.6.5 ROULEMENTS À ROULEAUX CYLINDRIQUES

Les roulements à rouleaux cylindriques N et NU peuvent supporter seulement des charges radiales et servent de paliers libres. La charge équivalente se trouve simplement par :

$$F_p = F_r.$$

Si les roulements sont équipés d'épaulement, types NJ, NUP, NU+HJ, NJ+HJ, la charge équivalente, en présence d'une composante axiale, se trouve par :

$$F_p = F_r \quad \text{si} \quad F_a/F_r \leq e,$$

$$F_p = 0,92 F_r + Y F_a \quad \text{si} \quad F_a/F_r > e,$$

avec :  $e$  un coefficient de calcul,  
 $Y$  le coefficient axial du roulement,  
 pour les roulements des séries 10, 2, 3 et 4 :  $e = 0,2$ ;  $Y = 0,6$ ,  
 pour les roulements des séries 22 et 23 :  $e = 0,3$ ;  $Y = 0,4$ .

Le rapport  $F_a/F_r$  ne doit pas dépasser 0,5 pour la version EC, 0,4 pour les autres.

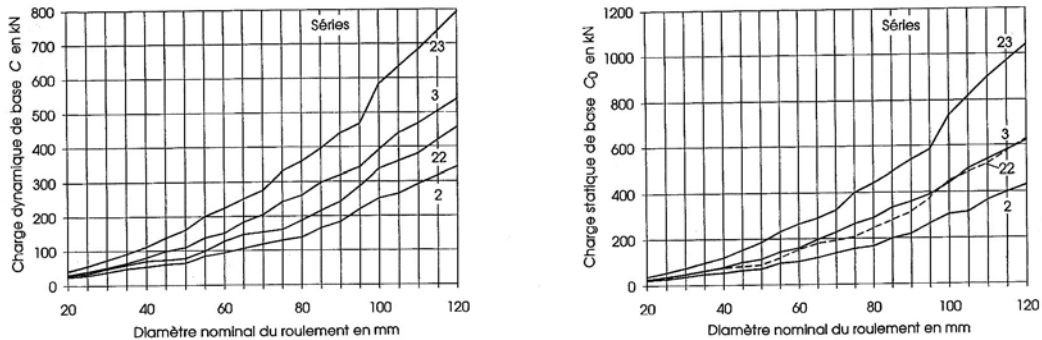


Figure 14.28 Charge dynamique de base et charges statique de base pour les roulements à rouleaux cylindriques des séries 2, 22, 3 et 23 selon catalogue SKF 4000 F

La force axiale admissible sur les roulements à épaulement dépend de la capacité de charge des surfaces frontales de glissement. Cette grandeur est fixée par la lubrification, la température admissible de fonctionnement et la dissipation de l'énergie calorifique produite par le frottement des rouleaux sur la bague. Cette force peut se trouver par la formule :

$$F_{aadm} = \frac{166,7 k_1 C_0}{n(d + D)} - k_2 F_r.$$

avec :  $F_{aadm}$  charge axiale maximale admissible en N,  
 $F_r$  composante radiale sur le roulement en N,  
 $C_0$  charge statique de base,  
 $n$  fréquence de rotation en t/s,  
 $d$  diamètre d'alésage du roulement en mm,  
 $D$  Diamètre extérieur du roulement en mm,  
 $k_1, k_2$  coefficients de calcul :

	huile	$k_1$	$k_2$	graisse	$k_1$	$k_2$
exécution EC :		1,5	0,15		1,0	0,1
autres exécutions :		0,5	0,05		0,3	0,03

La formule proposée est basée sur : une différence de température de 60 K entre les températures de fonctionnement et ambiante, une dissipation calorifique de 0,5 mW/mm<sup>2</sup>K, un rapport de viscosité  $\kappa = 2$ .

#### 14.4.6.6 RENSEIGNEMENTS COMPLÉMENTAIRES

Chaque type de roulements ou de butées nécessite la recherche de la charge équivalente lorsque les efforts appliqués sur l'élément ne sont pas parfaitement axiaux ou radiaux. Les points complémentaires à suivre sont :

1. Avant d'adopter définitivement un roulement ou une butée, lire attentivement les remarques générales données dans les catalogues sur les possibilités d'utilisation de ce palier ou de cette butée et la description de ses caractéristiques.
2. Tous les roulements et butées doivent toujours être soumis à une certaine charge minimale pour fonctionner correctement.



3. Le calcul de la charge équivalente diffère d'un type de roulement à l'autre, très souvent d'un fabricant à l'autre.
4. Tous les roulements à contact oblique produisent une charge axiale induite engendrée par la charge radiale. Le calcul des composantes axiales s'effectue en observant la direction de la composante axiale sur les schémas proposés dans les catalogues.
5. Le choix primaire d'un roulement ou d'une butée tournant entre 10 et 25 tours par seconde se fait en recherchant une charge dynamique de base valant environ 10 fois la charge radiale ou axiale appliquée sur l'élément.
6. La durée de vie d'un roulement ou d'une butée est influencée par un choix correct en fonction du calcul et surtout par le soin apporté à son implantation dans la machine ou le mécanisme, dans les opérations de montage et l'entretien en service.

Les grands fabricants de roulements et butées à billes, rouleaux et aiguilles offrent des versions informatisées des tableaux de roulements des catalogues, comme par exemple CADalog de SKF, comprenant le choix d'un ensemble de roulements à partir de divers critères mécaniques ou géométriques, le calcul détaillé de la charge équivalente et de la durée de vie, le choix du lubrifiant et le tracé à l'échelle de ces éléments pour leur insertion dans les dessins de montage.

#### 14.4.7 DURÉE DE VIE EN HEURES

En supposant la fréquence de rotation constante et exprimée en tours par seconde, la durée de vie probable du roulement ou de la butée se trouve par :

$$L_{10h} = \frac{1\,000\,000}{3\,600\,n} \cdot \left( \frac{C}{F_p} \right)^p \quad (14.5.1)$$

La durée de vie avant fatigue, exigée par la machine ou l'appareil, dépend du type, de la fréquence de rotation, des risques de pannes et des coûts d'interruption de service. Le tableau ci-dessous donne les durées en heures pour quelques genres de machines.

Pour les véhicules routiers ou ferroviaires, en particulier pour les roulements des roues, la durée de vie souhaitée est donnée en km parcourus par la formule :

$$L_{10s} = \frac{\pi D}{1000} \cdot L_{10} \quad (14.5.2)$$

avec :  $D$  le diamètre de la roue en mètre,  
 $L_{10s}$  la durée nominale en millions de km.

Pour les voitures particulières, la durée de vie souhaitée est  $L_{10s} = 0,1$ , pour les locomotives Diesel ou électriques  $L_{10s} = 3$  à 5.

Tableau 14.5  
**Durée de vie souhaitée pour les roulements et les butées**

Type de machines	Durée $L_{10h}$
Appareils électroménagers, machines agricoles Instruments, motocyclettes, appareils médicaux	500 à 3000 h
Petits ventilateurs, outils manuels, engins de montage, machines utilisées dans le bâtiment, voitures légères	2000 à 8000 h
Petits moteurs électriques, ascenseurs et monte-charges, machines fonctionnant rarement ou de courte durée	8000 à 12000 h
Moteurs électriques stationnaires de puissance moyenne, réducteurs de vitesse à usage général, concasseurs giratoires	10000 à 25000 h
Machines-outils, machines à travailler le bois, ventilateurs, bandes transporteuses, machines pour l'imprimerie, centrifugeuses	20000 à 30000 h
Réducteurs et paliers de laminoirs, moteurs électriques de grande puissance, compresseurs et pompes, machines textiles	30000 à 50000 h
Stations de pompage et d'épuration, machines de propulsion des navires, fours rotatifs, machines de câblage	60000 à 100000 h
Machines à fonctionnement en continu (24 heures) Machines pour la fabrication du papier, centrales électriques, pompes et ventilateurs de mine	100000 à 200000 h

#### 14.4.8 CHARGE STATIQUE ÉQUIVALENTE

Le contrôle du roulement ou de la butée à l'aide de la charge statique équivalente est entrepris lorsqu'une des conditions suivantes est remplie :

- le roulement est immobile et soumis à une charge continue ou intermittente,
- le roulement effectue de faibles mouvements oscillatoires sous charge,
- le roulement tourne à très faible fréquence de rotation et la durée de vie exigée est courte,
- le roulement tourne et subit des chocs importants pendant une fraction de temps.

Dans ces divers cas, la charge admissible sur le roulement ou sur la butée est limitée par les déformations permanentes engendrées par la pression entre les éléments roulants et les chemins de roulement. À vitesse pratiquement nulle, ces déformations se traduisent par des méplats sur les éléments roulants et des empreintes dans les chemins de roulement, d'où conditions mécaniques défavorables, modifications des performances du roulement ou de la butée.

Lorsque le roulement supporte à la fois une charge radiale et une charge axiale, la charge statique équivalente se trouve par :

$$F_{p0} = X_0 F_r + Y_0 F_a, \quad (14.6.1)$$

avec :  $F_{p0}$  la charge statique équivalente,  
 $F_r$  la composante radiale sur le roulement,  
 $F_a$  la composante axiale sur le roulement,

$X_0$  le coefficient radial du roulement,  
 $Y_0$  le coefficient axial du roulement.

Les composantes  $F_r$  et  $F_a$  à introduire dans cette relation sont les valeurs maximales intervenant en service dans la position la plus défavorable. Les coefficients radial et axial sont donnés dans les catalogues pour chaque type de roulement ou de butée supportant une charge combinée.

Le coefficient de sécurité en charge statique se définit par le rapport :

$$S_0 = \frac{C_0}{F_{p0}}, \quad (14.6.2)$$

avec :  $C_0$  la charge statique de base donnée dans les catalogues.

Les valeurs usuelles du coefficient de sécurité en charge statique sont :

$S_0 = 0,5$ à $0,8$	pour roulements à l'arrêt et faibles charges,
$S_0 = 0,8$ à $1,2$	pour roulements en faible rotation et charges normales,
$S_0 = 1,4$ à $2,5$	pour roulements en rotation ou à l'arrêt sollicités par des chocs,
$S_0 \geq 4$	pour les butées à rotule sur rouleaux.

Remarques complémentaires :

1. La capacité de charge statique est diminuée aux températures élevées.
2. Les roulements pouvant être sollicités à l'arrêt et choisis en fonction de leur capacité de charge dynamique doivent se vérifier également en charge statique. Le coefficient de sécurité  $S_0$  devra atteindre la valeur proposée ci-dessus.

## 14.5 DÉVELOPPEMENTS DES MÉTHODES DE CONTRÔLE

La normalisation du calcul de la durée de vie avant fatigue est basée sur les travaux réalisés il y a environ cinquante ans par Lundberg et Palmgren. Cette théorie reflète les particularités de la matière, les conditions de fabrication en série et les conditions de fonctionnement de l'époque. Dans la description de l'état de la conception des guidages et paliers de machines-outils en 1960, A. Mottu de la Société Genevoise d'Instruments de Physiques à Genève (SIP) [2.66] donnait son avis sur des observations effectuées dans les pointeuses de précision construites par cette firme. La fatigue du métal provient essentiellement de deux causes : la première est le défaut de forme géométrique des pièces et la seconde le défaut de qualité de surface. Les roulements de broches ayant fonctionnés plus de 100 000 heures ne présentent pas les phénomènes observés par Lundberg et Palmgren.

Dans le catalogue générale SRO-FAG de 1967, cette société avait ajouté au contrôle usuel de la durée de vie avant fatigue une méthode de calcul de la durée de vie avant usure. Dans cette méthode complémentaire, abandonnée depuis lors, l'usure dépend des conditions d'utilisation et de service des paliers et butées à roulements, en particulier du soin apporté à la lubrification et à son renouvellement, à la présence ou à l'absence de corps étrangers ou d'agents chimiques entre les éléments roulants et les chemins de roulement, des conditions de roulement et/ou de glissement ainsi que du régime de frottement. Dans le catalogue WL 41510/2FD de 1990, la lecture du facteur  $a_{23}$  s'effectue en fonction de l'indice statique, du type de roulement et du lubrifiant, voir le développement de ce mode de calcul sous 14.5.2.

Lors du symposium SKF en 1985, H. Reusner [2.60] développa l'analyse informatisée de l'ensemble constitué par le palier ou la butée à roulement, l'arbre et le logement. Ces trois composants concourent simultanément à la réussite de la conception d'un appui tournant. Le système est nommé en allemand LGW pour Lager-Welle-Gehäuse et tient compte des déformations de l'arbre et du logement, du comportement du roulement et finalement de

l'interdépendance de ces trois parties supportant la charge extérieure. Dans le catalogue SKF 4000 F de 1989 et dans le numéro spécial de la Revue des roulements 89, cette firme propose une nouvelle méthode d'estimation de la durée de vie des roulements tenant compte principalement du choix du lubrifiant et des conditions d'entretien au moyen d'un coefficient  $a_{SKF}$ , voir le développement de ce mode de calcul sous 14.5.3.

### 14.5.1 COMPORTEMENT DU PALIER, DE L'ARBRE ET DU LOGEMENT

La détermination classique de la durée de vie avant fatigue des roulements consiste à trouver la charge appliquée sur chaque élément et à partir de la charge équivalente, de la viscosité du lubrifiant, de la charge dynamique de base, de la fréquence de rotation, à quantifier les performances de ces roulements en supposant l'arbre et les logements indéformables. Or le comportement des roulements dépend non seulement des facteurs cités, mais aussi de toutes les parties environnantes. La méthode LGW permet de mieux cerner ce genre de problème. Dans la méthode conventionnelle, les efforts sur les appuis sont trouvés par la statique si le problème est isostatique, par diverses méthodes par superposition ou énergétiques si le problème est hyperstatique.

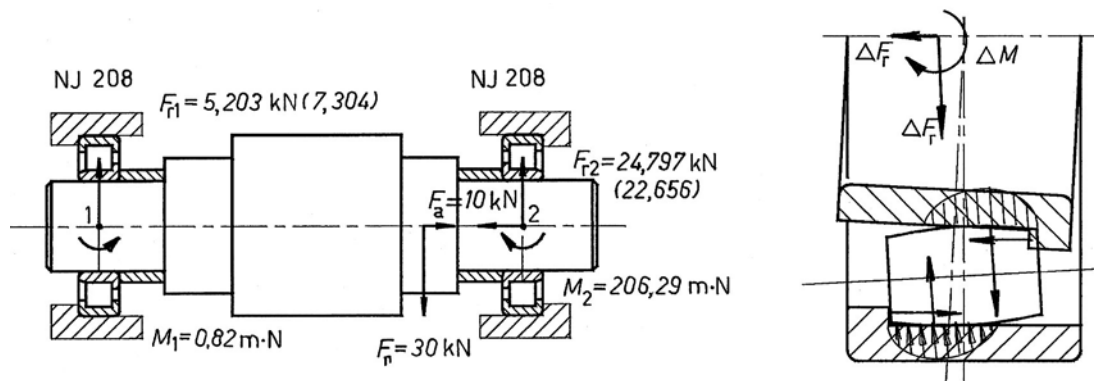


Figure 14.29 Arbre sur deux appuis constitués par des roulements à rouleaux cylindriques  
Efforts et pressions combinés dans un palier à rouleaux cylindriques

Dans la méthode LWG, les pressions entre les chemins de roulement et les éléments roulants peuvent se trouver grâce à la recherche de la déformation totale des trois composants de l'appui. Cette méthode s'utilise dans un environnement informatique évolué permettant de déterminer avec précision les diverses déformations et les efforts en résultant. La figure 14.29 montre un exemple simple d'arbre centré dans deux paliers à roulements à rouleaux cylindriques. Sous l'effet d'une charge combinée,  $F_r = 30$  kN et  $F_a = 10$  kN, et de la présence de pièces déformables, les réactions des appuis sont :

Réaction	Appui 1	Appui 2
Radiale (LWG)	$F_{r1} = 5\,203$ N	$F_{r2} = 24\,797$ N
Axiale		$F_{a2} = 10\,000$ N
Couple	$M_1 = 820$ mm·N	$M_2 = 206\,290$ mm·N
Radiale (statique)	$F_{r1} = 7\,304$ N	$F_{r2} = 22\,656$ N.

Par suite de la charge combinée et de la déformation des diverses pièces, la bague intérieure subit un déversement par rapport à la bague extérieure, les pressions et les poussées entre les éléments roulants et les chemins de roulement et sur les faces de butée engendrent des déformations dans le roulement et des décalages de forces. L'équilibre de la bague intérieure impose la présence du couple supplémentaire  $\Delta M$ .

Les résultats entre la recherche des efforts par la voie classique de la résistance des matériaux et la méthode LWG montrent des valeurs différentes déjà dans le cas de l'arbre sur deux appuis. Si le montage est hyperstatique, les erreurs commises deviennent très importantes. Le calcul dans ces conditions nécessite des logiciels évolués comme un logiciel d'éléments finis pour trouver les déformations et le comportement du logement. Les possibilités d'optimisation sont nettement améliorées et concernent :

1. *Roulement* : grandeur et type, jeu radial et précontrainte, géométrie du contact dans des conditions extrêmes de sollicitation, position du roulement sur l'arbre par rapport aux points d'application des efforts extérieurs, nombre d'appuis : deux, trois et plus.
2. *Arbre* : variation des sections et forme des sections en fonction de la longueur des tronçons composants, rigidité transversale.
3. *Logement* : épaisseur des parois, emplacement des appuis et des renforcements par toile et nervures, nombre de pieds ou d'appuis, position des appuis, répartition de la charge dans les roulements différente de la répartition cosinusoidale admise primitivement. La présence de renforcements dans la zone chargée n'est pas favorable. Le principe des équidépacements doit être observé dans la conception des carters.

#### 14.5.2 MÉTHODE DE CONTRÔLE SELON FAG

L'application de la norme DIN ISO 281 et des compléments proposés par la maison FAG permet d'introduire divers facteurs influençant la durée de vie des roulements : charge équivalente sur le roulement, présence d'additifs dans le lubrifiant, propreté du film et type de roulement. Les durées de vie les plus longues s'obtiennent en lubrification hydrodynamique lorsqu'aucun contact métallique n'a lieu entre les corps roulants et les pistes. Dans des conditions idéales de lubrification et avec des charges modérées, aucune marque de fatigue ne se produit et la durée de vie devient infiniment grande. Les conditions limites sont remplies lorsque :

1. le rapport :  $f_s = C_0/F_{p0} > 8$ ,
2. une propreté absolue dans le film lubrifiant,
3. une séparation complète des parties métalliques du roulement.

La charge équivalente "statique" se trouve par :

$$F_{p0} = X_0 F_r + Y_0 F_a,$$

avec :  $C_0$  charge statique de base,  
 $F_{p0}$  charge équivalente "statique" en complément,  
 $F_a, F_r$  charges dynamiques radiale et axiale sur le roulement,  
 $X_0, Y_0$  coefficients axial et radial du roulement selon catalogue.

Les formules de durée de vie deviennent selon FAG :

$$\begin{aligned} L_{na} &= a_1 a_{23} f_{iDIN} L_{10} [10^6 \text{ tours}], \\ L_{hna} &= a_1 a_{23} f_{iDIN} L_h [\text{heures}]. \end{aligned} \quad (14.7.1)$$

L'influence de la température de service sur la durée de vie est introduite par le facteur  $f_{iDIN}$  qui, fonction de la température, vaut :

Température de service	150°C	200°C	250°C	300°C
Facteur $f_{iDIN}$	1,00	0,73	0,42	0,22

Dans le cas d'une propreté maximale du lubrifiant, la durée de vie du roulement se calcule par la relation corrigée :

$$L_{na \text{ FAG}} = a_1 a_{23}^* f_{iDIN} L_{10} [10^6 \text{ tours}], \quad (14.7.2)$$

avec :  $a_{23}^* = a_{23} f$  où  $f$  est le facteur de correction selon figure 14.30.

À partir de la connaissance des composantes sur le roulement, des conditions de service, des capacités statique et dynamique de base, la méthode de contrôle ou de calcul comprend les pas successifs suivants :

1. Adoption du facteur de fiabilité en fonction du taux de défaillance  $\Rightarrow a_1$ ,
2. Température de service :  $\Rightarrow f_{tDIN}$ ,
3. Calcul de la charge équivalente dynamique :  $F_P = X F_r + Y F_a$ ,
4. Calcul de la durée nominale avant fatigue :  $L_{10} = (C/F_P)^p$  avec  $p = 3$  ou  $10/3$ ,
5. Calcul de la charge "statique" :  $F_{P0} = X_0 F_r + Y_0 F_a$ ,
6. Calcul de l'indice "statique" :  $f_s = C_0/F_{P0}$ ,
7. Adoption de la viscosité du lubrifiant et recherche de la viscosité en service  $v$ ,
8. Calcul du diamètre moyen et recherche de la viscosité nominale  $v_1$ , figure 14.24,
9. Calcul du rapport des viscosités  $\kappa = v/v_1$ ,
10. Recherche du facteur composant  $K_1$ , tableau dans la figure 14.30,
11. Recherche du facteur composant  $K_2$ , tableau dans la figure 14.30,
12. Sommation :  $K = K_1 + K_2 \Rightarrow$  zone à prendre en considération,
13. Lecture du facteur  $a_{23}$  sur la figure 14.24 en fonction de  $\kappa$  et de la zone I, II ou III,
14. Lecture du facteur  $f$  sur la figure 14.30 en fonction de  $f_s$  et  $\kappa$
15. Durée de vie pour bonne propreté :  $L_{na} = a_1 a_{23} f_{tDIN} L_{10}$ ,
16. Durée de vie pour propreté maximale :  $L_{na\ FAG} = f_s L_{na}$ .

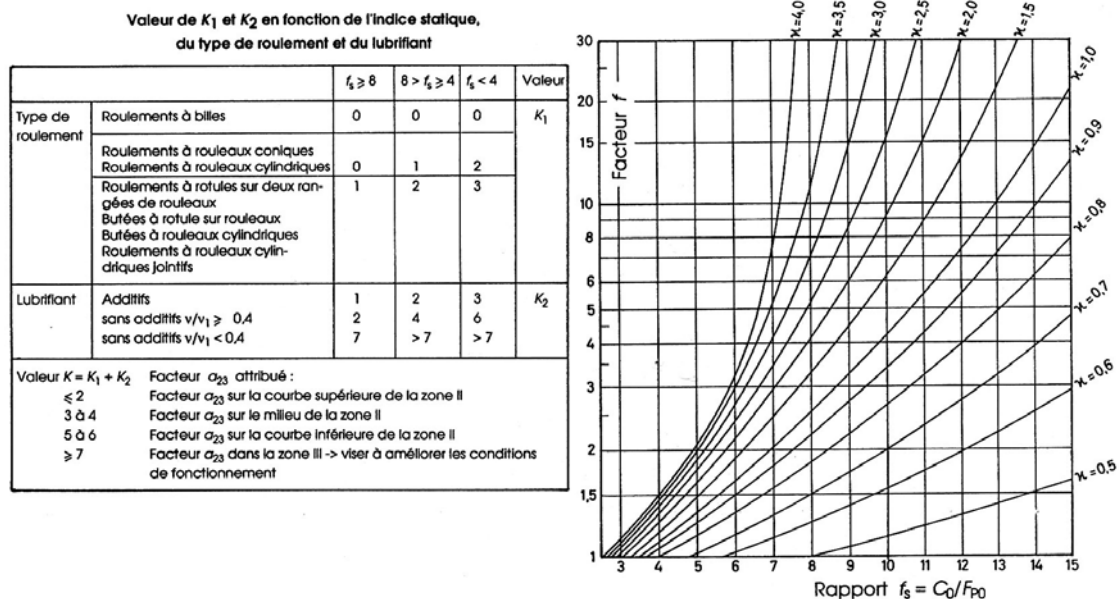


Figure 14.30 Détermination des facteurs composants  $K_1$  et  $K_2$  en fonction de l'indice statique  $f_s$   
Valeur du facteur  $f$  en fonction de  $f_s = C_0/F_{P0}$

Remarques :

1. La lecture du facteur  $a_{23}$  s'effectue sur un graphique légèrement différent de celui de la figure 14.24. La ligne en trait continu de cette figure correspond à la partie inférieure de la zone II selon FAG.
2. Si  $K > 6$ , il faut s'attendre à obtenir un facteur  $a_{23}$  situé en dessous de la zone II. Il en va de même pour une propreté insuffisante. Il est alors vivement recommandé d'améliorer sérieusement les conditions de lubrification afin d'obtenir des conditions favorables de fonctionnement.

3. À propreté maximale, le facteur  $f$  vaut 1 pour  $\kappa \leq 0,4$ . Pour des valeurs  $\kappa$  plus élevées, le facteur de correction peut se lire sur la figure 14.30.
4. La durée calculée correspond à la durée d'utilisation à condition que : la présence d'impureté soit exclue pour toute la durée de fonctionnement, les ajustements de montage soient respectés, les forces et vitesses correspondent aux conditions réelles.

### 14.5.3 MÉTHODE DE CONTRÔLE SELON SKF

Les améliorations sensibles dans les méthodes de production et plus particulièrement dans la qualité de l'acier à roulement au cours des années ont conduit à un rallongement considérable de la durée de vie des roulements par rapport à la valeur calculée par les formules de Lundberg-Palmgren. Plusieurs méthodes empiriques ont été proposées pour tenir compte de ces améliorations. Les capacités de charge dynamique de base ont été augmentées par étape et plus récemment, des facteurs de correction de la durée ont été introduits pour prendre en considération la fiabilité souhaitée, la pureté de la matière et les conditions réelles de fonctionnement. Cependant, il n'était pas encore possible de prévoir des durées de vie extrêmement longues constatées pendant les essais d'endurance effectués dans des conditions idéales. Un modèle mathématique a été développé par SKF et ce modèle général pour les roulements contient le cas particulier proposé par Lundberg-Palmgren.

La théorie de Lundberg-Palmgren suppose que la probabilité pour qu'un élément de volume  $\Delta V$  survive à  $n$  cycles de contrainte et périsse au  $\Delta n$  suivant est proportionnelle à sa taille et elle est fonction de son emplacement et du nombre de cycles. La probabilité s'accroît lentement avec  $n$ . Cet effet de mémoire est un élément essentiel du comportement en fatigue. Dans la nouvelle théorie, le modèle fondamental est étendu sous deux rapports essentiels : la contrainte tangentielle est interprétée localement et une limite de fatigue est introduite en prenant pour modèle l'initiation à la fatigue structurale. Pour l'utilisateur de paliers et butées à roulements, les relations fondamentale ou normée sont appliquées pour quantifier la durée de vie probable des appuis tournant. La durée nominale de vie  $L_{10}$  diminue linéairement avec la charge sur une représentation à l'échelle logarithmique. Les facteurs de correction  $a_1, a_2, a_3$  ne changent pas la pente de la droite et ils décalent seulement cette droite vers une durée plus longue ou plus courte.

L'introduction de la nouvelle théorie de la durée avec ses possibilités d'insertion de contraintes locales conduit à une généralisation de la relation normée sous la forme :

$$L_{naa} = a_1 a_{SKF} \left( \frac{C}{F_p} \right)^p = a_1 a_{SKF} L_{10}. \quad (14.7.3)$$

avec :  $L_{naa}$  la durée de vie corrigée selon la nouvelle théorie SKF, en millions de tours,  
 $a_1$  le facteur de fiabilité,  
 $a_{SKF}$  le facteur de correction de la durée dépendant :  
- des conditions d'environnement,  
- du film lubrifiant, exactement du rapport  $\kappa$ ,  
- du facteur de pollution  $\eta_c$ ,  
- de la matière ou du roulement sous forme d'une limite de fatigue  $F_{pu}$ .

La limite de fatigue  $F_{pu}$  est un nouveau concept dans le calcul. C'est la charge au-dessous de laquelle la fatigue ne se produira jamais dans le roulement. Les valeurs de cette limite sont données dans les tableaux du catalogue. Le facteur  $a_{SKF}$  représente un ensemble interdépendant comprenant plusieurs paramètres, fonction du rapport des viscosités  $\kappa = \nu/\nu_1$ .

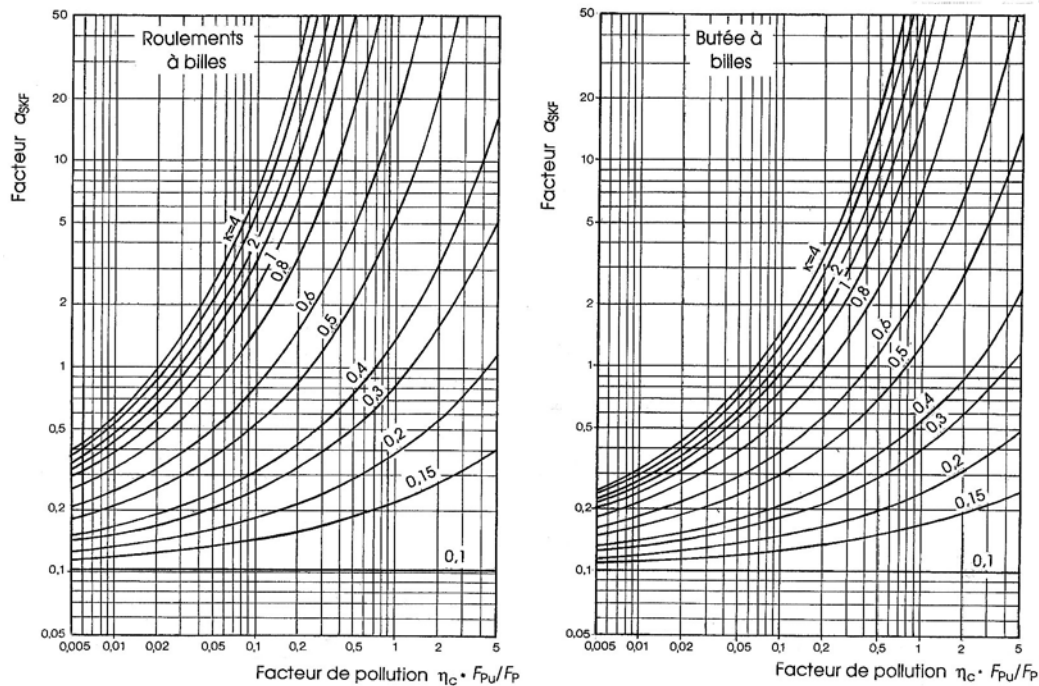


Figure 14.31 Facteur de correction  $a_{SKF}$  pour les paliers et les butées à billes

Les valeurs du facteur  $a_{SKF}$  sont données sur les deux figures 14.31, valable pour les paliers et butées à billes, et 14.32, valable pour les paliers et butées à rouleaux, en fonction :

- en abscisse : du produit du facteur de pollution  $\eta_c$  par le rapport des capacités  $F_{Pu}/F_P$ ,
- du rapport des viscosités :  $\kappa = \nu/\nu_1$  avec  $\nu_1$  selon figure 14.24, pour des lubrifiants sans additifs EP.

Si  $\kappa < 1$ , l'utilisation de lubrifiants contenant des additifs peut allonger la durée de vie des roulements. L'augmentation maximale peut se trouver en multipliant dans la formule le facteur  $a_{SKF}$  par  $(4 - 3 \kappa)$  avant son utilisation. Il est recommandé de ne pas utiliser ce facteur de correction pour un facteur de pollution  $\eta_c$  inférieur à 0,5.

Le facteur de pollution  $\eta_c$  a été introduit pour tenir compte du degré de propreté du montage et du service. L'influence de la pollution interne dépend : de la taille du roulement, de la répartition et de la taille des impuretés solides, de l'épaisseur relative du film. Il est malaisé de fixer des valeurs précises pour ce facteur et le tableau 14.6 donne des indications générales sur les valeurs à introduire dans les calculs.

Les diagrammes des figures 14.31 et 14.32 démontrent la très grande importance de la propreté dans la lubrification, le facteur  $a_{SKF}$  diminuant très rapidement avec la réduction du facteur de pollution. Lorsque les roulements possèdent des joints intégrés, la pollution du roulement peut être maintenue au minimum et la durée des joints et du lubrifiant est alors à prendre en considération. La formule proposée donne un résultat fortement simplifié et il ne semble pas justifié d'adopter des valeurs supérieures à 50 pour le facteur  $a_{SKF}$ .

À partir de la connaissance des composantes radiale et axiale sur le roulement, des conditions de service et de montage, la méthode de contrôle ou de calcul comprend les pas successifs suivants :

1. Lecture des capacités de charge :
2. Adoption du facteur de fiabilité :
3. Calcul de la charge équivalente :
4. Température de service :

$$\begin{aligned}
 C &= C_0 \quad \text{et} \quad F_{Pu}, \\
 \Rightarrow & a_1, \\
 F_P &= X F_r + Y F_a, \\
 \text{si } > 150^\circ\text{C} \Rightarrow f_t &= \dots,
 \end{aligned}$$



## 14. Butées et paliers à roulement

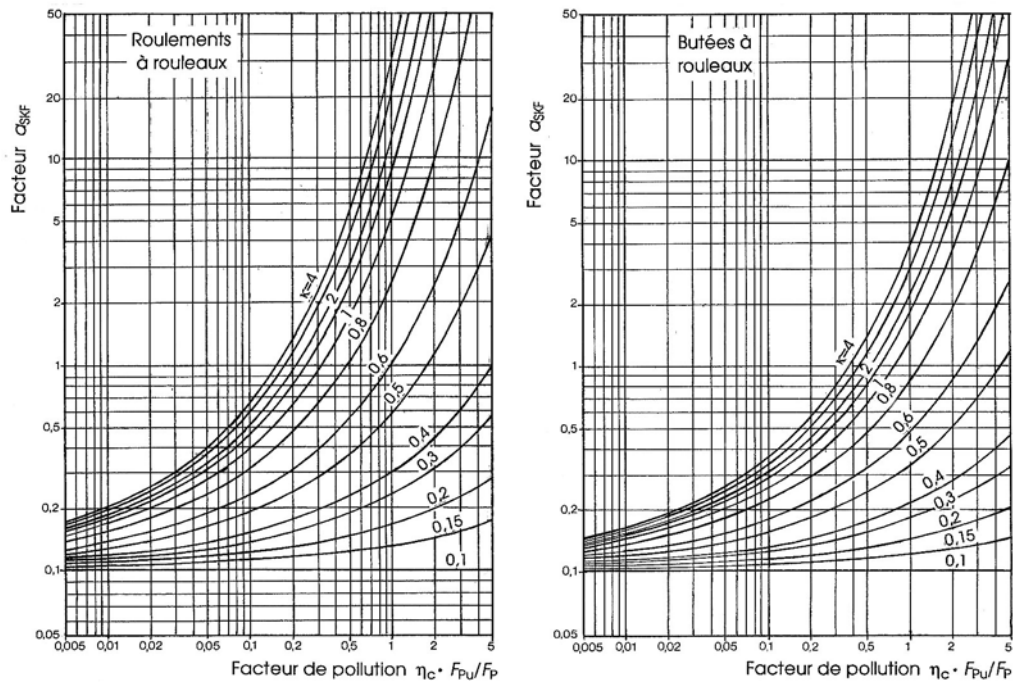


Figure 14.32 Facteur de correction  $a_{SKF}$  pour les paliers et les butées à rouleaux

Tableau 14.6

### Valeur du facteur de pollution $\eta_c$ pour différents degrés de pollution

Conditions	Facteur $\eta_c$
<b>Très propre</b> La taille des impuretés est de l'ordre de l'épaisseur du film lubrifiant	1,0
<b>Propre</b> Roulements graissés à vie et équipés de joints	0,8
<b>Normale</b> Roulements graissés à vie équipés de flasques ou déflecteurs	0,5
<b>Polluée</b> Roulements sans joints ni flasques intégrés, filtration sommaire du Lubrifiant et/ou entrée de particules provenant de l'environnement	0,3 à 0,1
<b>Fortement polluée</b> Moteurs électriques de puissance moyenne Réducteurs industriels petits et moyens Réducteurs industriels pour grande puissance Boîtes de vitesses pour voitures Pompes centrifuges et ventilateurs	0,0 0,2 à 0,3 0,03 à 0,06 0,05 à 0,10 0,08 à 0,20 0,03 à 0,08

- Capacité dynamique de base corrigée :  $C = f_t C_{\text{catalogue}}$
- Calcul de la durée nominale avant fatigue :  $L_{10} = (C/F_P)^p$
- Adoption du lubrifiant et recherche de la viscosité de service  $\nu$ ,
- Calcul du diamètre moyen et recherche de la viscosité nominale  $\nu_1$ , figure 14.24,
- Calcul du rapport des viscosités :  $\kappa = \nu/\nu_1$ ,

10. Recherche du facteur  $a_{23}$  selon ISO sur la figure 14.24 :  $\Rightarrow a_{23}$ ,
11. Durée de vie corrigée selon ISO :  $L_{na} = a_1 a_{23} L_{10}$ ,
12. Adoption du facteur de pollution :  $\Rightarrow \eta_c$ ,
13. Recherche du facteur  $a_{SKF}$  sur les figures 14.31 ou 14.32 à partir du produit  $\eta_c F_{Pu}/F_P$ ,
14. Durée de vie corrigée selon SKF :  $L_{naa} = a_1 a_{SKF} L_{10}$ .

#### 14.5.4 EXEMPLES DE DÉTERMINATION DE LA DURÉE DE VIE

Les exemples proposés montrent le principe du contrôle de la durée de vie avant fatigue au moyen des diverses voies proposées dans les chapitres précédents.

##### 14.5.4.1 ROULEMENT À ROTULE SUR BILLES

Un appui tournant doit supporter une charge radiale de 5500 N à la fréquence de rotation de 20 tours par seconde, la place à disposition étant : diamètre de l'arbre  $d = 50 \dots 60$  mm, diamètre du logement  $D = 80 \dots 120$  mm. La durée de vie devrait être 15 000 h. La déformation de l'arbre et les conditions d'alignement imposent un appui sur rotule.

###### 1. Relations générales

En partant des dimensions géométriques proposées et de la durée de vie exigée, les roulements à prendre en considération sont : diamètre 50 mm  $\Rightarrow$  2310, diamètre 55 mm  $\Rightarrow$  2311. Le catalogue SKF donne les formules générales suivantes pour la détermination de la charge dynamique équivalente :

$$F_P = F_r + Y_1 F_a \quad \text{si } F_a/F_r < e, \quad F_P = 0,65 F_r + Y_2 F_a \quad \text{si } F_a/F_r > e.$$

Comme la charge est seulement radiale, la charge équivalente vaut :  $F_P = F_r = 5500$  N.

###### 2. Choix de deux variantes

Calcul, Lecture ou Contrôle	Roulement	2310	2311
Dimensions $d / D$ en mm		50 / 110	55 / 120
Capacité de charge dynamique $C$		63 700 N	76 100 N
Capacité de charge statique $C_0$		20 000 N	24 000 N
Limite à la fatigue $F_{Pu}$		1 040 N	1 250 N
Facteur de fiabilité pour un taux de 90% $\Rightarrow a_1$		1,00	1,00
Température de service (admise)		65°C	65°C
Durée de vie avant fatigue en millions de tours $(C/F_P)^p$		1 553,6	2 648,9
Viscosité du lubrifiant à 40°C $\Rightarrow$ ISO VG 68		68	68
Viscosité en service $v$ à 65°C		24	24 mm <sup>2</sup> /s
Diamètre moyen en mm		80	87,5
Viscosité nominale $v_1$ selon figure 14.24		15	14
Rapport des viscosités $\kappa = v/v_1$		1,6	1,7
Facteur $a_{23}$ selon ISO, fig. 14.24		1,4	1,45
Durée de vie avant fatigue selon ISO en millions de tours		2 175	3 841
Durée de vie avant fatigue selon ISO en heures		30 200	53 300
Facteur de pollution $\eta_c$ selon SKF (estimé)		0,25	0,25
Produit $\eta_c F_{Pu}/F_P$		0,047	0,057
Facteur $a_{SKF}$ selon figure 14.31		1,45	1,8
Durée de vie selon SKF en millions de tours		2 253	4 768
Durée de vie selon SKF en heures		31 300	66 200

###### 3. Conclusions

Les deux roulements 2310 et 2311 remplissent les conditions initiales proposées. La différence entre les deux durées de vie ISO et SKF n'est pas très grande du fait d'un facteur de pollution peu favorable. La fréquence de rotation minimale est atteinte sans difficulté.

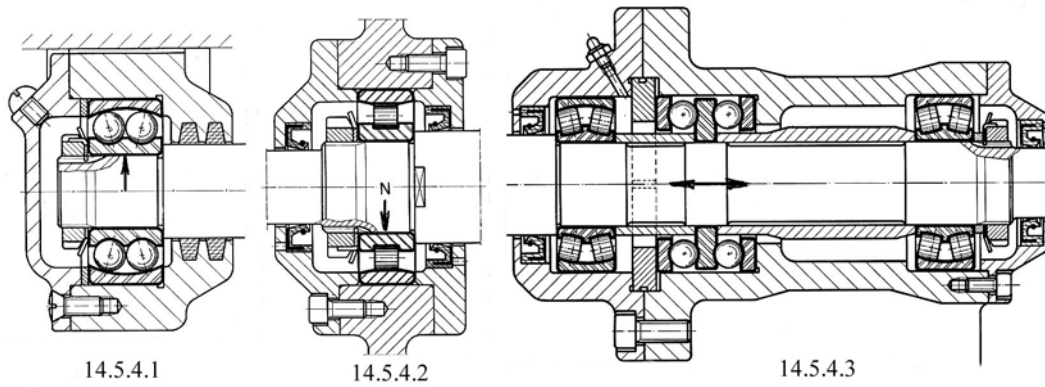


Figure 14.33 Disposition des roulements à billes et rouleaux des trois premiers exemples

#### 14.5.4.2 ROULEMENT À ROULEAUX CYLINDRIQUES

Un palier doit supporter une charge de 3 800 N à la fréquence de rotation de 60 tours par seconde, le diamètre de l'arbre étant  $d = 30 \dots 35$  mm. La durée de vie probable doit être au moins 32 000 heures. La déformation de l'arbre et les conditions de montage autorisent l'emploi d'un roulement à rouleaux cylindriques, type N pour simuler "un appui sur rouleaux".

##### 1. Choix du roulement

Le contrôle s'effectue sur trois roulements choisis dans le catalogue : N306 , N2207 et N307 . La charge est seulement radiale, donc la charge équivalente vaut la charge radiale :  $F_P = F_r = 3\,800$  N.

##### 2. Calcul et lecture des valeurs

Contrôle	Roulements	N 306 EC	N 2207 EC	N 307 EC
Dimensions $d / D$ en mm		30 / 72	35 / 72	35 / 80
Capacité de charge dynamique $C$ en N		51 200	59 400	64 400
Limite à la fatigue $F_{Pu}$ en N		6 200	8 150	8 150
Facteur de fiabilité pour un taux de 90% $\Rightarrow a_1$		1,00	1,00	1,00
Température de service (admise)		70°C	70°C	70°C
Durée avant fatigue en millions de tours $(C/F_P)^{10/3}$		5 820,4	9 550,1	12 502,8
Viscosité du lubrifiant à 40°C $\Rightarrow$ ISO VG 46		46	46	46
Viscosité en service $\nu$ à 70°C		15	15	15
Diamètre moyen en mm		51	53.5	57.5
Viscosité nominale $\nu_1$ selon figure 14.24		10,3	10	9,7
Rapport des viscosités $\kappa = \nu/\nu_1$		1,46	1,5	1,54
Facteur $a_{23}$ selon ISO, figure 14.24		1,28	1,3	1,32
Durée de vie avant fatigue selon ISO en $10^6$ de tours		7 450,1	12 415,1	16 503,7
Durée de vie avant fatigue selon ISO en heures		34 500	57 400	76 400
Facteur de pollution $\eta_c$ selon SKF (estimé)		0,35	0,35	0,35
Produit $\eta_c F_{Pu}/F_P$		0,57	0,75	0,75
Facteur $a_{SKF}$ selon figure 14.32		2,5	3,5	4,0
Durée de vie selon SKF en $10^6$ de tours		14 551	33 425	50 011
Durée de vie selon SKF en heures		67 400	154 700	231 500

##### 3. Conclusions

La limite à la fatigue pour les roulements à rouleaux cylindriques étant bien supérieure à celle des roulements à billes et l'exposant aussi plus grand, les durées de vie de ces trois roulements remplissent les conditions proposées par l'énoncé du problème.

#### 14.5.4.3 BUTÉE À BILLES DOUBLE EFFET

Un arbre de machine est centré dans deux paliers à roulements à rotule sur double rangée de rouleaux et retenu axialement dans les deux sens par une butée à billes à double effet. La fréquence de rotation est 10 tours par seconde; la composante axiale appliquée vaut 9 500 N. La place à disposition dans cet ensemble permet de prévoir une butée pour des diamètres d'arbre compris entre  $d = 70 \dots 80$  mm. La durée de vie exigée est 25 000 heures.

##### 1. Choix du roulement

Le contrôle des butées à double effet retenues dans ce montage s'effectue au moyen de la méthode proposée par la maison FAG. Dans le catalogue, les roulements livrables sont les butées 522 17 et 522 18.

##### 2. Calcul et lecture des valeurs

Contrôle	Butées double effet	522 17	522 18
Dimensions $d_w / d_g / D_g$ en mm		70 / 88 / 125	75 / 93 / 135
Capacité de charge dynamique $C$ en N		98 000	120 000
Capacité de charge statique $C_0$ en N		250 000	300 000
Fréquence de rotation limite (graisse) en t/min		1 600	1 500
Facteur de fiabilité pour un taux de 90% $\Rightarrow a_1$		1,0	1,0
Température de service (admise)		60°C	60°C
Charge dynamique équivalente $F_p = F_a$ en N		9 500	9 500
Durée avant fatigue en millions de tours $(C/F_p)^3$		1 097,7	2 015,4
Charge "statique" complémentaire $F_{p0} = F_a$		9 500	9 500
Indice statique $f_s = C_0/F_{p0}$		26,3	31,5
Viscosité du lubrifiant à 40°C $\Rightarrow$ ISO VG 68		68	68
Viscosité en service $v$ à 60°C selon figure 1.43		28	28
Diamètre moyen sur les bagues de la butée en mm		106,5	114
Viscosité nominale $v_1$ selon figure 14.24		22	21
Rapport des viscosités $\kappa = v/v_1$		1,27	1,33
Facteur $K_1$ selon figure 14.30		0	0
Facteur $K_2$ selon figure 14.30		2	2
Somme des facteurs $K = K_1 + K_2$		2	2 $\Rightarrow$ zone II supér.
Facteur $a_{23}$		1,8	1,9
Durée de vie avant fatigue ISO - FAG en $10^6$ de tours		1 975,8	3 829,2
Durée de vie avant fatigue ISO - FAG en heures		54 800	106 300
Facteur de propreté maximale $f$ selon figure 14.30		30	30
Durée de vie en heures pour propreté maximale		> 500 000	> 500 000

##### 3. Conclusions

Les deux butées à billes à double effet 522 17 et 522 18 permettent d'atteindre facilement la durée de vie exigée. Le facteur de propreté maximale  $f$  ne peut plus se lire sur la figure 14.30. Un contrôle de ces mêmes butées au moyen de la méthode de calcul selon SKF donnerait les résultats suivants (calculés au moyen du logiciel CADalog) :

Calcul, Lecture et Contrôle	Butées double effet	522 17	522 18
Capacité de charge dynamique $C$ en N		97 500	119 000
Capacité de charge statique $C_0$ en N		250 000	300 000
Viscosité à la température de service $v$		28,7	28,7
Rapport des viscosités $\kappa = v/v_1$		1,30	1,35
Facteur $a_{23}$		1,19	1,22
Facteur de pollution $\eta_c$		0,25	0,25
Facteur $a_{SKF}$		2,35	2,94
Durée de vie avant fatigue ISO - SKF en heures		35 700	66 600
Durée de vie selon SKF en heures		70 400	160 400

#### 14.5.4.4 ROULEMENT SOLLICITÉ PAR UNE CHARGE VARIABLE

Un roulement rigide à une rangée de billes est sollicité par une charge combinée variable en fonction de la position angulaire selon figure 14.34. La réaction d'appui engendrée par le roulement est inclinée de  $20^\circ$  par rapport à la direction radiale. La fréquence de rotation vaut en moyenne 6 tours par seconde et la durée de vie devrait être au moins 12 000 heures. La charge est donnée par l'expression générale dite normée (ou relative) :

$$F = 4 \text{ kN} + \Delta F (z - 3z^2 + 2z^3),$$

avec :  $z = \varphi / \Delta\varphi$  position angulaire relative,  
 $\Delta\varphi$  Angle balayé pour une période.

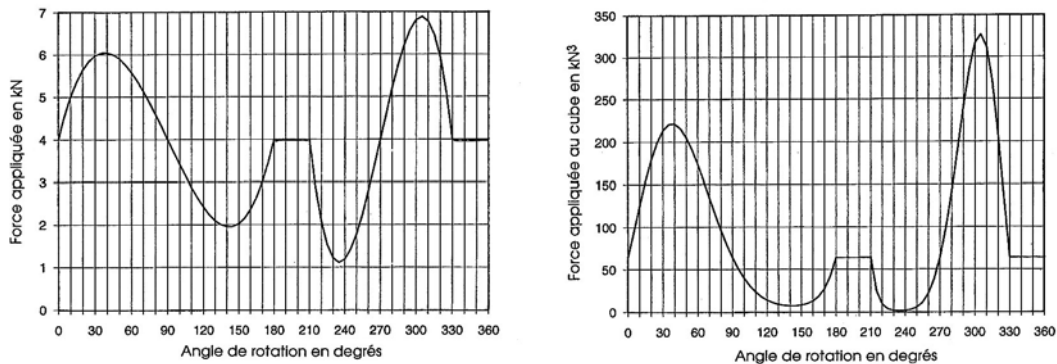


Figure 14.34 Représentation de la force totale  $F$  et de son cube  $F^3$  en fonction de l'angle de rotation

##### 1. Charge sur le roulement

Le calcul de la charge à prendre en considération fait intervenir la relation valable pour les charges variables avec  $p = 3$  et les forces au cube données en fonction de l'angle  $\varphi$ . La figure ci-dessus montre à gauche la variation de la force totale, à droite le cube de cette force. La force est recherchée tous les  $5^\circ$ , introduite dans la formule et la valeur moyenne des cubes est calculée dans chacun de ces intervalles. Le résultat de l'évaluation donne :

Somme des moyennes des forces :  $\Sigma F_3 = 5\,544,2 \text{ kN}^3$ ,  
Moyenne sur 72 intervalles :  $F_m^3 = 77,003 \text{ kN}^3$ ,  
Force de calcul :  $F = 4,254 \text{ kN}$ .

Composantes de la réaction d'appui de calcul :

Composante radiale :  $F_r = 4\,254 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ = 3\,997 \text{ N}$ ,  
Composante axiale :  $F_a = 4\,254 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = 1\,455 \text{ N}$ .

Le choix des roulements se porte sur des roulements de la série 62 avec deux flasques : 62xx-2Z.

##### 2. Calcul et lecture du catalogue

Contrôle	Roulements	6209-2Z	6210-2Z	6211-2Z
Capacité de charge dynamique $C$ en N		33 200	35 100	43 600
Capacité de charge statique $C_0$ en N		21 600	23 200	29 000
Limite à la fatigue $F_{Pu}$ en N		915	980	1 250
Dimensions $d / D$ en mm		45 / 85	50 / 90	55 / 100
Facteur de fiabilité pour un taux de 90% $\Rightarrow a_1$		1,00	1,00	1,00
Température de service (admise)		60°C	60°C	60°C
Rapport $F_a/C_0$ avec $F_a/F_r = 0,364$		0,0674	0,0627	0,0501
Valeur du coefficient $e$ pour jeu normal		0,267	0,263	0,250
$F_a/F_r > e \Rightarrow X = 0,56 \quad Y =$		1,62	1,65	1,73
Charge équivalente : $F_p = X F_r + Y F_a$		4 595	4 639	4 755
Durée avant fatigue en $10^6$ de tours $(C/F_p)^3$		377,2	433,1	770,9

Viscosité du lubrifiant à 40°C $\Rightarrow$ (graisse)	91	91	91
Viscosité en service $\nu$ à 60°C	37	37	37
Diamètre moyen $d_m$ en mm	65	70	77,5
Viscosité nominale $\nu_1$ selon figure 14.24	41	40	38
Rapport des viscosités $\kappa = \nu/\nu_1$	0,90	0,93	0,97
Facteur $a_{23}$ selon ISO-SKF, figure 14.24	0,8	0,9	0,95
Durée de vie avant fatigue en $10^6$ de tours	301,7	389,8	732,3
Durée de vie avant fatigue en heures	13 900	18 000	33 900
Produit $\eta_c F_{Pu}/F_P$ avec $\eta_c = 0,5$	0,10	0,106	0,131
Facteur $a_{SKF}$	1,9	2,2	3,3
Durée de vie selon SKF en heures	33 100	44 100	117 000

### 3. Conclusions

Tous les roulements proposés de la série 62 remplissent les conditions proposés. Pour des questions d'encombrement, le roulement 6209 a été retenu dans la conception de cet appui.

#### 14.5.4.5 ARBRE D'ENTRÉE DANS UN RÉDUCTEUR À COUPLE CONIQUE

Un réducteur de vitesse à engrenage est prévu pour une puissance nominale de 20 kW à la fréquence de rotation de 25 t/s. Ce réducteur est équipé d'un engrenage à roues coniques denture inclinée sur l'entrée et d'un engrenage à roues cylindriques hélicoïdales sur la sortie. L'arbre d'entrée avec le pignon conique est représenté sur la figure 14.35.

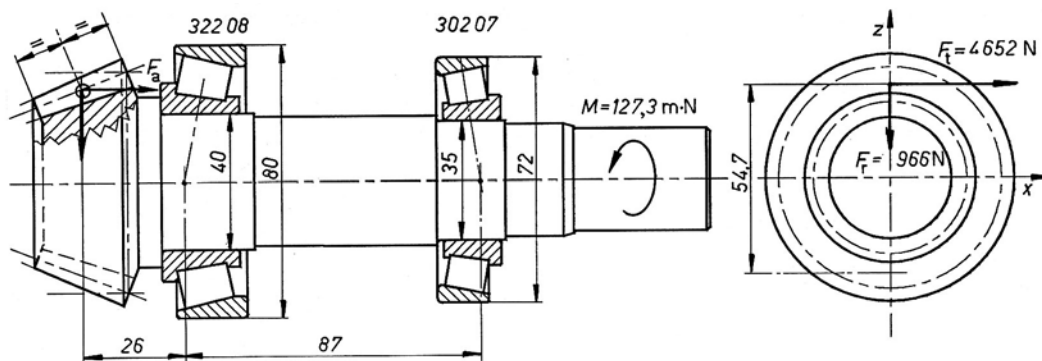


Figure 14.35 Arbre d'entrée d'un réducteur à engrenage conique incliné

##### 1. Charge sur les roulements

Pour une puissance  $P = 20$  kW et une fréquence de rotation  $n = 25$  t/s, le couple moteur vaut  $M = 127,3$  m·N et la composante tangentielle de la force totale appliquée sur la dent, placée au diamètre moyen 54,7 mm, vaut  $F_t = 4652$  N. La durée de vie souhaitée est 16 000 h.

Les deux autres composantes sont :

composante radiale :  $F_r = 966$  N, composante axiale :  $F_a = 2603$  N.

La mise en équilibre de cet arbre fait apparaître les réactions suivantes :

- palier 1 de gauche :  $F_{r1} = 6058$  N ( $175,9^\circ$ )  $F_{a1} = -2603$  N (admise sur cet appui),
- palier 2 de droite :  $F_{r2} = 1488$  N ( $20,8^\circ$ )  $F_{a2} = 0$  N.

Les roulements adoptés sont des roulements à rouleaux coniques, disposition en O :

- Palier de gauche, diamètre nominal 40 mm 32208, palier B pour le calcul de la charge axiale,
- Palier de droite, diamètre nominal 35 mm 30207, palier A pour le calcul de la charge axiale.

Avant de contrôler la durée de vie, il faut trouver les charges équivalentes sur les deux roulements compte tenu du comportement des roulements à contact oblique. Le principe de la détermination des charges est semblable à celui des roulements à billes à contact oblique selon la première partie du tableau. La composante axiale agit vers la droite.

## 14. Butées et paliers à roulement

### 2. Calcul et lecture du catalogue

Contrôle	Roulements	32 208 (B)	30 207 (A)
Dimensions $d / D / T$		40 / 80 / 23,75	35 / 72 / 18,25
Capacité de charge dynamique $C$ en N		74 800	51 200
Capacité de charge statique $C_0$ en N		86 500	56 000
Limite de fatigue $F_{Pu}$ en N		9 800	6 200
Facteur de roulement $Y$		1,6	1,6
Grandeur complémentaire $e$		0,37	0,37
Force radiale en N		6 058	1 488
Rapport $F_{rA}/Y_A < F_{rB}/Y_B$		1488 N / 1,6	< 6058 N / 1,6
$F_{a1} > 0,5 (F_{rB}/Y_B - F_{rA}/Y_A)$		$F_{a1} > 0,5(6058/1,6 - 1488/1,6) = 1427$ N	
Composante axiale de calcul en N		$F_{aA} = F_{a2c} = 0,5 \cdot 488/1,6 = 465$	
		$F_{aB} = F_{a1c} = 465 + 2603 = 3 068$	
Rapport $F_a/F_r > e$ ?		0,506 > $e$	0,312 < $e$
Charge équivalente $F_p$ en N		7 332	1 488
Facteur de fiabilité pour un taux de 90% $\Rightarrow a_1$		1,00	1,00
Température de service		70°C	70°C
Durée avant fatigue en $10^6$ tours $(C/F_p)^{10/3}$		2 302,8	132 502
Viscosité du lubrifiant à 40°C en mm <sup>2</sup> /s		80	80
Viscosité en service à 70°C en mm <sup>2</sup> /s		23	23
Diamètre moyen en mm		60	53,5
Viscosité nominale $v_1$ selon figure 14.24		15	17
Rapport des viscosités $\kappa = v/v_1$		1,53	1,35
Facteur $a_{23}$ selon ISO - SKF, figure 14.24		1,3	1,2
Durée de vie avant fatigue selon ISO en $10^6$ tours		2 994	159 000
Durée de vie avant fatigue selon ISO en heures		33 200	> 1 000 000
Facteur de pollution $\eta_c$ selon SKF (estimé)		0,15	0,15
Produit $\eta_c F_{Pu}/F_p$		0,20	0,63
Facteur $a_{SKF}$ selon figure 14.32		0,8	2,8
Durée de vie selon SKF en $10^6$ tours		1 842,2	371 000
Durée de vie selon SKF en heures		20 400	> 1 000 000

### 3. Conclusions

La durée de vie exigée est atteinte par les deux roulements. Le roulement de droite, placé près du tronçon d'arbre supportant le couple d'entrée est visiblement à durée de vie trop grande. L'expérience montre que ce roulement est presque toujours sollicité par des efforts supplémentaires difficilement chiffrables engendrés par l'accouplement ou l'élément d'introduction du couple moteur. La précharge sur les roulements n'a pas été prise en considération dans la recherche des charges de calcul.

## 14.6 FROTTEMENT, PRÉCHARGE ET LUBRIFICATION

L'échauffement des roulements provient des pertes par roulement et glissement entre les éléments roulants et les chemins de roulement, du frottement des joints et du brassage du lubrifiant. Le choix correct du lubrifiant influence non seulement la durée de vie du roulement, mais également les pertes. Enfin, les roulements imposent généralement un jeu interne pour obtenir des conditions favorables de fonctionnement. Dans certaines applications, une précharge est souhaitée afin d'obtenir une plus grande rigidité dans l'appui.

### 4.4.6.1 PERTES DANS LES ROULEMENTS

Les pertes dans les paliers et butées à roulements proviennent de plusieurs sources : résistance de roulement entre les éléments roulants et les pistes dans les bagues, frottement

entre la cage et les éléments roulants, résistance à la déformation du lubrifiant, frottement dans les joints et flasques incorporés. Les pertes sont plus élevées dans les roulements neufs et lors des démarrages. Il se produit une combinaison de lubrification mixte et hydrodynamique dans la plupart des roulements.

#### 14.6.1.1 CALCUL SIMPLIFIÉ DES PERTES

Dans les conditions normales de fonctionnement, soit un rapport  $C/F_p \approx 10$ , une fréquence de rotation  $n < \frac{2}{3} n_{lim}$ , une bonne lubrification, la somme des pertes peut se trouver approximativement par l'expression du couple à produire pour vaincre les pertes en introduisant, comme dans les paliers et butées hydrodynamiques, un coefficient de frottement équivalent :

$$\begin{aligned} 1. \text{ Roulement radial : } & M = \frac{1}{2} d \mu_e F_r, \\ 2. \text{ Butée : } & M = \frac{1}{2} d \mu_e F_a, \end{aligned} \quad (14.8.1)$$

avec :  $\mu_e$  coefficient de frottement équivalent selon tableau 14.7,  
 $d$  diamètre nominal du roulement,  
 $F_r$  force radiale,  
 $F_a$  force axiale.

Le frottement des joints d'étanchéité n'est pas compris dans cette définition des pertes.

Tableau 14.7

#### Coefficient de frottement équivalent et angle de rotulage admissible

Type de roulements ou de butées	Coefficient $\mu_e$	Angle de rotulage
Roulement rigide à billes	0,0012 à 0,0018	8'
Roulement à rotule sur billes	0,0010 à 0,0020	4°
Roulement à contact oblique, 1 rangée	0,0018 à 0,0022	
Roulement à contact oblique, 2 rangées	0,0024 à 0,0030	
Roulement à rouleaux cylindriques	0,0011 à 0,0020	2'
Roulement à galets coniques	0,0020 à 0,0035	2'
Roulement à rotule, 1 rangée de rouleaux	0,0016 à 0,0028	4°
Roulement à rotule, 2 rangées de rouleaux	0,0018 à 0,0030	0,5° *
Roulement à aiguilles avec cage	0,0015 à 0,0030	
Roulement à aiguilles jointives	0,0030 à 0,0050	
Butée à billes	0,0008 à 0,0018	
Butée à rouleaux cylindriques	0,0040 à 0,0060	
Butée à aiguilles	0,0030 à 0,0050	
Butée à rotule sur rouleaux	0,0018 à 0,0026	3°
* angle de rotulage jusqu'à 4° à charge très faible		

#### 14.6.1.2 CALCUL DÉVELOPPÉ DES PERTES

Dans un calcul plus précis, le moment résistant total  $M$  peut se décomposer en un moment résistant à vide  $M_0$  et un moment engendré par la charge  $M_F$  :

$$M = M_0 + M_F, \quad (14.8.2)$$

avec :  $M_0$  moment résistant indépendant de la charge,



## 14. Butées et paliers à roulement

$M_F$  moment résultant de la charge.

Le moment  $M_0$  dépend des pertes hydrodynamiques dans le lubrifiant, donc de sa viscosité et de la fréquence de rotation. Ce moment est prépondérant dans les roulements tournant à grande vitesse et faiblement chargés. Il peut se calculer par la formule :

$$M_0 = f_0 (60 \nu n)^{2/3} d_m^3 10^{-4}$$

$$\text{et si } \nu n < 33 \text{ alors } M_0 = 160 f_0 d_m^3 10^{-4}, \quad (14.8.3)$$

avec :  $M_0$  moment indépendant de la charge en mN,

$d_m$  diamètre moyen du roulement :  $d_m = (d + D)/2$ ,

$f_0$  facteur dépendant du type de roulement et du mode de lubrification :

pour lubrification	graisse	air-huile	bain d'huile
- rigides à billes	0,75 à 2	1	2
- à rotule sur billes	1,5 à 2	0,7 à 1,0	1,5 à 2,0
- à contact oblique, 1 rangée	2	1,7	3,3
- à rouleaux cylindriques	0,6 à 1,0	1,5 à 2,8	2,2 à 4,0
- à aiguilles	12	6	12
- à rotule sur rouleaux	3,7 à 7	1,75 à 3,5	3,5 à 7
- à rouleaux coniques	6 à 12	3 à 6	6 à 12
- butées à billes	5,5	0,8	1,5

$n$  fréquence de rotation en tours par seconde,

$\nu$  viscosité cinématique à la température de fonctionnement en  $\text{mm}^2/\text{s}$ .

Le moment de frottement  $M_F$  dépendant de la charge provient des déformations mécaniques et du glissement dans la zone de contact. Il est prépondérant dans les roulements fortement chargés tournant à faible vitesse. Il se trouve par la formule :

$$M_F = f_1 F_{P1}^a d_m^b, \quad (14.8.4)$$

avec :  $M_F$  moment dépendant de la charge en mmN,

$f_1$  facteur dépendant du type de roulement et de la charge appliquée :  
par exemple : roulements rigides à billes :  $f_1 = (0,0006..0,0009)(F_{P0}/C_0)^{0,55}$ ,

$F_{P1}$  charge de calcul :

par exemple : roulements rigides à billes :  $F_{P1} = 3 F_a - 0,1 F_r$ ,

$d_m$  diamètre moyen du roulement :  $d_m = (d + D)/2$ ,

$a, b$  exposants dépendant du type de roulement :  
pour tous les roulements :  $a = 1$  et  $b = 1$ ,  
sauf les roulements à rotules sur rouleaux.

Pour les roulements à rouleaux cylindriques chargés axialement, le moment total vaut :

$$M = M_0 + M_F + M_2, \quad (14.8.5)$$

avec :  $M_2$  moment de frottement engendré par l'appui axial.

Enfin, les roulements équipés de joints d'étanchéité engendrent des pertes supplémentaires dues au frottement des lèvres. Le moment total vaut :

$$M = M_0 + M_F + M_3, \quad (14.8.6)$$

avec :  $M_3$  moment de frottement des joints.

Les catalogues fournissent des renseignements complémentaires afin de trouver le couple total provoqué par les diverses pertes.

### 14.6.1.3 TEMPÉRATURE D'ÉQUILIBRE

La puissance mécanique perdue par les divers frottements dans le roulement est transformée principalement en puissance calorifique. La puissance perdue, à fréquence de rotation constante, vaut :

$$P_{fr} = M \omega = (M_0 + M_F + M_2 + M_3) \omega, \quad (14.8.7)$$

avec :  $\omega = 2 \pi n$  la vitesse angulaire relative constante en rad/s,

$P_{fr}$  la puissance de frottement, en W si le moment total  $M$  est en m·N.

La puissance calorifique évacuée par le carter peut s'exprimer par la relation générale, soit :

$$\dot{Q} = - \alpha A (\vartheta_{ca} - \vartheta_a).$$

À la température d'équilibre, les puissances sont égales, donc :

$$M \omega = \alpha A (\vartheta_{ca} - \vartheta_a).$$

Comme la production de chaleur est concentrée principalement dans la zone des chemins de roulement, la température maximale se situe à ce niveau et le gradient de température résultant modifie le jeu à froid du roulement. La partie intérieure du roulement devient plus chaude que la partie extérieure, le flux de chaleur passant de l'arbre vers le logement.

### 14.6.2 FRÉQUENCES DE ROTATION

La fréquence de rotation limite d'un roulement dépend de la température admissible en fonctionnement et cette dernière dépend de la chaleur produite dans le roulement par les pertes y compris l'application extérieure de chaleur et de la quantité de chaleur évacuée hors du roulement. Le type de roulement et ses dimensions, la conception interne, la charge appliquée, les conditions de lubrification et de refroidissement, le type de cage et le jeu interne interviennent dans la détermination de la fréquence limite de rotation.

Les tableaux de roulements mentionnent la fréquence de rotation de base, exprimée en tours par minute, pour la lubrification à la graisse et à l'huile. Cette fréquence correspond à l'équilibre thermique pour une durée de vie de  $L_{10h} = 150\,000$  heures. Cette fréquence est applicable aux roulements avec bague intérieure tournante et une réduction doit intervenir en cas de bague extérieure tournante.

Lorsqu'un très grand roulement ( $d_m > 100$  mm) supporte de fortes charges et lorsque la durée de vie est  $L_{10h} < 75\,000$  heures, il convient de corriger la fréquence de rotation de base au moyen d'un facteur de correction inférieur à 1,0.

Il est possible de prévoir une fréquence de rotation supérieure à celle indiquée dans les catalogues si la lubrification met en œuvre une faible quantité de lubrifiant, dosée avec précision, comme par exemple un mélange air - huile. Toute augmentation de la fréquence de base sans précaution particulière provoque une élévation excessive de température et une diminution de la durée de vie, de la viscosité du lubrifiant et très souvent du jeu interne du roulement par dilatation thermique. Un jeu interne plus grand (C3) que normal est alors requis et une étude plus poussée du flux calorifique est recommandée.

### 14.6.3 ÉTUDE DES MONTAGES

Le centrage d'un arbre dans des paliers à roulements consiste à concrétiser l'appui d'une pièce tournante dans un système statiquement déterminé. La solution classique comporte un appui "fixe articulé", pouvant supporter une charge combinée radiale - axiale, et un appui "sur

rouleaux" pour charge radiale seule. Ces deux appuis sont à concevoir au moyen de roulements appropriés compte tenu des types à disposition. La figure 14.36 montre trois exemples de réalisation au moyen de roulements rigides à billes. Dans la première solution, le palier fixe est constitué par un roulement tenu axialement sur l'arbre et dans le logement, supportant seul la charge axiale, dans la seconde par des appuis axiaux de part et d'autre des roulements, la charge axiale étant dirigée vers les logements par appui frontal (solution à éviter car elle nécessite une précharge inutile et ne supporte aucun défaut de montage ou très mal les dilatations), dans la troisième par un appui fixe d'un côté, par un appui élastique de l'autre.

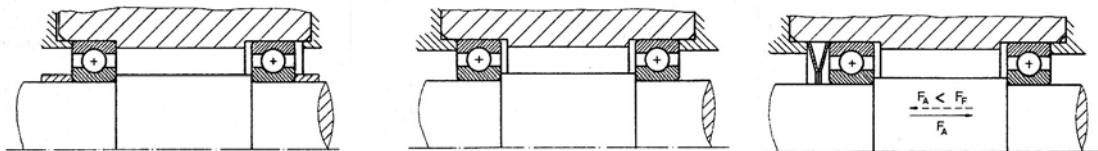


Figure 14.36 Exemple de réalisation d'appuis au moyen de paliers à roulements

L'appui "sur rouleaux" est généralement un roulement avec une bague intérieure fixe sur l'arbre, une bague extérieure coulissante dans le logement. Dans la troisième variante, la position de l'arbre est univoque tant que la force axiale reste plus petite que la force de précharge. Une précharge peut être nécessaire dans les montages en opposition de roulements à contact oblique. Pour obtenir une transmission correcte des efforts de l'arbre vers le logement ou vice versa, les bagues ou les rondelles doivent être supportées sur toute leur surface d'appui. Les bagues doivent être maintenues dans le sens radial, tangentiel et éventuellement axial. C'est l'ajustement qui fixe les bagues dans les deux premiers cas; ce sont des épaulements ou des écrous dans le sens axial dans le dernier cas.

#### 14.6.3.1 FIXATION RADIALE DES ROULEMENTS

Une fixation radiale satisfaisante et un support complet de la charge s'obtiennent par un serrage approprié des bagues. Le choix de l'ajustement et des champs de tolérance pour l'arbre et le logement s'effectue en considérant les directives générales suivantes.

##### 1. Conditions de rotation

Il existe trois cas de mouvement relatif entre la bague et la direction de la charge : charge tournante lorsque la charge se déplace sur toute la périphérie du chemin de roulement de la bague, charge fixe lorsque la ligne d'action de la charge passe constamment par le même point du chemin de roulement et finalement à direction indéterminée dans les autres cas. En charge tournante, la bague doit être montée avec un ajustement serré, le degré de serrage dépendant des conditions de fonctionnement. En charge fixe, un ajustement serré n'est pas indispensable. En charge indéterminée, les deux bagues doivent être montées avec serrage.

##### 2. Intensité de la charge

L'ajustement doit être choisi en fonction de l'intensité de la charge : plus la charge est élevée, plus l'ajustement sera serré.

##### 3. Jeu interne du roulement

Le jeu interne d'un roulement devrait être à peu près nul en fonctionnement ce qui est relativement difficile à atteindre compte tenu des divers écarts existants pour le jeu interne du roulement, des tolérances des bagues, de l'arbre et du logement, des dilations thermiques et mécaniques.

#### 4. Régime des températures

La production d'énergie calorifique s'effectuant au niveau des chemins de roulement, la température des bagues peut être supérieure à celle de l'arbre et du logement. Le serrage peut se trouver réduit pour la bague intérieure et augmenté pour la bague extérieure.

#### 5. Précision désirée

Les portées sur l'arbre et dans le logement doivent être usinées dans des tolérances dimensionnelles étroites correspondant au moins à IT5 pour l'arbre, à IT6 pour le logement. Les erreurs de cylindricité ou de battement total radial sur l'arbre et dans le logement doivent être inférieures à 0,5 IT5 pour le montage des roulements d'exécution normale. La rugosité recommandée des surfaces est : diamètres jusqu'à 80 mm  $\Rightarrow$  au moins N6 et N7, diamètres > 80 mm  $\Rightarrow$  au moins N7.

#### 6. Conception et montage

La cylindricité des bagues doit être conservée après montage en particulier toute discontinuité dans les surfaces portantes est à proscrire (logement en deux pièces). Le serrage sera augmenté pour les logements à paroi mince, en alliage léger ou sur un arbre creux. Les ajustements libres sont intéressants dans les opérations de montage simplifiées. Si les conditions d'utilisation imposent le serrage, utiliser de préférence des roulements séparables ou à alésage conique avec manchon.

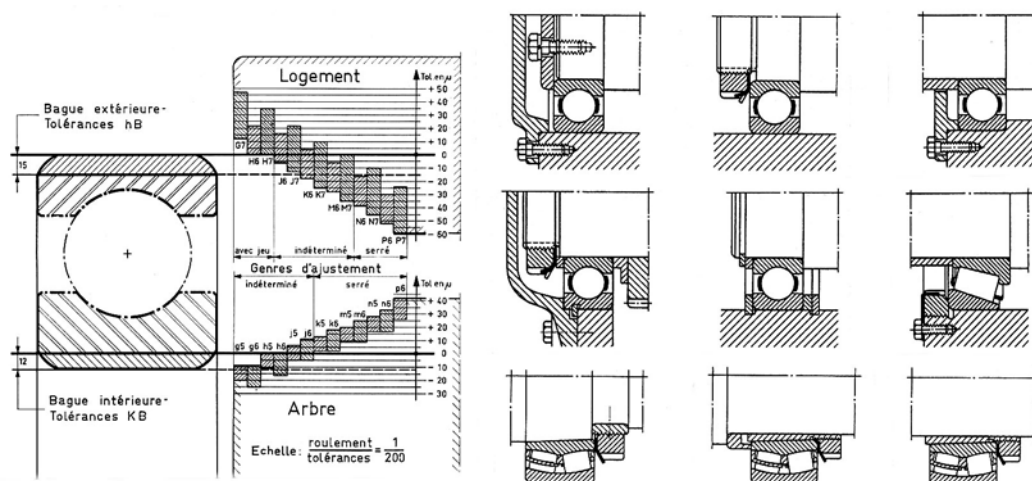


Figure 14.37 Ajustements obtenus dans le montage d'un roulement rigide à billes 6310 (SRO)  
Quelques conceptions de fixation axiale des roulements (SKF)

#### 7. Ajustements recommandés

Les catalogues de fabricants comprennent des tableaux détaillés sur le choix des ajustements à adopter entre la bague intérieure et l'arbre, entre la bague extérieure et le logement en fonction du type de charge, de l'intensité de la charge équivalente, du type de roulement et des dimensions diamétrales.

Par suite des ajustements, le jeu radial d'un roulement monté est modifié par le gonflement de la bague intérieure  $\Delta d_i$  et la contraction de la bague extérieure  $\Delta d_e$ . La différence de température influence également le jeu radial. Les relations proposées permettent de trouver, dans une première approche, la modification du jeu diamétral.

*Gonflement de la bague intérieure* : la diminution du jeu radial dans le cas du montage de la bague sur un arbre plein peut se trouver par :

$$\Delta d_i = s_1 \cdot d/d_i,$$

## 14. Butées et paliers à roulement

avec :  $s_i$  serrage effectif entre l'arbre et la bague intérieure,  
 $d$  diamètre nominal de l'alésage de la bague intérieure,  
 $d_i$  diamètre nominal du chemin de roulement de la bague intérieure.

*Contraction de la bague extérieure* : la diminution du jeu radial dans le cas du montage de la bague dans un logement épais en acier se trouve par :

$$\Delta d_e = s_e D_e / D,$$

avec :  $s_e$  serrage effectif entre la bague extérieure et l'alésage du logement,  
 $D_e$  diamètre nominal du chemin de roulement de la bague extérieure,  
 $D$  diamètre nominal de la bague extérieure.

*Effet de la différence de température* : la différence de température entre les deux bagues provoque une modification du jeu dans le roulement. Pour un coefficient de dilatation de l'acier  $\alpha = 0,000012$ , la modification du jeu radial  $\Delta d_T$  peut se trouver par :

$$\Delta d_T = \alpha d \Delta T,$$

avec :  $\Delta T$  différence de température entre les bagues intérieure et extérieure.

*Modification totale du jeu interne* : il est difficile de calculer avec précision la diminution du jeu radial compte tenu de tous les écarts dimensionnels et de la température. Généralement, le calcul s'effectue au milieu des champs de tolérance ou éventuellement en diminuant de  $1/3$  l'écart des tolérances du côté opposé au rebut des pièces à emmancher. Le lissage des surfaces engendrent une perte de serrage estimée à 20%. La diminution totale du jeu radial  $\Delta j_r$  est alors donnée par :

$$\Delta j_r = 0,8 (\Delta d_i + \Delta d_e) + \alpha d \Delta T.$$

Attention aux signes des déplacements et aux caractéristiques des matériaux !

### 14.6.3.2 FIXATION AXIALE DES ROULEMENTS

L'ajustement serré est en général insuffisant pour immobiliser une bague de roulement sur l'arbre ou dans le logement. Il est nécessaire d'introduire un blocage approprié. Dans un palier fixe, les deux bagues doivent être maintenues axialement sur chacune de leurs faces. Dans le palier libre avec roulement non séparable, seule la bague montée avec serrage, en principe la bague intérieure, sera retenue axialement sur sa portée. Dans un montage en opposition, chaque roulement sera fixé dans un seul sens.

Les bagues montées avec ajustement serré prennent appui d'un côté contre un épaulement de l'arbre ou du logement. De l'autre côté, le maintien de la bague intérieure est assuré très souvent par un écrou de serrage avec rondelle - frein. Les bagues extérieures sont maintenues par le couvercle du logement. L'utilisation d'entretoises facilite la fabrication des pièces et le montage des roulements, la figure 14.37 à droite montrant quelques conceptions de fixation axiale des roulements.

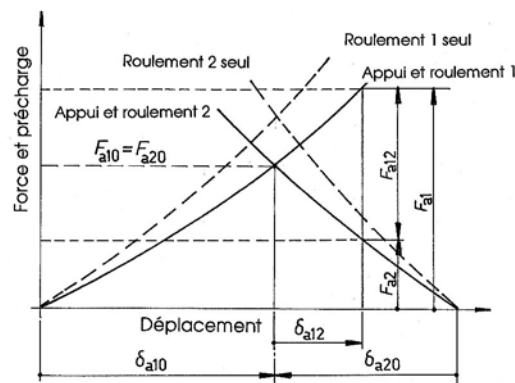
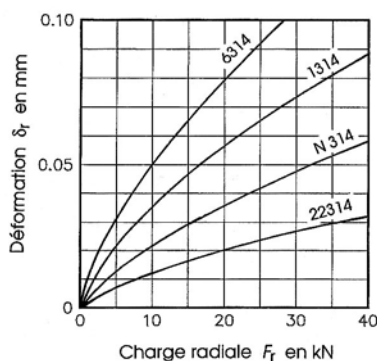
### 14.6.4 RIGIDITÉ DES ROULEMENTS

Les écarts par rapport à l'axe de rotation théorique d'un arbre proviennent essentiellement de la déformation des diverses pièces : arbre, paliers à roulement et carter. Les déplacements des appuis sous charge peuvent être relativement importants et doivent se trouver lorsque la précision exigée est élevée. La déformation de l'arbre se trouve par les méthodes proposées précédemment et celle des roulements en introduisant la notion de rigidité. Les déformations radiales ou axiales pures dans les roulements peuvent se calculer par les relations proposées dans le tableau ci-après.

Tableau 14.8

**Déformation élastique des roulements sous charge radiale ou axiale**

Type de roulement	Cas de Charge $\delta_a = 0$	Cas de charge $\delta_a = 0$
Roulement rigides à billes	$\delta_r = 0,002 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$	$\longleftrightarrow$
Roulement à rotule sur billes	$\delta_r = \frac{0,0032}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$	$\longleftrightarrow$
Roulements à billes à contact oblique	$\delta_r = \frac{0,002}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$	$\delta_a = \frac{0,002}{\sin \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$
Roulements à rouleaux avec contact linéique Sur les deux chemins de roulement	$\delta_r = \frac{0,0006}{\cos \alpha} \cdot \frac{Q^{0,9}}{l_u^{0,8}}$	$\delta_a = \frac{0,0006}{\sin \alpha} \cdot \frac{Q^{0,9}}{l_u^{0,8}}$
Butées à billes	$\longleftrightarrow$	$\delta_a = \frac{0,0024}{\sin \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$
Charges sur l'élément roulant ( $F_r$ , $F_a$ en N) ( $Q$ est exprimé en daN : 1 daN = 10 N)	$Q = \frac{0,5 F_r}{i z \cos \alpha}$	$Q = \frac{0,1 F_a}{i z \sin \alpha}$
Symboles et unités utilisés dans les formules de la déformation :		
$\delta_r$ déplacement radial en mm,	$\delta_a$ déplacement axial en mm,	
$F_r$ charge radiale en N,	$F_a$ force axiale en N,	
$D_w$ diamètre de l'élément roulant en mm,	$l_u$ longueur effective du rouleau en mm,	
$z$ nombre d'éléments roulants par rangée,	$i$ nombre de rangées d'éléments,	
$Q$ charge maximale sur l'élément roulant,	$\alpha$ angle de contact	


 Figure 14.38 Déformation radiale sous une charge radiale pour divers roulements avec  $d = 70$  mm  
Triangle de précontrainte et comportement sous l'effet d'une charge axiale

Dans les roulements rigides à billes, l'angle de contact nominal est égal à  $0^\circ$  et un déplacement axial important se produit sous l'action d'une charge axiale. Tout jeu dans le roulement rend ce déplacement non négligeable. Le déplacement radial ou axial est une

fonction exponentielle de la charge; pour les roulements à billes, il est proportionnel à la puissance  $^{2/3}$  de la charge. La raideur n'est donc pas une constante et la rigidité se définit comme le rapport de la force agissant sur le roulement à la déformation qui en résulte.

La raideur des roulements à rouleaux est plus grande que celle des roulements à billes. La figure ci-dessous montre la déformation radiale pour divers types de roulement montés sur un diamètre de 70 mm, le roulement rigide à billes 6314 ayant la plus forte déformation, le roulement à rotule sur rouleaux 22 314 ayant la déformation la plus faible.

#### 14.6.5 PRÉCHARGE

Dans la plupart des cas, les roulements sont montés avec un jeu interne allant de zéro à quelques millièmes de millimètre. Cependant, il existe diverses applications nécessitant un serrage initial afin d'augmenter la rigidité et l'exactitude de rotation. Les roulements à contact oblique, montés en X ou en O, utilisent toujours une précharge axiale qui induit une précharge radiale. Les effets de la précharge sur le comportement de l'ensemble sont :

- une augmentation de la rigidité,
- une diminution du niveau sonore en fonctionnement,
- un guidage plus précis de l'arbre,
- une compensation de l'usure et des processus de tassement,
- une augmentation de la durée de vie.

La précharge peut s'exprimer normalement par une force ou indirectement par une distance. Les valeurs de la précharge à adopter peuvent se trouver empiriquement à partir de montages éprouvés. Pour de nouvelles implantations, il faut déterminer avec beaucoup de soin cette précharge et tester les réglages par des essais. La fiabilité du calcul dépend des hypothèses introduites et de la qualité du modèle. Les conditions idéales sont atteintes lorsque la charge radiale se répartit sur la moitié des chemins de roulement, compte tenu des charges appliquées en service et de la température de fonctionnement.

Le principe du calcul de la précharge à prévoir et de la charge résiduelle en service obéit aux règles de tous les éléments préchargés comme par exemple les assemblages à vis. Le triangle de précontrainte peut faciliter la compréhension. La figure 14.38 à droite montre le principe de la construction. Les déformations axiales sont portées en abscisse et les forces correspondantes en ordonnées. Les relations du tableau 14.8 permettent de trouver le comportement du roulement sous l'effet de la charge axiale, cette valeur devant être corrigée par la déformation des pièces adjacentes. Le point d'intersection des deux caractéristiques des roulements représente l'équilibre au montage; les forces et déplacements en marche sont :

- |  |  |
|--|--|
| - force axiale dans le roulement 1 au montage :    | $F_{a10}$ ,                            |
| - force axiale dans le roulement 2 au montage :    | $F_{a20}$ , avec $F_{a10} = F_{a20}$ , |
| - charge axiale extérieure en service :            | $F_{a12}$ ,                            |
| - équilibre sous l'effet de la charge extérieure : | $F_{a1} = F_{a2} + F_{a12}$ ,          |
| - distance de précharge au montage :               | $\delta_{a10} + \delta_{a20}$ ,        |
| - déplacement sous la charge extérieure :          | $\delta_{a12}$ .                       |

Le graphique montre le déplacement sous charge axiale et la force axiale résiduelle dans le roulement 2. Cette force doit assurer une répartition correcte de la composante radiale sur un angle de 180° dans les chemins de roulement. L'effort axial produit dans le roulement en fonction de la charge radiale se trouve par :

- roulements à billes à contact oblique,  $\alpha = 40^\circ$  :  $F_a = 1,14 F_r$ ,
- roulement à rouleaux coniques :  $F_a = 0,5 F_r/Y$ .

Le réglage de la précharge axiale s'effectue en déplaçant axialement l'une des bagues par rapport à l'autre d'une distance correspondant à la précharge désirée. Ce réglage peut avoir lieu par ajustement de la distance de précharge, par mesure directe du couple de frottement ou par mesure de l'effort. La façon la plus simple d'obtenir une précharge radiale dans les roulements de type radial est d'utiliser des roulements avec alésage conique.

#### 14.6.6 LUBRIFICATION

La lubrification des roulements radiaux et des butées a pour but de prolonger la durée de vie en évitant le frottement de glissement entre les éléments mobiles, l'introduction de corps étrangers, d'eau et de vapeur d'eau, la formation de rouille. Elle produit de plus un amortissement partiel entre les éléments roulants et les chemins de roulement. Le choix du lubrifiant s'effectue en fonction de la température, de la fréquence de rotation et de la simplicité de la maintenance. Dans les roulements, l'épaisseur du film lubrifiant est de l'ordre de 0,1 à 0,3  $\mu\text{m}$  et le comportement tribologique dépend essentiellement du paramètre de film  $\Lambda$  défini par :

$$\Lambda = h/\sigma,$$

et : 
$$\sigma = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{0,5},$$

avec :  $h$  la distance entre les lignes moyennes des deux surfaces,  
soit l'épaisseur moyenne du film lubrifiant,

$\sigma$  l'écart standard entre les deux surfaces rugueuses si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  représentent  $R_q$  la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts de profil (RMS) de chacune des surfaces.

Si  $\Lambda > 3$ , alors le film lubrifiant est pleinement présent et le contact entre les deux surfaces est probablement inexistant.

##### 14.6.6.1 LUBRIFICATION À LA GRAISSE

La graisse est la plus couramment employée car elle contribue à l'obturation du palier en le protégeant contre la pénétration de corps étrangers et en évitant les fuites. Le garnissage initial représente environ 30 à 50% du volume à disposition. Les intervalles de graissage dépendent du type de roulement, de la fréquence de rotation, de la température d'utilisation et de la qualité de la graisse. Les fabricants de roulements donnent ces intervalles sous forme de tables ou de graphiques, comme sur la figure 14.39. Les valeurs proposées sont applicables aux paliers dans lesquels la température de la bague extérieure ne dépasse pas 70°C. Les graisses recommandées sont généralement des produits non miscibles à l'eau, à base de savon de lithium. La vitesse de fonctionnement admissible pour une graisse est influencée par la résistance au cisaillement de l'agent épaississant. Les graisses utilisées ont une consistance 1, 2 ou 3 selon NLGI.

La quantité de graisse à introduire dans un palier à chaque appoint peut se donner par la formule pratique :

$$m_g = 0,005 B D,$$

la masse  $m_g$  étant exprimée en grammes, les dimensions  $B$  et  $D$  en mm. Le remplacement de la graisse est facilité par un corps de palier équipé de couvercles facilement démontables ou par un graisseur, la graisse étant injectée à l'aide d'une pompe. L'alimentation en graisse neuve doit se trouver près des surfaces à lubrifier; la graisse usagée doit pouvoir s'évacuer hors du roulement. Avec la soupape à graisse, le bourrage du roulement est évité et les appoints peuvent s'effectuer aussi pendant la marche de la machine.



## 14. Butées et paliers à roulement

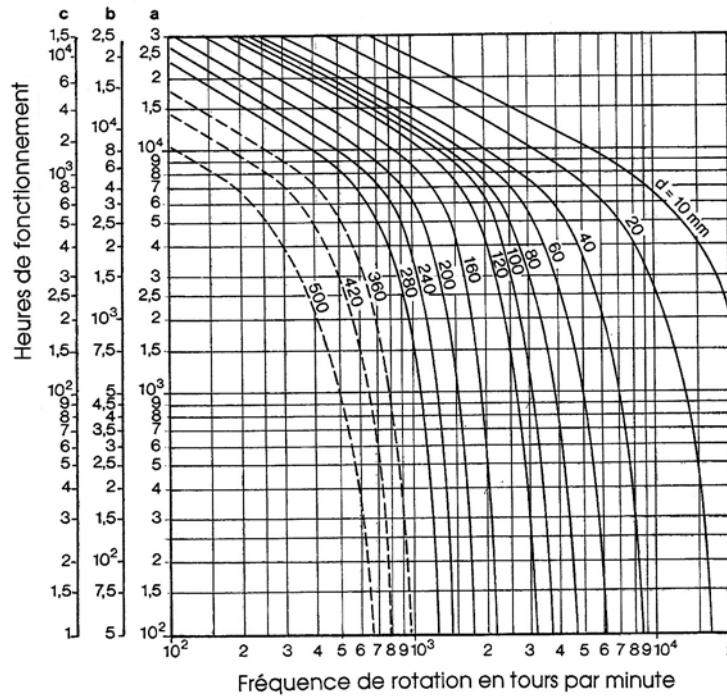


Figure 14.39 Lubrification des roulements (selon SKF)

**a** roulement à billes radiaux, **b** roulements à rouleaux cylindriques  
**c** roulements à rotules sur rouleaux, à rouleaux coniques, butées à rouleaux et aiguilles

### 14.6.6.2 LUBRIFICATION À L'HUILE

La lubrification à l'huile est employée lorsque la fréquence de rotation ou la température sont trop élevées pour admettre la graisse avec une sécurité suffisante. Elle s'impose dans les mécanismes munis d'un bain d'huile comme dans les réducteurs de vitesse à engrenages. L'huile impose des dispositifs d'étanchéité plus efficaces pour éviter toute perte de liquide. La lubrification à l'huile peut s'effectuer par les diverses possibilités comme mentionnées au chapitre 2. La lubrification des roulements utilise presque toujours des huiles minérales pures, sans additifs particuliers. La caractéristique principale exigée est la viscosité à la température de service du palier. La viscosité nominale à prévoir en fonction de la dimension moyenne et de la fréquence de rotation est donnée sur la figure 14.16. Le choix de l'huile doit tenir compte : de la durée de vie, des intervalles de renouvellement, de la température probable du palier. Pour un bain d'huile à température inférieure ou égale à 50°C et s'il n'y a pas de risque de pollution, le renouvellement s'effectue environ une fois par an, pour des températures supérieures, tous les deux ou trois mois.

### 14.6.7 ÉTANCHÉITÉS

Pour tous les types de roulements radiaux et butées, la sécurité et la durée de vie dépendent en grande partie de l'étanchéité, tant pour éviter la pénétration de corps étrangers et l'humidité que pour éviter la sortie du lubrifiant. Les nouvelles méthodes de calcul mettent en évidence ce facteur fondamental tenant compte de la pollution. Le choix du dispositif d'étanchéité fait intervenir les facteurs suivants : nature du lubrifiant : huile ou graisse, vitesse circonférentielle, défauts d'alignement, espace disponible, coûts admissibles.

#### 14.6.7.1 ÉTANCHÉITÉ SANS FROTTEMENT

L'étanchéité sans frottement est constituée par un passage étroit radial et/ou axial. Elle est prévue pour des vitesses circonférentielles élevées, en présence de hautes températures et dans une ambiance sèche ou peu poussiéreuse. L'étanchéité à faible passage est efficace avec la lubrification à la graisse. Le jeu dans le passage doit être compris entre 0,1 et 0,2 mm, la longueur de la fente devant être aussi grande que possible. Les dispositifs à chicanes sont plus compliqués, mais aussi plus efficaces. Les chicanes sont disposées axialement dans les paliers en une pièce, radialement dans les paliers à deux pièces.

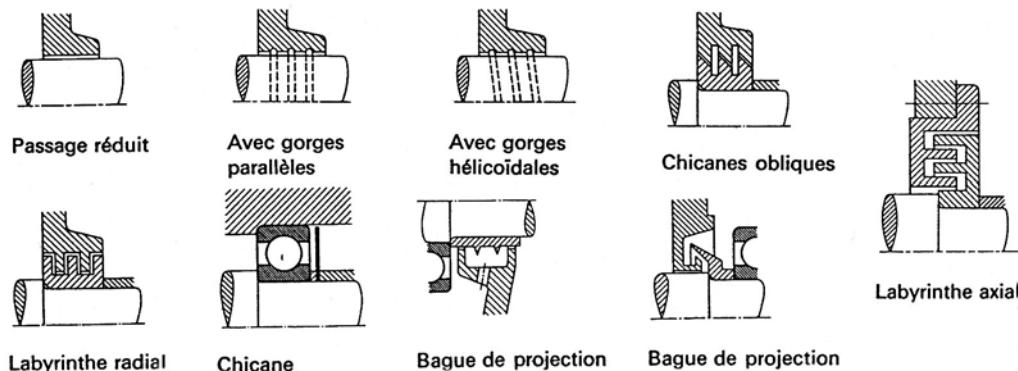


Figure 14.40 Dispositifs d'étanchéité sans frottement

#### 14.6.7.2 ÉTANCHÉITÉ AVEC FROTTEMENT

L'étanchéité est assurée par un élément monté préchargé sur la portée. Le choix du type de joint et de la qualité dépend de la vitesse circonférentielle. Le frottement est habituellement important au début, mais diminue rapidement pendant la période de rodage.

En présence d'une atmosphère très sale, l'étanchéité à joint frottant est une obligation. Il est nécessaire de lubrifier la portée du joint afin d'éviter une usure rapide. De plus, la portée du joint doit être exempte de stries,  $R_a = 0,2$  à  $0,8 \mu\text{m}$ .

Les étanchéités par feutre représentent une solution simple surtout dans le cas de lubrification à la graisse. Les rondelles de feutre et les rainures sont normalisées; toutefois, la vitesse de glissement est limitée à 4 m/s et la température à 100°C. L'efficacité de ce joint peut s'améliorer en prévoyant une chicane complémentaire.

Les joints à lèvre, de formes variées, sont les plus utilisés pour l'étanchéité des roulements, surtout dans le cas de lubrification à l'huile. La lèvre du joint, à surface de contact réduite, est serrée sur l'arbre tournant. Il en résulte un frottement et il est donc nécessaire d'avoir un lubrifiant au niveau de la lèvre. Pour les vitesses de glissement comprises entre 4 et 8 m/s, la surface d'appui doit être rectifiée; au-delà de 8 m/s, elle doit être durcie et finement polie ou rectifiée. La disposition de la lèvre d'étanchéité est :

- vers l'intérieur s'il faut empêcher le lubrifiant de sortir,
- vers l'extérieur s'il s'agit de retenir les corps étrangers et les souillures.

Les rondelles élastiques constituent un dispositif d'étanchéité simple, économique et peu encombrant; elles sont utilisées surtout avec les roulements rigides à billes. Elles sont montées directement contre la face de la bague extérieure ou de la bague intérieure et s'appliquent axialement contre la face de l'autre bague.

## 14. Butées et paliers à roulement

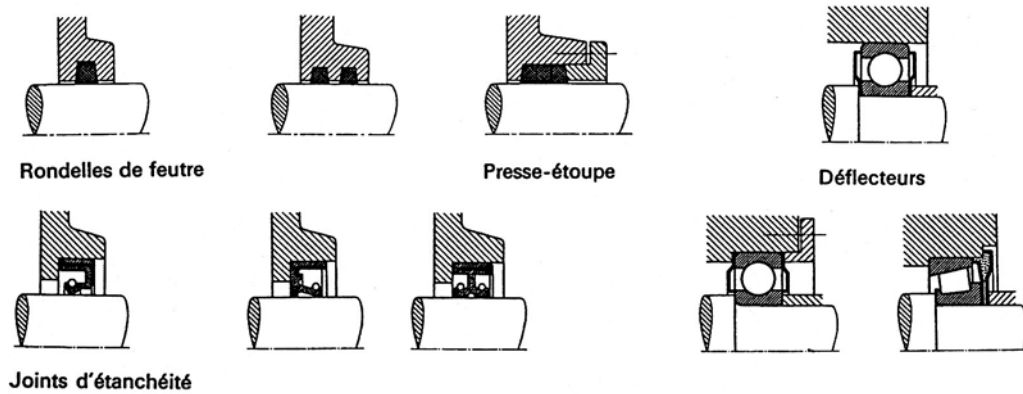


Figure 14.41 Étanchéités à frottement ou avec joints

### 14.6.7.3 AUTRES ÉTANCHÉITÉS

L'étanchéité mixte est introduite lorsqu'il est nécessaire d'obtenir une étanchéité particulièrement efficace dans des conditions de fonctionnement difficiles. L'étanchéité sans frottement est placée de manière à protéger l'étanchéité à frottement contre une usure prématurée.

Les extrémités des portées de joints frottant doivent être chanfreinées pour éviter toute détérioration de la lèvre pendant l'opération de montage. Il est conseillé d'utiliser une bague de montage en présence d'arêtes vives sur la portée. Avant montage, les bagues d'étanchéité et leurs portées sont à lubrifier soigneusement, afin d'éviter un frottement à sec. Lorsque plusieurs bagues sont montées l'une derrière l'autre ou lorsque le joint à double lèvre est utilisé, les espaces entre les lèvres sont à remplir de lubrifiant.

### 14.6.8 CONCEPTION DES CHEMINS DE ROULEMENT

Lorsque l'arbre et/ou le logement servent de chemins de roulement et que les éléments roulants sont tenus dans une cage à rouleaux ou à aiguilles, certaines prescriptions doivent être suivies par l'utilisateur de ce type de conception.

#### 14.6.8.1 MATÉRIAUX POUR LES CHEMINS DE ROULEMENT

Les aciers à utiliser doivent pouvoir atteindre une dureté superficielle comprise entre 58 et 64 HRC, une profondeur de dureté suffisante et un degré de pureté d'un acier fin.

Exemple :   acier à roulement :                   100 Cr 6       trempant à coeur,  
                  aciers de cémentation :           15 CrNi 6 ou 16 MnCr 5,  
                  aciers pour trempé superficielle à la flamme ou par induction.

Pour les chemins de roulement cémentés - trempés, trempés à la flamme ou par induction, la profondeur de trempé dépend du diamètre de l'élément roulant. Elle est donnée par la formule pratique :

$$\text{Profondeur de trempé} \geq 0,08 D_w,$$

avec :  $D_w$  le diamètre de l'élément roulant.

Après rectification, la profondeur de trempé minimale ne devrait pas être inférieure à 0,3 mm.

#### 14.6.8.2 EXÉCUTION DES CHEMINS DE ROULEMENT

L'état de surface des chemins de roulement doit répondre aux conditions imposées par les éléments roulants. Pour transmettre la pleine capacité de charge, une rugosité de la classe N4 ( $Ra \leq 0,2 \mu m$ ) est nécessaire. Pour un service silencieux, les chemins de roulement doivent être exempts d'ondulations.

Les tolérances de fabrication pour les arbres et/ou les logements sont précisés dans les recommandations des catalogues. La largeur effective des chemins de roulement, compte tenu des chanfreins et des rayons, doit être suffisante pour assurer un guidage radiale de la cage des éléments roulants.

Les défauts de circularité et de cylindricité ne doivent pas dépasser 25% pour les roulements à aiguilles et 50% pour les roulements à rouleaux la tolérance réelle sur le diamètre du chemin de roulement. Pour les paliers de haute précision, les portées des logements imposent des champs de tolérances plus serrés dans les qualités IT5 et IT6, IT3 pour les défauts de forme.

#### 14.6.9 AUTRES TYPES DE ROULEMENTS

Les catalogues généraux des fabricants de roulements comportent la gamme standard comprenant les roulements pour lesquels il existe un besoin permanent, les diamètres d'arbre s'échelonnant entre 10 mm et 200 mm, certains modèles dépassant ces limites. L'utilisateur de roulements est intéressé par le modèle le plus approprié pour son application à un prix aussi réduit que possible. Par contre, le fabricant doit toujours rechercher un compromis permettant d'harmoniser des impératifs contradictoires de programme étendu et de prix compétitif. Par exemple, le roulement à billes 6206 comprendrait 20250 variantes en comptant toutes les variantes de précision, de jeu radial, de type de cage et de joints ! À l'extérieur du programme usuel de fabrication, il existe toute une gamme de roulements spéciaux de catalogue ou exécutés sur commande comme par exemple une série de roulements de précision ou une gamme de roulements à section mince : rigides à billes, à billes à contact oblique, à quatre points de contact, à rouleaux croisés, etc. Citons quelques exécutions particulières se trouvant dans les catalogues ou fabriqués dans des conceptions uniques.

##### 4.4.6.9.1 ROULEMENTS MINIATURES

La normalisation des roulements commence généralement au diamètre d'arbre 10 mm et tout roulement pour un diamètre d'arbre inférieur à cette grandeur peut être considéré comme un roulement miniature. Cette famille d'éléments comprend des roulements à billes pour des diamètres d'arbre à partir de 1 mm en exécution normale et ultra légère, des roulements à billes à collerette, des roulements à billes à contact oblique, des roulements à rouleaux cylindriques, des butées à billes à simple effet, des roulements obliques à partir d'un diamètre extérieur  $D = 1,1 \text{ mm}$  (RMB).

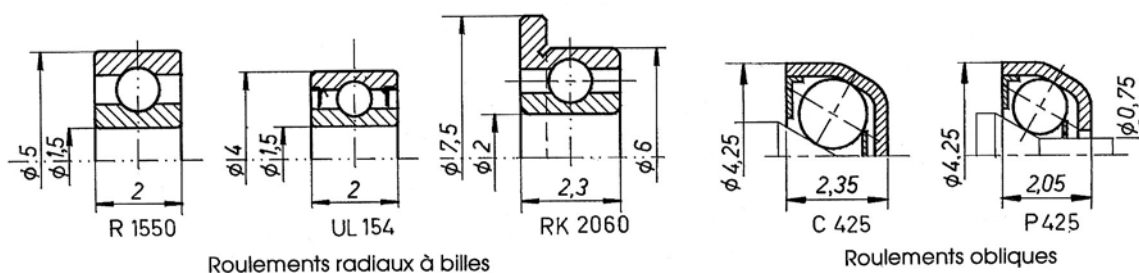


Figure 14.42 Roulements miniatures selon catalogue RMB (Roulements Miniatures SA, Bienne)

Tous ces roulements sont fabriqués dans diverses précisions et matériaux conformément aux normes ISO.

### 14.6.9.2 COURONNES D'ORIENTATION

Les couronnes d'orientation sont des roulements de grandes dimensions destinés surtout à permettre des mouvements d'oscillation. Il sont constitués principalement d'une bague intérieure et d'une bague extérieure, l'une des deux comportant généralement une denture. Les éléments roulants, billes ou rouleaux, sont séparés par des intercalaires et sont placés sur les chemins de roulement de telle manière qu'ils sont capables de transmettre des efforts de toute direction. Les bagues sont équipées de trous de fixation et des joints à lèvres protègent efficacement la couronne des souillures extérieures tout en retenant le lubrifiant. Selon les modèles, les diamètres intérieurs sont compris entre moins de 200 mm jusqu'à plus de 5 mètres.

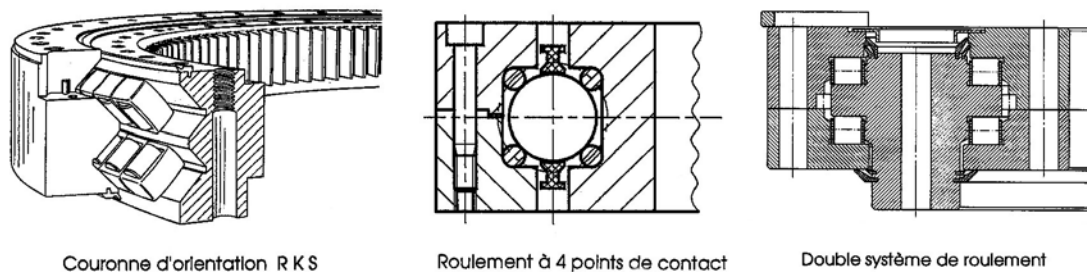


Figure 14.43 Couronnes d'orientation : à deux rangées de rouleaux placées en équerre.  
A billes à quatre points de contact, à quatre rangées de rouleaux cylindriques

### 14.6.9.3 ROULEMENTS EN ACIER INOXYDABLES OU AUTRES MATIÈRES

Certains types de roulements à billes et à rouleaux existent en acier inoxydable afin d'assurer une résistance accrue aux conditions ambiantes. La dureté et la capacité de charge sont inférieures à celles des éléments fabriqués en acier 100 Cr 6. Dans le cas de présence de lessives ou de fluides agressifs, l'utilisation de roulements à billes en matière plastique s'impose malgré des performances beaucoup plus modestes que celles des roulements en acier. Les bagues intérieure et extérieure sont en polyacétate, la cage en polyamide 6.6 et les billes en verre (Deutsche STAR GmbH, Schweinfurt). Ce fabricant offre des roulements pour des diamètres d'arbre compris entre 6 et 30 mm. La température de fonctionnement influence fortement la portance et le coefficient de frottement équivalent est compris entre 0,003 et 0,009 suivant la charge et la fréquence de rotation.



## CHAPITRE 15

# GUIDAGES LINÉAIRES À ROULEMENTS

Les éléments de guidage linéaire se sont imposés progressivement dans la conception de machines grâce à leurs propriétés particulières comme le faible frottement au démarrage et en marche, à l'absence de broutage à partir du repos ou à très faible vitesse, à leur simplicité d'emploi et à leur disponibilité de catalogue. Un guidage linéaire doit remplir les conditions techniques suivantes :

- déplacement aisé sans broutage, aussi à très faible vitesse,
- précision conservée pendant toute la durée de vie de la machine,
- rigidité et absence de jeu par possibilité de précharge,
- capacité de charge importante,
- compétitivité grâce à l'interchangeabilité d'éléments de catalogue ainsi que des coûts d'exploitation et d'entretien restreints.

La description et les méthodes de contrôle seront introduites pour les deux familles de guidages linéaires :

1. Guidages linéaires à rails avec cages à éléments roulants,
2. Guidages linéaires à recirculation des éléments roulants.

Plusieurs fabricants de guidages linéaires offrent également des tables sur roulements à commande manuelle ou motorisée par vis micrométriques et vis à billes en mouvements simple ou croisés.

## 15.1 GUIDAGES LINÉAIRES AVEC CAGES À ÉLÉMENTS

Ces guidages linéaires sont constitués principalement de deux ou trois rails profilés, d'une ou de deux cages à billes ou à rouleaux, d'éléments roulants billes ou rouleaux et de dispositifs d'étanchéité et de plaques terminales. Le coefficient de frottement équivalent se situe environ entre 0,0005 et 0,003. La charge applicable dépend de la forme des éléments roulants, donc du genre de contact : linéique ou ponctuel, du nombre d'éléments placés dans les cages et de la précharge réglée au montage. La course de guidage est limitée et dépend principalement de la distance entre le premier et le dernier élément roulant guidés dans la cage, de la longueur des rails. La description ci-après comprend la liste partielle des produits fabriqués par la maison W. Schneeberger AG, à Roggwil (BE).

### 15.1.1 DESCRIPTION DES RAILS DE GUIDAGES SCHNEEBERGER

#### 1. Rail de guidage, types R et RNG

Le guidage est constitué de deux rails R pouvant être équipés de cages à billes ou à rouleaux et s'introduit pour des exigences moyennes à élevées. Le rail du type RNG possède une nouvelle forme qui se traduit par une meilleure précision, une capacité de charge plus élevée, une rigidité accrue et une plus grande durée de vie, voir figure 15.1.

#### 2. Rail de guidage, type RD

Le rail de guidage RD complète la gamme des rails de type R pour des solutions à très faible encombrement. La combinaison d'un rail RD avec deux rails R et de deux cages à

éléments roulants se traduit par un concept de guidage particulièrement économique à fabriquer. Il permet de réaliser des guidages doubles à course illimitée, voir figure 15.1.

### 3. Rails de guidage, types W/Z

Les rails de guidage W/Z sont prévus comme complément aux rails de guidage R pour concevoir des guidages en appui libre, dits également "sur rouleaux". Suivant la charge appliquée, il peuvent être équipés de cages à rouleaux  $\Rightarrow$  rails W et Z, ou à billes  $\Rightarrow$  rails W et R, voir fig. 15.1.

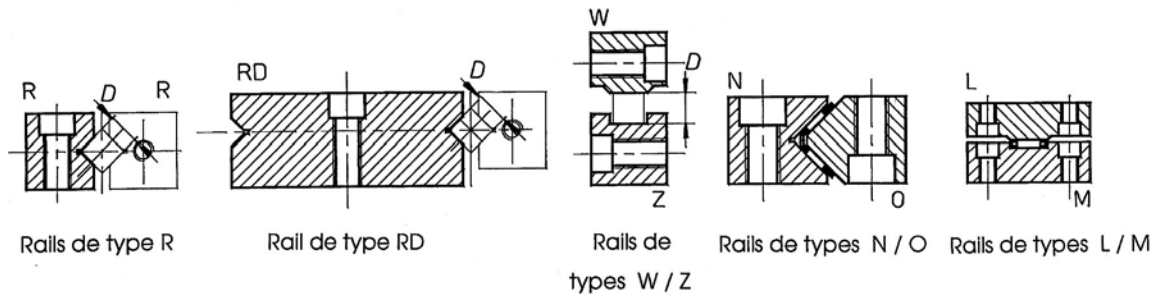


Figure 15.1 Rails de guidage Schneebberger

### 4. Rails de guidage, types N/O et L/M

Les rails de guidage N/O sont conçus spécialement pour être équipés de cages à aiguilles capables de supporter des charges très élevées. La haute densité des aiguilles confèrent aux guidages une rigidité exceptionnelle. Les cages à aiguilles en équerre sont en matière composite afin de réduire les pertes par frottement. Les rails de guidage L/M sont prévus en complément aux rails N/O comme appui libre. Ils sont équipés de cages à aiguilles à une rangée maintenues par un support en matière composite, voir figure 15.1.

### 5. Rails de guidage, types F/G et J/K

Les rails de guidage F/G sont indiqués pour les applications devant supporter des charges élevées. Les cages métalliques, équipées de rouleaux cylindriques à fort diamètre, disposés en équerre, sont recommandées pour les systèmes nécessitant des cages à course asservie. Les rails de guidage J/K sont prévus en complément aux rails F/G pour former un appui libre. Ils sont équipés de cages à rouleaux cylindriques à fort diamètre. La forme de ces rails est semblable à celle des types N/O et L/M.

## 15.1.2 DESCRIPTION DES CAGES À ÉLÉMENTS ROULANTS

### 1. Cages à rouleaux croisés, types AC et DM

Les cages à rouleaux croisés du type AC sont prévues pour tous les types de montage et les rouleaux sont retenus dans des cages en PA12 renforcé avec 30% de fibres de verre pour les petites dimensions, diamètres 1,5 à 12 mm, type AC, métalliques pour les diamètres de 15 à 24 mm, type DM. Comme les rouleaux sont à disposition croisée entre les rails, un rouleau sur deux est capable de supporter la charge extérieure si cette dernière est perpendiculaire à la génératrice du rouleau porteur.

### 2. Cages à billes, types AK et JJ

Les cages à billes du type AK sont prévues pour tous les types de montage et les billes sont maintenues en place par une cage en PA12 renforcé avec 30% de fibres de verre pour les diamètres compris entre 1,5 et 12 mm, type AK, cage en laiton pour les diamètres de 15 à 24



mm, type JJ. Ces cages à billes sont placées entre deux rails de type R ou entre un rail de type R et un rail de type W.

### 3. Cages à rouleaux à plat, type LL

Ces cages guident des rouleaux cylindriques disposés à plats formant un appui libre entre deux surfaces parallèles horizontales au moyen des rails W et Z. La cage est en laiton et les rouleaux ne sont pas maintenus dans la cage.

### 4. Cages à aiguilles en équerre, type SHW, et cage à aiguilles à plat, type SHF

Les cages à aiguilles en équerre de type SHW maintiennent deux rangées d'aiguilles disposées perpendiculairement et se place entre les rails des types N et O. Les cages sont en PA12 renforcé par 30% de fibres de verre et les diamètres des aiguilles sont compris entre 2 et 3,5 mm. Les cages à aiguilles à plat de type SHF sont placées entre deux rails, types L et M. Les aiguilles sont maintenues en place et les cages sont conçues en PA12 avec 30% de fibres de verre.

### 5. Cages à rouleaux en équerre, type VSF et cage à rouleaux à plat, type SF

Ces cages sont semblables aux cages précédentes, types SHW et SHF, mais elles sont fabriquées en laiton et maintiennent des rouleaux cylindriques. L'exécution courante comprend des groupes de 3 rouleaux avec une distance plus grande entre les groupes qu'entre les rouleaux du groupe.

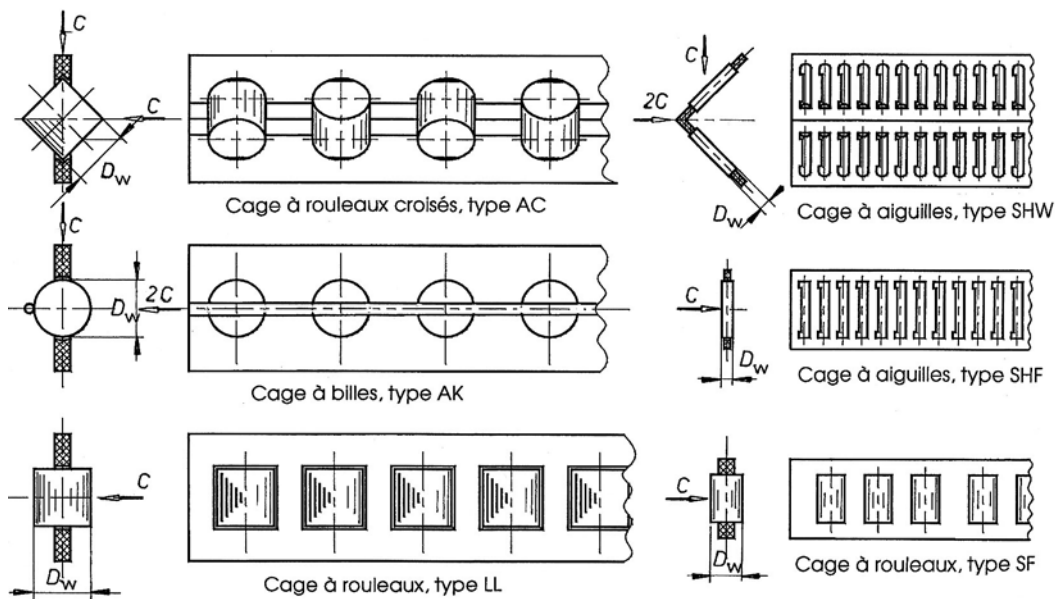


Figure 15.2 Cages à rouleaux cylindriques, à billes et à aiguilles de W. Schneeberger AG

## 15.1.3 BASES TECHNIQUES

La précision du mouvement et du positionnement dépend de la précision de toutes les parties constituant le guidage : rails de guidage, éléments roulants, supports du guidage et précharge ajustée au montage ou en service.

### 1. Tolérances de parallélisme des rails

Les rails Schneeberger sont livrables en deux classes de qualité : qualité standard NQ pour les guidages mécaniques usuelles, qualité SQ destinée aux plus hautes exigences. Les tolérances de parallélisme sont données sur la figure 15.3 en fonction de la longueur. Les rails sont usinés dans des tolérances de  $\pm 0,005$  mm sur le positionnement de la face d'appui par

rapport à la face du chemin de roulement. Il est ainsi possible de renoncer aux exécutions appariées pour les guidages précontraints.

## 2. Matières

En exécution standard, les rails de guidage sont fabriqués en acier à outil de la nuance 1.2510 ou 1.2842, la dureté se situant entre 58 et 62 HRC. En exécution partiellement résistantes à la corrosion, nuance 1.4125, la dureté est au minimum 54 HRC. Tous les éléments roulants sont fabriqués en acier pour roulement de la nuance 1.3505 (100 Cr 6). Leur dureté se situe entre 58 et 64 HRC. Les rails supportent une température de fonctionnement de  $+80^{\circ}$  et occasionnellement jusqu'à  $+120^{\circ}\text{C}$ .

## 3. Lubrification

La lubrification a pour but de protéger le guidage contre la corrosion et l'usure. Suivant les sollicitations, la première lubrification, pas trop importante, suffit pour plusieurs années. Il est recommandé d'utiliser des graisses à base de lithium ou des huiles minérales CLP ou HLP selon DIN, viscosités ISO VG 15 à 100. Il faut absolument éviter que les huiles de coupe ou les émulsions d'arrosage puissent pénétrer dans les guidages et diluer ou même entraîner le lubrifiant en place. Deux à cinq lubrifications suffisent pendant la durée de vie des guidages.

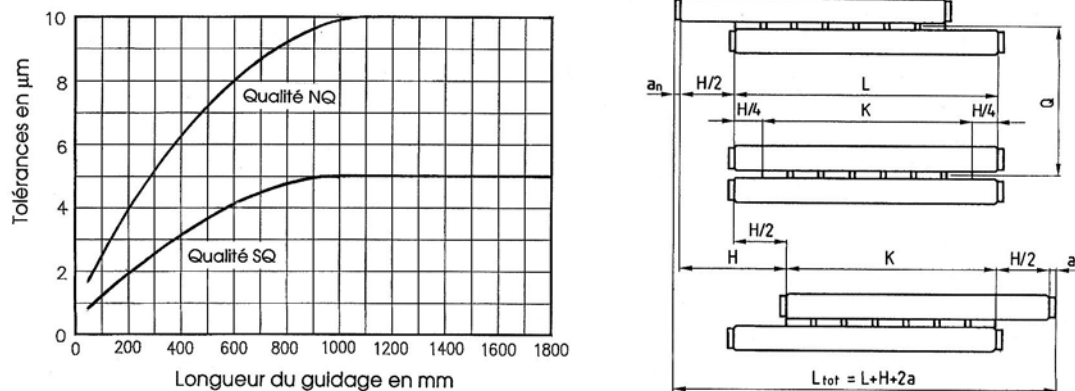


Figure 15.3 Tolérances de parallélisme entre les faces de roulement et les faces d'appui  
Longueur des rails en fonction de la course du guidage

## 4. Vitesse et accélération admissibles

Les rails de guidage supportent des vitesses atteignant 50 m/min et des accélérations jusqu'à  $50 \text{ m/s}^2$ . Des vitesses supérieures sont possibles avec certains montages spéciaux à condition de prévoir des cages légères et suffisamment rigides. L'asservissement de la cage peut s'avérer nécessaire dans des conditions extrêmes.

## 5. Étanchéité et frottement

Toute souillure provenant de l'extérieur représente un réel danger pour les guidages linéaires, principalement en ce qui concerne leurs propriétés de roulement et leur durée de vie. Des mesures de protection doivent être prises en fonction des conditions d'utilisation. Les billes sont moins sensibles aux impuretés que les rouleaux cylindriques. Toutefois, leur capacité de charge est moins élevée que celle des rouleaux. Les guidages équipés de cages en matière synthétique ou composite présentent un coefficient de frottement équivalent située entre 0,0005 et 0,003. Le fonctionnement correct du guidage est subordonné à un alignement parfait des rails et à un support rigide usiné avec précision.

### 15.1.4 CINÉMATIQUE

En supposant un rail fixe et l'autre mobile se déplaçant de la course  $H$ , les éléments roulants se déplacent de la distance  $H/2$  pour autant que les rayons de roulement soient identiques sur les deux rails. Cette dernière condition est réalisée pour la cage à rouleaux croisés ou à billes placée entre deux rails R, la cage à rouleaux LL entre des rails W et Z, la cage à aiguilles SHW placée entre les rails N et O, la cage à aiguilles SHF placée entre les rails L et M. Par contre, si la cage à billes est placée entre un rail W et un rail R, les rayons de contact sont différents et le déplacement de la cage n'est pas égal à la moitié de la course.

#### 1. *Choix de la série et comportement général*

Les dimensions d'un rail de guidage, série et longueur, dépendent principalement de la capacité de charge, de la durée de vie et de la rigidité souhaitées. Pour les séries avec rouleaux ou aiguilles, la capacité de charge dépend principalement de la longueur de l'élément roulant. La rigidité est augmentée par le nombre d'éléments plutôt que par le diamètre. Les billes sont moins coûteuses que les éléments à rouleaux ou à aiguilles.

#### 2. *Choix de la longueur des rails*

Sont déterminant pour la longueur  $L$  du rail de guidage (figure 15.3) :

$K$  la longueur de la cage,

$H$  la course à prévoir,

$Q$  l'écartement moyen des rails de guidage,

$L_{\text{tot}}$  l'encombrement total.

La longueur de la cage sera :

$$K \leq L - 0,5 H,$$

et la longueur de la cage par rapport à l'écartement moyen  $Q$  des rails de guidage :

$$K/Q \geq 1.$$

La dimension de la course par rapport à la longueur du rail de guidage doit remplir la condition dimensionnelle :

- pour  $H \leq 400$  mm :  $H/L \leq 0,7$ ,

- pour  $H > 400$  mm :  $H/L \leq 1$ .

Avec un rail de guidage du type W monté avec un contrerail du type R et une cage à billes, la longueur de la cage se détermine sur la base de formules spéciales (rayons de contact différents) :

- rail R fixe, rail W mobile :  $K \leq L - H/2,4$ ,

- rail W fixe, rail R mobile :  $K \leq L - H/1,7$ .

Lorsqu'une table courte se déplace sur une longue glissière, des cages dépassant les rails de guidage sont parfois préférables.

### 15.1.5 DURÉE DE VIE DES GUIDAGES

La détermination de la durée de vie d'un guidage est semblable à celle des roulements. Elle part des propriétés des éléments roulants et de leur nombre, des charges appliquées sur chacun des rails. Un point difficile à estimer est de savoir exactement le nombre d'éléments roulants intervenant dans la portance du guidage.

### 1. Capacité de charge

La capacité de charge des guidages linéaires se calcule sur la base des directives ISO 281 de calcul des roulements. La capacité de charge  $C$  est la charge correspondant à une durée de vie nominale de 100 000 mètres de déplacement pour autant que la charge reste constante en direction et intensité et qu'elle agisse perpendiculairement au guidage linéaire. Cette capacité correspond à une probabilité de 90% de dépasser la durée calculée à l'aide de la formule de base. Des recherches récentes ont démontré que la capacité de charge statique ne devait en aucun cas être supérieure à la capacité dynamique. Les catalogues donnent la valeur de  $C$  par éléments porteurs. Certains fabricants de guidages linéaires ont défini la capacité de charge sur la base d'une distance de 50 000 m et la capacité  $C_{50}$  se trouve par :

- éléments roulants à contact ponctuel :  $C_{50} = 1,26 C$ ,

- éléments roulants à contact linéique :  $C_{50} = 1,23 C$ .

La durée de vie  $L$ , en mètres, la capacité de charge  $C$  et la charge équivalente  $F_p$  sont liées par les expressions suivantes :

$$\text{- éléments : rouleaux, aiguilles : } L = a_1 \left( \frac{f_H f_T C}{F_p} \right)^{10/3} 10^5 \text{ m,} \quad (15.1.1)$$

$$\text{- éléments : billes : } L = a_1 \left( \frac{f_H f_T C}{F_p} \right)^3 10^5 \text{ m.} \quad (15.1.2)$$

avec :  $a_1$  facteur de fiabilité,  
 $f_H$  facteur de dureté,  
 $f_T$  facteur de température.

Les facteurs de dureté et de température tiennent compte d'une dureté des chemins de roulement inférieure à 58 HRC ou une température supérieure à 150°C, voir tableau 15.1.

### 2. Charge dynamique équivalente

La charge appliquée sur les guidages doit se trouver en appliquant les principes de la statique et en introduisant éventuellement des hypothèses simplificatrices sur la répartition des efforts sur les guidages.

Si la charge est progressivement variable sur les éléments roulants, la charge dynamique équivalente peut se trouver par une relation semblable à celle des roulements.

$$1. \text{ Contact linéique : } F_p = \sqrt[10/3]{\frac{1}{L_{\text{tot}}} \cdot (F_1^{10/3} l_1 + F_2^{10/3} l_2 + \dots + F_n^{10/3} l_n)}, \quad (15.1.3)$$

$$2. \text{ Contact ponctuel : } F_p = \sqrt[3]{\frac{1}{L_{\text{tot}}} \cdot (F_1^3 l_1 + F_2^3 l_2 + \dots + F_n^3 l_n)}, \quad (15.1.4)$$

$$3. \text{ Charge sinusoïdale : } F_p = 0,7 F_{\text{max}}, \quad (15.1.5)$$

avec :  $F_1 \dots F_n$  charge individuelle agissant sur le tronçon  $l_1 \dots l_n$ ,  
 $l_1 \dots l_n$  longueur des tronçons à charge individuelle constante,  
 $L_{\text{tot}} = \sum l_i$  course totale correspondant à un cycle de charge,  
 $F_{\text{max}}$  amplitude de la charge harmonique.

## 15. Guidages linéaires à roulements

Tableau 15.1

### Capacité de charge $C$ et facteurs de correction $f_H$ et $f_T$ (selon W. Schneeberger AG, Roggwil)

1. Capacité de charge pour 1 élément roulant en N									
Diamètre :	1,5	2	3	6	9	12	15	18	24
Cage à :									
Rouleaux AC	50	85	130	530	1300	2500	4400	7000	13000
Billes AK	9	15	25	65	150	260	410	600	1060
Rouleaux LL			260	1060	2600	5000	8800		
Diamètre/longueur :	2/6,8		2,5/9,8		3/13,8		3,5/17,8		
Cage à aiguilles									
En équerre SHW			750		1375		2350		3
à plat SHF			1080		2000		3350		5100
2. Facteur de dureté des chemins de roulement									
Dureté HRC	20	30	40	50	55	56	57	58	
Facteur $f_H$	0,1	0,2	0,3	0,6	0,8	0,88	0,89	1,0	
3. Facteur de température									
Température en °C			150	200		250		300	
Facteur $f_T$			1,0	0,9		0,75		0,5	

### 3. Déformation élastique et rigidité

La déformation globale  $\delta_A$  c'est-à-dire la déformation des éléments roulants et des chemins de roulement de dureté conforme se détermine au moyen d'abaque. La figure 15.4 montre ces valeurs pour deux types de guidage : guidage de type R avec cage à rouleaux croisés, guidage R avec cage à billes.

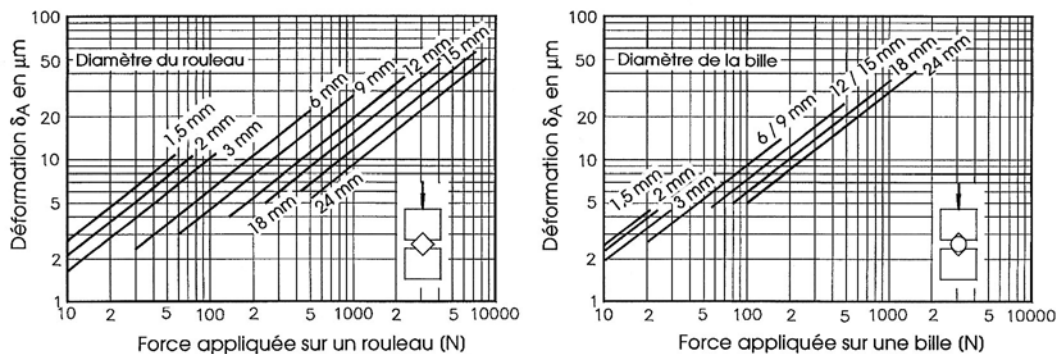


Figure 15.4 Déformation élastique des rails de guidage de type R en fonction de la charge appliquée  
à gauche : cages à rouleaux croisés à droite : cages à billes

On désigne par guidage maintenu un guidage dans lequel les deux paires de rails sont équipées de rails de type R ou de rails de type N/O. Ce genre de guidage peut être soumis à des couples ou des forces agissant dans n'importe quelle direction. La précision et la rigidité peuvent être influencées en modifiant la précontrainte. On appelle guidage libre un guidage dans lequel l'une des paires de rails supporte seulement des charges perpendiculairement au chemin de roulement. Cette paire de rails forme un appui "sur rouleaux". L'utilisation est recommandée : pour compenser les déformations latérales d'origine thermique, pour combler

une grande distance entre appuis, lorsqu'aucune déformation n'est tolérée sous l'effet du gauchissement de la construction environnante.

#### 4. Précontrainte

La précontrainte augmente la rigidité d'un guidage linéaire. Pour les rails de guidage décrits ici, elle se situe en général entre 2 et 20% de la capacité de charge  $C$ . Elle dépend de l'application et est étroitement liée à la rigidité de la construction.

#### 5. Facteur de correction des éléments porteurs

Le choix, le calcul ou le contrôle d'un guidage linéaire exige la détermination réaliste des forces appliquées. La déformation des parties environnantes peut se traduire par le fait que seule une partie des éléments roulants supportent réellement la charge. Le dimensionnement part presque toujours de méthodes très simplifiées et fait intervenir le choix du nombre des éléments porteurs  $R_T$  jusqu'à  $R_{Tmin}$ . Ce point dépend de la rigidité de la construction; on peut distinguer les cas suivants en fonction de la déformation des pièces  $\delta_s$  :

- A** construction rigide avec :  $\delta_s \leq 0,1 \delta_A$ ,  
**B** construction instable avec :  $\delta_s > \delta_A$  (donc conception inadmissible).

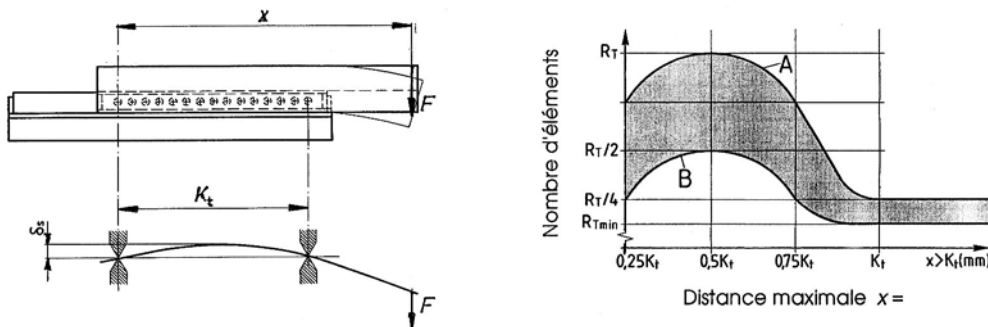


Figure 15.5 Principe des déformations des pièces, choix du nombre d'éléments  $R_{Tmin}$

La valeur de  $R_{Tmin}$  dépend du diagramme représenté sur le figure et des conditions suivantes :

	Eléments de roulement	Type de cage	$R_{Tmin}$
	Billes	AK, JJ	2
	Rouleaux croisés	AC,EE,DM,KBN	1
	Aiguilles	SHW, SHF	5
	Rouleaux à fort diamètre	VSF, SF	3
	Conception	<b>A</b> (rigide)	<b>B</b> (instable)
choix :	$x > K_t$	$R_{Tmin}$ à $R_T/4$	$R_{Tmin}$
choix :	$x < K_t$	selon diagramme	selon diagramme

La précontrainte est sans influence si la charge extérieure agissant sur les éléments roulants est supérieure à la précontrainte. La précontrainte est déterminante ou influence la durée de vie si aucune charge n'agit de l'extérieur ou si elle est supérieure à la charge.

La précontrainte augmente systématiquement la rigidité du guidage linéaire. Toutefois, une précontrainte élevée impose une conception robuste des pièces voisines afin d'éviter toutes déformations angulaires synonymes de compression des arêtes des rouleaux et des aiguilles d'où une diminution de la capacité de charge du guidage.

### 15.1.6 EXEMPLE DE CHARGE SUR LES ÉLÉMENTS

Soit un guidage linéaire monté dans des pièces suffisamment rigides et supportant une charge en porte-à-faux  $F = 800 \text{ N}$  selon figure 15.6. La distance  $x$  vaut  $180 \text{ mm}$  et 8 éléments sont prévus dans les deux cages. Deux variantes sont à prendre en considération :

- variante 1 : cage à rouleaux croisés, type AC9;
- variante 2 : cage à billes, type AK9.

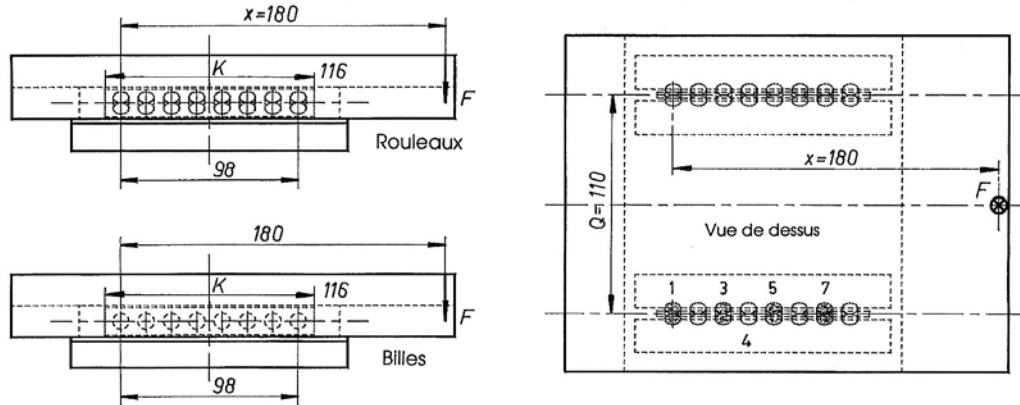


Figure 15.6 Exemple de répartition de la charge : Principe du guidage pour éléments roulants

#### 1. Cage à rouleaux croisés

##### 1.1 Calcul de la charge selon catalogue

La valeur de  $R_{\text{Tmin}}$  est 1 pour ce genre d'éléments roulants. Les caractéristiques intervenant dans la recherche de la charge maximale sont :

Rail de guidage : type R9,	$R_A = 8$ rouleaux croisés,
Capacité de charge dynamique de base :	$C = 1\,300 \text{ N}$ ,
Distance entre le premier et le dernier rouleau :	$K_t = (8-1) \cdot 14 \text{ mm} = 98 \text{ mm}$ ,
Longueur de la cage :	$K = 98 \text{ mm} + 2 \cdot 9 \text{ mm} = 116 \text{ mm}$ .
Force en porte-à-faux : $400 \text{ N}$ par guidage,	Distance de calcul : $x = 180 \text{ mm}$ .

Moment de la force par rapport au rouleau le plus à gauche :  $M = 180 \text{ mm} \cdot 400 \text{ N} = 72\,000 \text{ mm}\cdot\text{N}$ .

Force maximale de calcul :  $F_p = 72\,000 \text{ mm}\cdot\text{N} / 98 \text{ mm} \cdot 1/1 = 735 \text{ N}$ .

##### 1.2 Calcul au moyen d'une hypothèse de répartition linéaire de la charge

Cette hypothèse introduit les notions de répartition de la pression selon chapitre 1. La charge est supportée par un rouleau sur deux et les rouleaux porteurs sont numérotés de 1 à 7 sur la figure. La charge sur chaque rouleau comprend la charge engendrée par la force seule et celle créée par le moment de force.

Force répartie uniformément :  $F_1 = 400 \text{ N} / 4 = 100 \text{ N}$ .

Bras de levier de la force :  $x = 180 \text{ mm} - 3 \cdot 14 \text{ mm} = 138 \text{ mm}$ .

Moment de la force :  $M = 138 \text{ mm} \cdot 400 \text{ N} = 55\,200 \text{ mm}\cdot\text{N}$ .

Forces transmises sur les rouleaux : elles sont proportionnelles à leur distance à l'axe du rouleau 4. Si  $F_2$  est la force supportée par le rouleau 1, la force appliquée sur le rouleau 3 vaut :  $(14/42) F_2$ . La force  $F_2$  vaut :

$$F_2 = 55\,200 \text{ mm}\cdot\text{N} / [2 (42 + 14 \cdot 14/42) \text{ mm}] = 591 \text{ N}.$$

Force maximale de calcul :  $F_p = F_1 + F_2 = 691 \text{ N}$ .

Cette valeur est légèrement inférieure à la force trouvée par la première méthode.

## 2. Cage à billes

### 2.1 Calcul de la charge selon catalogue

La valeur de  $R_{Tmin}$  est 2 pour ce genre d'éléments roulants. Les caractéristiques intervenant dans la recherche de la charge maximale sont :

Rail de guidage : type R9,  $R_A = 8$  billes,  
Capacité de charge dynamique de base :  $C = 150$  N.

La distance entre la première et la dernière bille, la longueur de la cage, la force en porte-à-faux : 400 N par guidage et la distance de calcul sont conservées. La force de calcul se trouve à partir du moment par :

$$F_p = 72000 \text{ mm} \cdot \text{N} / 98 \text{ mm} \cdot 1/2 = 367 \text{ N}.$$

Cette force de calcul ne permet pas d'atteindre la distance nominale donnée dans la relation fondamentale pour les guidages linéaires à billes.

### 2.2 Calcul sous une répartition linéaire de charge sur les billes

En introduisant les mêmes hypothèses, les diverses valeurs deviennent successivement :

Force répartie uniformément :  $F_1 = 400 \text{ N} / 8 = 50 \text{ N}$ .  
Bras de levier de la force :  $x = 180 \text{ mm} - 3,5 \cdot 14 \text{ mm} = 131 \text{ mm}$ .  
Moment de la force :  $M = 131 \text{ mm} \cdot 400 \text{ N} = 52\,400 \text{ mm} \cdot \text{N}$ .

Les forces transmises sur les billes sont proportionnelles à leur distance au centre du guidage. Si  $F_2$  est la force supportée par la bille la plus à gauche, la force appliquée sur la bille suivante vaut :  $(35/49) F_2$ . La force  $F_2$  vaut :

$$F_2 = 52\,400 \text{ mm} \cdot \text{N} / [2 (49 + 35 \cdot 35/49 + 21 \cdot 21/49 + 7 \cdot 7/49) \text{ mm}] = 312 \text{ N}.$$

Force maximale de calcul :  $F_p = F_1 + F_2 = 362 \text{ N}$ .

### 2.3 Remarque

Les deux méthodes donnent pratiquement le même résultat pour ce guidage linéaire à billes.

## 15.2 DOUILLES À BILLES POUR GUIDAGES LINÉAIRES

Les douilles pour guidages linéaires par recirculation de billes comportent une large palette de produits prêts à l'emploi, tels les douilles ouvertes ou fermées, des paliers, des axes et des supports. Ces éléments trouvent leurs applications dans les guidages linéaires à grandes courses, à faibles efforts de déplacement, une bonne précision de positionnement et de longues durées d'utilisation. La description citée ici correspond à la gamme des modèles proposée par la firme INA, D-Herzogenaurach.

### 15.2.1 DESCRIPTION DES ÉLÉMENTS

Le comportement d'un guidage avec douilles à billes dépend non seulement du type de douille, mais également des autres composants comme les axes et leurs supports.

*Douilles à billes fermées* (types KH, KH...P et KH...PP)

Les douilles fermées sont constituées d'une bague extérieure en tôle emboutie et d'une cage en polyamide qui guide les billes garnissant le guidage, type KH. Tous ces éléments forment un ensemble prêt au montage. L'encombrement ne dépasse pas celui d'une bague lisse. Les ouvertures apparentes sur le cylindre extérieur laissent libre passage aux billes dans la zone non chargée. Ces douilles sont conçues pour des mouvements rectilignes sans limitation de course, mais n'admettent aucune rotation. Les douilles peuvent être équipées de joints frottants à double lèvre qui retiennent le lubrifiant et le protègent contre la pénétration de saleté, types KH...P et KH...PP.



### *Douilles à billes fermées et ouvertes (types KB, KBS, KBO, et ...PP)*

Les douilles à billes de ces modèles s'introduisent dans les guidages de grande précision, pour fortes capacités de charge et grande rigidité alliée à un positionnement précis. Elles se composent d'une bague extérieure très précise en acier à roulement dans laquelle est montée une cage en polyamide. La cage reçoit un garnissage de billes de précision. Les circuits des éléments roulants sont coiffés en bout par des bagues élastiques permettant un guidage souple des billes. Dans les modèles KB et KB...PP, le diamètre extérieur des douilles peut être utilisé comme chemin de roulement ce qui permet la combinaison d'un guidage en translation et d'un guidage en rotation. L'axe de guidage est fixé sur des rails supports ce qui impose une ouverture de la douille sur un secteur angulaire d'environ 50 à 70° selon les dimensions, modèles KBO et KBO...PP. Ces douilles sont également protégées par des étanchéités à passage étroit ou par des joints frottants.

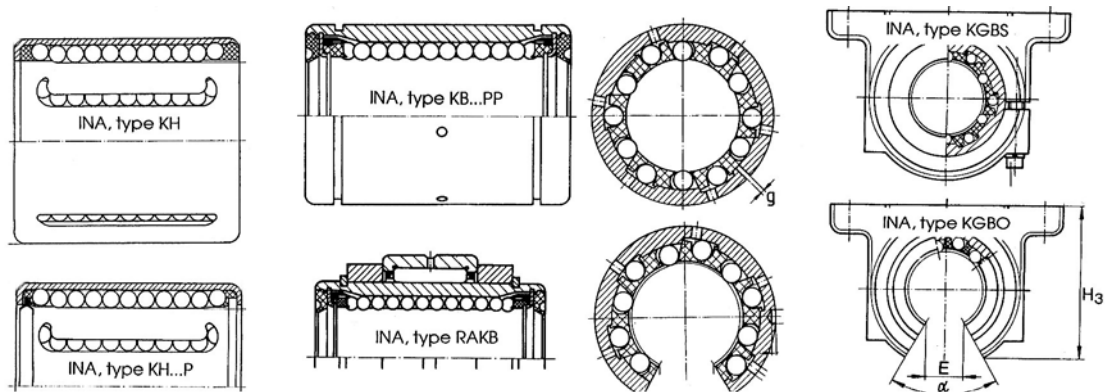


Figure 15.7 Douilles à billes fermées et ouvertes, corps de palier et paliers

### *Eléments auxiliaires*

La combinaison des corps de paliers avec les douilles à billes correspondantes permet de résoudre économiquement les problèmes de guidages linéaires. Les paliers sont en exécution moulée et sont fixés sur la machine. Les paliers complets sont des ensembles prêts au montage dans différentes applications de guidages linéaires. Les douilles à billes sont emmanchées serrées dans le corps de palier ou sont maintenues axialement par des segments d'arrêt. Les paliers ouverts sont utilisés lorsque les axes doivent être supportés en leur milieu. Le maintien de la douille ouverte s'effectue par l'intermédiaire d'une vis logée dans un forage de la bague extérieure.

Les supports d'axes sont montés en bout de guidage en combinaison avec des douilles à billes fermées ou ouvertes et les paliers correspondants. Les rails supports d'axes sont nécessaires pour le montage d'axes très longs. Les axes de précision sont en acier fin au carbone, traités superficiellement, nuance 100C6. La dureté, HV = 670 à 840 (59 à 65 HRC), et l'état de surface garantissent un bon guidage des douilles. Le cœur de l'axe est à l'état recuit normalisé afin de supporter les sollicitations de flexion. La tolérance sur le diamètre extérieur est h7 et l'état de surface correspond à  $R_a 0,3$ .

## **15.2.2 CAPACITÉ DE CHARGE ET DURÉE DE VIE**

La durée de vie des douilles à billes dépend du mode de charge appliquée et des capacités de charge : charge dynamique de base  $C$  pour les guidages animés de mouvements et capacité de charge statique de base  $C_0$  pour les roulements immobiles ou à déplacements très modestes. La durée nominale des douilles à billes se calcule comme suit :

$$L = \left( \frac{C}{F_p} \right)^3 \cdot 10^5 \text{ mètres.} \quad (15.2.1)$$

La charge équivalente est désignée par  $F_p$ . Si le mouvement du guidage est oscillatoire, la course exprimée en mètres étant désignée par  $H$ , la fréquence du mouvement en va-et-vient par minute étant  $n_{osc}$ , la durée de vie en heure peut se trouver par :

$$L_h = \frac{833}{H \cdot n_{osc}} \cdot \left( \frac{C}{F_p} \right)^3 \text{ en heures.} \quad (15.2.2)$$

Les tables des catalogues donnent les capacités de charge dynamique et statique pour les divers types de douilles. La figure 15.8 représente ces capacités pour les douilles à billes de la maison INA. Les modèles proposés sont :

- type KH : pour charge modeste, sans rotation, en tôle emboutie;
- type KB : pour charge moyenne et grande précision, exécution fermée;
- type KBO : pour charge moyenne et grande précision, exécution ouverte.

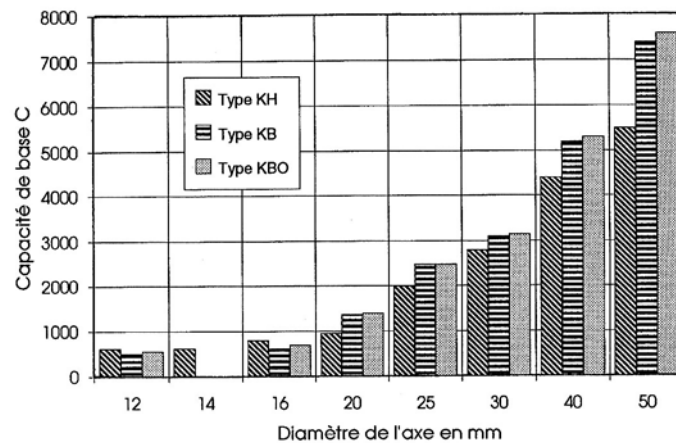


Figure 15.8 Capacité de base  $C$  en newtons pour les douilles à billes INA, diamètres 12 à 50 mm

En charge statique, le facteur de sécurité statique  $S_0$  se définit par le rapport entre la capacité statique de base  $C_0$  et la charge statique équivalente  $F_0$  sur la douille :

$$S_0 = \frac{C_0}{F_0}. \quad (15.2.3)$$

Pour les applications qui exigent une haute précision, le facteur de sécurité ne devrait pas être inférieur à 2.

### 15.2.3 FACTEURS INFLUENÇANT LA CAPACITÉ DE CHARGE

Les charges de base du catalogue sont données en fonction de critères bien définis concernant la dureté des chemins de roulement, l'orientation de la charge par rapport aux douilles et la précision du guidage. Ces critères entraînent l'application de facteurs de correction.

#### 1. Facteur de dureté

L'emploi d'axes ayant une dureté inférieure à 670 HV ou 59 HRC implique une modification des capacités de charge de base suivant les formules :

## 15. Guidages linéaires à roulements

- charge dynamique :  $C_H = f_H \cdot C$ ,  
- charge statique :  $C_{0H} = f_{H0} \cdot C_0$ . (15.2.4)

### 2. Facteur d'orientation de la charge

La capacité de charge des douilles à billes dépend de l'orientation de la charge par rapport aux rangées de billes. L'orientation de base coïncide avec la direction d'une rangée de billes ou avec l'axe de symétrie pour les douilles ouvertes. Si la ligne d'action de la charge ne correspond pas à cette définition, les capacité de charge de base se modifient par :

- charge dynamique :  $C_w = f_w \cdot C$ ,  
- charge statique :  $C_{0w} = f_{w0} \cdot C_0$ . (15.2.5)

Tableau 15.2  
Facteurs de correction de dureté et d'orientation de la charge

Facteur de dureté											
Dureté HV	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
Facteur $f_H$	0,09	0,12	0,19	0,25	0,33	0,42	0,52	0,64	0,80	0,96	1,00
Facteur $f_{H0}$	0,16	0,23	0,32	0,43	0,57	0,72	0,88	0,95	0,98	1,00	1,00
Facteur d'orientation de la charge											
Diamètres D'axes en mm	6 et 8 10	12	14	16	20 25	30	40 50				
Type KH											
$f_{w3}$	1,15	1,2	1,2	1,2	1,05	1,0	1,0				
$f_{w03}$	1,40	1,45	1,45	1,45	1,3	1,15	1,1				
Type KB, KBS											
$f_{w3}$	-	1,2	-	1,2	1,05	1,05	1,05				
$f_{w03}$	-	1,45	-	1,45	1,3	1,3	1,3				
Type KBO											
$f_{w4}$	-	0,85	-	0,85	1,0	1,0	1,0				
$f_{w04}$	-	0,85	-	0,85	1,0	1,0	1,0				
$f_{w5}$	-	0,45	-	0,45	0,55	0,55	0,55				
$f_{w05}$	-	0,40	-	0,40	0,55	0,55	0,55				
$f_{w6}$	-	1,05	-	1,05	1,0	1,0	1,0				
$f_{w06}$	-	1,15	-	1,15	1,0	1,0	1,0				

### 3. Charges combinées

Pour un guidage sur un seul axe, il faut prévoir un montage sur deux douilles et au minimum trois douilles pour un guidage sur deux arbres parallèles. Si ces conditions de conception ne peuvent pas être respectées, la douille à billes est sollicitée par une charge combinée composée d'une force et d'un couple. Le calcul de la charge équivalente permet de définir la durée de vie avant fatigue.

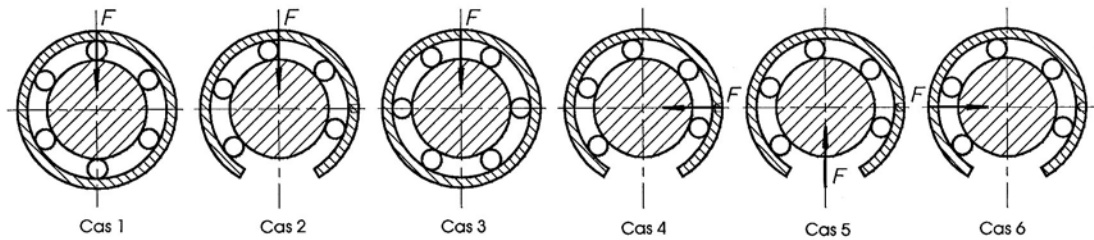


Figure 15.9 Cas de charge sur les douilles à billes fermées et ouvertes

Soit :

- $F_p$  la charge équivalente agissant sur le roulement,
- $F$  la charge radiale maximale trouvée dans l'équilibre de la douille,
- $M$  le couple appliqué sur la douille,
- $C_0$  la charge statique de base,
- $l_d$  la longueur de la douille.

La charge combinée est fonction des trois rapports donnés par le fabricant :

- transformation du couple en force :  $A = M/(C_0 \cdot l_d)$ , ( $A = 0$  à  $0,05$ ),
- force rapportée à la capacité :  $B = F/C_0$ , ( $B = 0,05$  à  $0,5$ ),
- force équivalente relative :  $F_p/F$ .

À partir du graphique du catalogue, la charge équivalente relative s'exprime approximativement par la relation :

$$\frac{F_p}{F} = 1 + \frac{0,58}{(0,1 \cdot F / C_0)^{5/3}} \cdot \left( \frac{M}{C_0 \cdot l_d} \right)^{5/3} \quad (15.2.6)$$

#### 15.2.4 COMPORTEMENT DU GUIDAGE À DOUILLES

Pour obtenir des conditions favorables de fonctionnement, le comportement du guidage va dépendre de plusieurs facteurs liés d'une part au comportement des douilles, d'autre part au montage et au mode de fixation.

##### 1. Frottement

Comme tous les éléments à roulement, les douilles à billes ne présentent pas de broutage au démarrage ou à faible vitesse. Le frottement est fonction de la charge, du paramètre de résistance au roulement et de la lubrification. Le coefficient de frottement varie de  $0,003$  à  $0,005$  pour les douilles simples KH ; il se situe entre  $0,0010$  à  $0,0025$  dans les douilles KB et KBO lubrifiées à l'huile.

##### 2. Limites d'application

La vitesse maximale admissible pour les douilles KB et KBO se situe à  $5 \text{ m/s}$ , celle pour les douilles KH à  $2 \text{ m/s}$ . Les accélérations maximales sont de l'ordre de  $50 \text{ m/s}^2$ . Le domaine des températures admissibles est compris entre  $-30^\circ\text{C}$  et  $+100^\circ\text{C}$ . Le fonctionnement correct des guidages implique un montage correct, une lubrification adéquate (huile ISO VG 10 à 22) et une bonne étanchéité.

##### 3. Rigidité

Si  $F$  est la charge appliquée et  $d$  la déformation sous l'effet de cette force, la rigidité d'un guidage à douilles à billes se définit par le rapport :

$$k = \frac{F}{\delta}.$$

La rigidité est égale à la pente de la tangente à la courbe  $F = f(\delta)$ . Cette caractéristique dépend du type d'élément et n'est pas à comportement linéaire. Pour estimer la déformation d'un guidage, on peut admettre un comportement linéaire correspondant à la sécante à la courbe partant de l'origine de la caractéristique. Le fabricant fournit un graphique donnant la force relative  $F/C_0$  pour chaque modèle de douille.

### 4. Précision du mouvement

La précision du mouvement d'un guidage linéaire sur douilles à billes dépend de la précision de positionnement des paliers et des axes, de la qualité des axes, des supports des axes, de l'écartement des supports, etc.. Le comportement dynamique des douilles à billes a une influence directe sur la qualité du mouvement. Une douille à billes à recirculation d'éléments roulants présente une variation radiale de position qui dépend du pas des billes. Le nombre de billes porteuses varie et des chocs interviennent à l'entrée et à la sortie des éléments roulants dans la zone de charge.

Le jeu correct des douilles du type KH est obtenu par emmanchement dans leur logement. Le champ de tolérance de l'alésage est H7 ou H6 selon le jeu désiré, celui des axes étant h6 ou j5 pour un montage dans un support en acier ou fonte. Les ajustements des paliers pour les douilles du type KB sont h6/H6. Pour les douilles des types KBS et KBO, les champs de tolérances des alésages sont compris entre H6 et M6 selon le jeu désiré.

## 15.3 GUIDAGES LINÉAIRES PAR PATINS À ROULEAUX

Les guidages par patins à rouleaux sont des éléments prévus pour des courses illimitées grâce à la recirculation des éléments roulants. Ils se distinguent par leurs performances en précision, capacité de charge, rigidité et l'absence de broutage. La continuité du mouvement est assurée par la recirculation des éléments à l'intérieur des patins. La course n'est limitée que par la longueur des rails de guidage.

### 15.3.1 DESCRIPTIONS DE QUELQUES PATINS À ROULEAUX

La plupart des fabricants de guidages linéaires possèdent des patins à rouleaux dans leur programme de fabrication. La description présentée ici concerne seulement quelques modèles typiques produits par les maisons INA et Schneeberger.

#### 1. Patins à une rangée de rouleaux (INA)

Les patins à rouleaux se composent d'un corps en acier traité, usiné avec précision, fermé aux deux extrémités par des pièces de tête et d'un grand nombre de rouleaux. Les rouleaux sont guidés avec un minimum de jeux entre les bords du corps. Ainsi, ces rouleaux ne peuvent pas se mettre en biais ce qui évite des frottements supplémentaires et des poussées latérales. Les patins de la série RUS sont recommandés pour les guidages de haute précision car des intercalaires sont placés entre les rouleaux pour éviter le frottement entre eux. Des racleurs interchangeables, placés aux deux extrémités, protègent la partie active contre la pénétration de corps étrangers.

#### 2. Patins à circulation de rouleaux croisés (Schneeberger)

Dans les patins de la série SR, la rangée de rouleaux croisés se déplace sur un corps de haute précision en acier trempé, rectifié. Le guidage des rouleaux, en aluminium traité

anticorrosion en surface, assure la circulation des éléments et les empêchent de tomber. Les rouleaux sont logés dans des coulisseaux en matière synthétique.

### 3. Patins à rouleaux disposés à plat (Schneeberger)

Les patins de la série ECO-ROLL sont équipés de rouleaux disposés à plat et comprennent un boîtier en matière synthétique résistant à l'usure avec chemin de roulement intégré en acier trempé, rectifié. Tous les rouleaux sont logés dans des coulisseaux en matière synthétique.

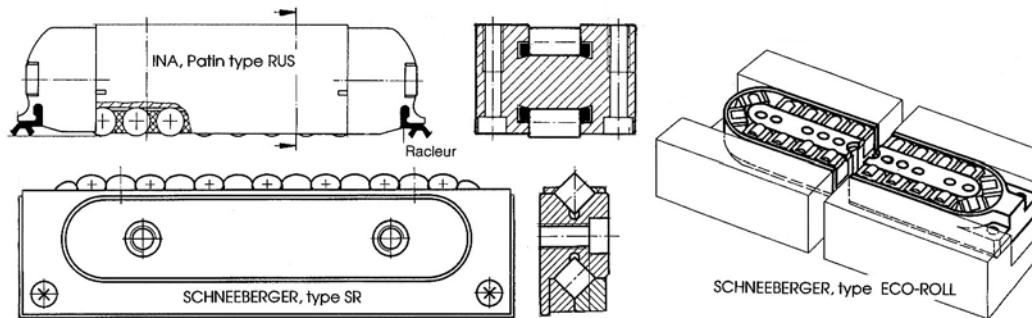


Figure 15.10 Patins à rouleaux des maisons INA et Schneeberger

### 4. Cales de précontrainte et rails de guidage

Les cales de réglage permettent le positionnement précis ou le réglage de la précharge des patins à rouleaux. Elles se composent de deux pièces qui comportent chacune une face en pente et guidées entre elles par un lardon central. Une plaque d'extrémité comporte des vis de réglage et de blocage.

Les rails de guidage servent de chemin de roulement aux patins à rouleaux. La précision des rails et des patins associés permet d'obtenir des guidages linéaires de haute précision. Les rails sont fabriqués en acier trempé pour une dureté de 670 à 840HV (INA-HYDREL). La rugosité des chemins de roulement est de  $R_a 0,4$ .

## 15.3.2 CAPACITÉ DE CHARGE ET DURÉE DE VIE

Le choix des patins à rouleaux et des rails s'effectue en fonction des efforts appliqués sur les guidages linéaires et de la durée de vie désirée. La longueur des patins et des rails doit être conforme à la course exigée et la rigidité de la conception joue également un rôle dans l'adoption du type.

### 1. Capacité de charge dynamique de base

La capacité de charge dynamique de base  $C$  est la charge correspondant à une durée de vie nominale de 100 000 m de déplacement pour autant que la charge reste constante en valeur et direction et qu'elle agisse perpendiculairement au guidage. Cette capacité de charge est donnée dans les catalogues. La durée de vie est la distance en mètres parcourue par un patin jusqu'à l'apparition des premiers signes de fatigue. Cette définition concerne 90% d'un lot de patins. La durée de vie  $L$ , la probabilité de survie  $a$ , la capacité de charge de base  $C$  et la charge équivalente  $F_p$  sont liées par la relation usuelle :

$$L = a \cdot \left( \frac{C}{F_p} \right)^{10/3} \cdot 10^5 \text{ mètres.} \quad (15.3.1)$$

Il est également possible de calculer la durée de vie en heures à condition de connaître la course simple  $H$  (m) effectuée pendant le temps  $t$  (s) :

$$L_h = \frac{L \cdot t}{3600 \cdot H} \text{ en heures.} \quad (15.3.2)$$

### 2. Sécurité en charge statique

Pour autant que la capacité de charge statique soit donnée dans le catalogue, la sécurité statique pour les patins à rouleaux se définit par le rapport :

$$S_0 = \frac{C_0}{F_{p0}}. \quad (15.3.3)$$

Le facteur de sécurité statique dans la conception de machines-outils ne devrait pas être inférieur à 2.

### 3. Correction de la capacité de charge dynamique

Les capacités de charge de base indiquées dans les catalogues sont données en fonction de critères définis par la norme ISO. La variation d'un de ces critères entraîne l'introduction de facteurs de correction. Comme pour les douilles à billes, ces facteurs sont :

1. Facteur de dureté : à introduire pour des duretés inférieures à 670HV ou 58HRC.
2. Facteur de défaut angulaire : si des défauts de parallélisme entre rouleaux et chemins de roulement existent, supérieurs à 0,1 milliradian, il faut multiplier la charge efficace par un facteur de correction donné dans les catalogues.
3. Facteur de température : à introduire si la température est supérieure à 150°C.

## 15.3.3 COMPORTEMENT DES GUIDAGES À PATINS

La déformation globale  $\delta_p$  sous charge, déformation des éléments roulants avec les chemins de roulement, est donnée sous forme de graphiques pour chaque modèle de patin en fonction de la charge équivalente  $F_p$ . Le comportement sous charge est non linéaire. La rigidité du patin est encore donnée par :

$$k = \frac{dF_p}{d\delta_p} \approx \frac{F_p}{\delta_p}. \quad (15.3.4)$$

Dans le cas de deux patins montés en opposition sans jeu et sans précharge, l'effet de la charge extérieure se traduit par une déformation élastique et par un jeu de même valeur au niveau du patin opposé. Pour deux patins montés en opposition et préchargés sous  $F_{pF}$ , les efforts sur les deux patins peuvent se trouver en construisant le triangle de précontrainte tout en tenant compte du comportement non linéaire des éléments.

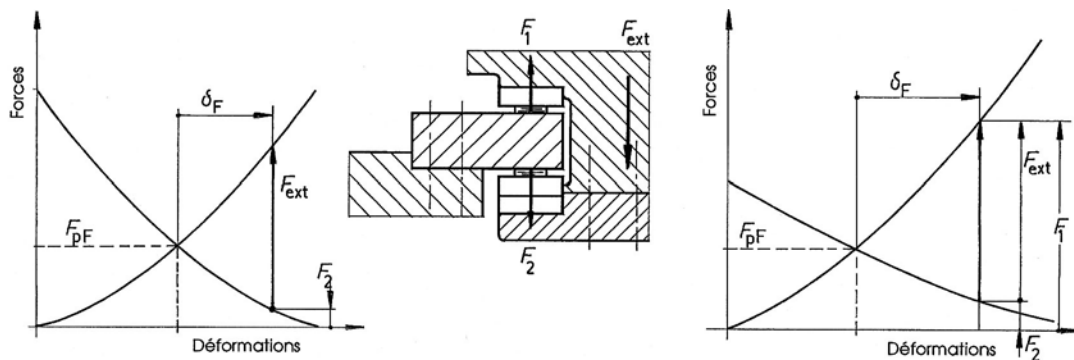


Figure 15.11 Triangle de précontrainte pour deux patins montés en opposition : principe de base.  
Triangle de précontrainte de patins à rouleaux montés en opposition, compte tenu de la déformation du rail de guidage et de son support.

Pour obtenir un guidage suffisamment rigide et précis, le patin supportant la charge extérieure est à précharger à l'aide d'un patin monté en opposition et ajustable au moyen d'une cale de réglage. L'élasticité de toutes les pièces constituant le guidage forment un ensemble moins rigide que celle du patin seul. La caractéristique de rigidité peut s'obtenir par mesure de la déformation ou par calcul au moyen des éléments finis. La figure 15.11 montre le comportement d'un ensemble préchargé :

- à gauche deux patins identiques seuls,
- à droite un montage réel avec une élasticité différente des deux patins. Sous l'effet de la charge extérieure  $F_{\text{ext}}$ , le patin inférieur est déchargé jusqu'à  $F_2$ ; le patin supérieur doit supporter la force  $F_1 = F_2 + F_{\text{ext}}$ .

La valeur de la précontrainte dépend du genre de machine et se trouve liée à la rigidité de la conception. Elle se situe généralement entre 2 et 20% de la charge dynamique de base selon les efforts appliqués.

Le frottement ou la résistance au déplacement d'un guidage à patins est fonction de la charge et du coefficient de frottement équivalent :

$$F_R = \mu \cdot F. \quad (15.3.5)$$

Le coefficient de frottement équivalent est pratiquement constant, même à l'arrêt ce qui permet d'éviter le broutage. A condition de travailler dans un domaine normal des charges, soit pour  $2 < C/F_p < 10$ , le coefficient de frottement n'est influencé que par la précision du montage. Ce coefficient varie entre 0,0025 et 0,0045 selon le type de patin.

Les limites usuelles d'application des patins à rouleaux sont :

- vitesses limites : 50 m/s,
- accélérations limites : elles dépendent essentiellement des effets de masse sur les patins,
- températures limites : de -30°C à 100°C.

## 15.4 GUIDAGE LINÉAIRE MONORAIL À CHARIOT

Les guidages linéaires par douilles à billes ou par patins à rouleaux utilisent au minimum deux ou trois éléments et deux rails pour assurer leur fonction et réagir correctement à l'action des efforts extérieurs. De plus, ces appuis supportent seulement une réaction d'appui simple. Le développement des guidages linéaires à chariots autorise l'emploi d'un seul rail et d'un ou de deux chariots seulement. Les chariots peuvent compenser des forces et des couples dans toutes les directions. Les éléments roulants, billes ou rouleaux à recirculation, sont disposés de part et d'autre du rail de guidage profilé et grâce à la précontrainte, assurent un comportement excessivement favorable sous charge.

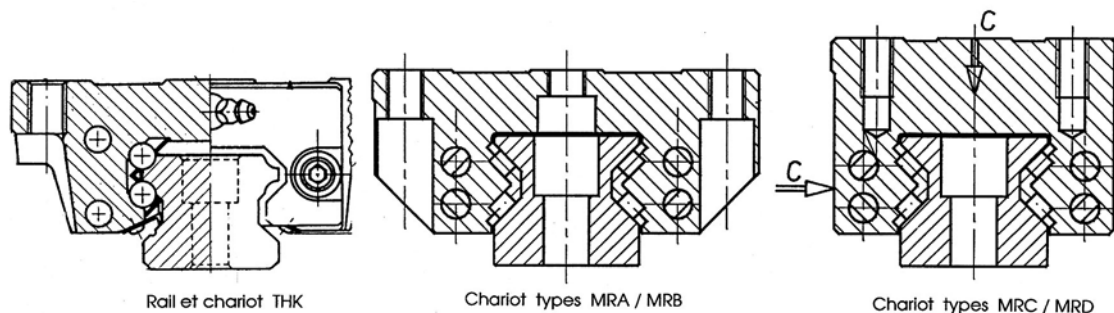


Figure 15.12 Profil des chariots avec recirculation de billes (THK) ou de rouleaux (Schneeberger)



### 15.4.1 DESCRIPTION DE QUELQUES COMPOSANTS

Le guidage monorail se compose d'un rail profilé à quatre chemins de roulement, d'un ou de plusieurs chariots, d'éléments roulants constitués par des billes ou des rouleaux. Une grande capacité de charge statique et dynamique, une rigidité accrue, une grande stabilité de fonctionnement sont les principales qualités de ces guidages. Les chariots utilisent la recirculation des billes ou des rouleaux. Le contact entre les éléments roulants et les chemins est ponctuel dans le premier cas, linéique dans le second. La capacité de charge, la durée de vie et le comportement seront discutés seulement pour les chariots équipés de rouleaux.

#### 1. *Chariot à circulation de billes* (conception THK)

Le guidage linéaire avec recirculation de billes consiste en un rail comportant quatre chemins de roulement longitudinaux. Le chariot comprend les rangées de billes maintenues par une cage et par deux plaques d'extrémité. Les chemins de roulement sont disposés de telle manière qu'ils sont symétriques deux à deux pour obtenir un contact sous  $45^\circ$ . L'ensemble possède une capacité de charge identique en direction verticale et horizontale. Ce fabricant offre de nombreux types de chariots et rails (figure 15.12 à gauche).

#### 2. *Chariot à circulation de rouleaux* (conception Schneeberger)

Dans cette exécution, les quatre rangées de rouleaux sont disposées sur une circonférence de telle sorte que la capacité de charge de l'ensemble soit identique sous l'effet de forces horizontales ou verticales. La présence de rouleaux, à profil corrigé, autorise des charges élevées et augmente la rigidité de la construction. La gamme des chariots proposés par la maison Schneeberger comprend les modèles suivants :

1. chariots standards en deux longueurs, types MRA et MRB, figure 15.12 au centre;
2. chariots compacts en deux longueurs, types MRC et MRD, figure 15.12 à droite.

Quatre classes de tolérance permettent un choix précis et fonctionnel du type en fonction des besoins requis pour la conception envisagée. Les classes de précision déterminent les valeurs de tolérance et de parallélisme. La désignation nominale correspond à la largeur du rail à l'arondi près, les largeurs exactes étant : 23, 34, 45 et 53 mm. Afin d'adapter la rigidité du guidage aux conditions imposées, trois classes de précontrainte sont à disposition. Enfin, le guidage linéaire peut se combiner avec un système de mesure intégré. Les signaux de sortie proviennent d'une mesure magnétique se trouvant directement sur le rail.

### 15.4.2 CAPACITÉ DE CHARGE ET DURÉE DE VIE

La capacité de charge dynamique de base dépend essentiellement du nombre de rouleaux et de leurs dimensions, diamètre et longueur. Le dimensionnement d'un guidage linéaire à chariots résulte des points suivants :

- détermination des forces et des couples externes;
- répartition des forces et des couples sur tous les chariots du guidage;
- détermination de la précontrainte et des déformations;
- calcul de la durée de vie probable;
- calcul éventuel de la sécurité statique.

La durée de vie du guidage est limitée par la fatigue du matériau (formation de piqures destructrices) ou par l'usure exagérée des surfaces de roulement. L'importance de l'usure dépend essentiellement du mouvement relatif, de la pression superficielle, de la lubrification et de l'encrassement.

#### 1. *Détermination des forces et couples sur les chariots*

Les forces et couples appliqués sur les chariots peuvent se trouver approximativement à partir des courbes caractéristiques de la déformation dans le domaine d'utilisation. Les efforts

extérieurs proviennent des forces et couples connus ainsi que des effets de masse. En adoptant un système de coordonnées trirectangle  $O x y z$ , l'axe  $O x$  étant confondu avec la direction du déplacement, la recherche des forces sur chacun des chariots peut se trouver à partir des conditions d'équilibre dans les diverses vues techniques et en introduisant des hypothèses simplificatrices si nécessaire. La figure 15.13 à droite représente le système de coordonnées et la répartition des charges extérieures sur les quatre chariots d'un guidage. Le résultat de cette étude est toujours approché. Finalement, le contrôle de la somme des forces et de la somme des moments, y compris les efforts extérieurs, doit donner des résultats nuls.

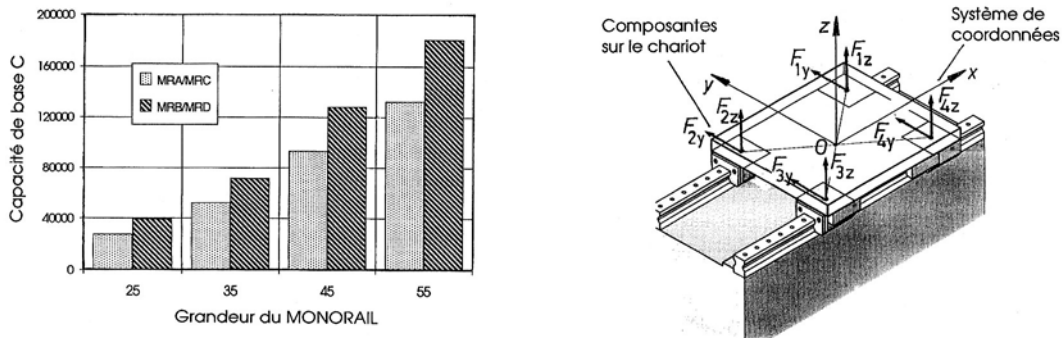


Figure 15.13 Capacité de charge dynamique de base et répartition de la charge sur les chariots

## 2. Précontrainte et déformation

Les guidages à chariots à rouleaux peuvent être livrés dans trois domaines de précontrainte : précontrainte **V1** avec  $0,03 C$ , précontrainte **V2** avec  $0,08 C$  et précontrainte **V3** avec  $0,13 C$ . La déformation élastique du guidage dépend de la classe de précontrainte, de la direction et du sens de la charge. Le fabricant donne des courbes pour les divers modèles.

## 3. Capacités de charge dynamique $C$ et statique $C_0$

Les capacités de charge pour les guidages linéaires sont basées sur la norme ISO 281 pour le calcul des roulements. La capacité de charge  $C$  est la charge permettant d'obtenir une durée de vie équivalente à un déplacement de 100 000 m sous l'effet d'une charge constante appliquée perpendiculairement aux faces du chariot. Cette capacité de charge est représentée sur la figure 15.13 pour les deux types de chariot : court et long.

La capacité de charge statique  $C_0$  est donnée par la contrainte maximale admissible au niveau du contact entre les rouleaux et le rail, calculée au moyen des relations développées par Hertz pour la pression superficielle.

## 4. Charge dynamique équivalente $F_p$

A sollicitation constante, la charge dynamique équivalente correspond à la charge trouvée dans l'équilibre du guidage sous les efforts extérieurs. A sollicitation variable, la charge équivalente se calcule au moyen de la relation générale valable pour les roulements, formule (14.12.1). La force résultante sur chaque chariot est égale à la somme géométrique des composantes selon les axes  $Oy$  et  $Oz$ .

## 5. Durée de vie avant fatigue

La durée de vie se trouve simplement par la relation usuelle :

$$L = a_1 \left( \frac{C}{F_p} \right)^{10/3} \cdot 100000 \text{ m.} \quad (15.4.1)$$

avec :  $a_1$  le facteur de probabilité selon tableau.

La durée de vie doit se corriger par le facteur de température si celle-ci dépasse  $120^\circ\text{C}$ .

### 6. Sécurité sous charge statique

Le coefficient de sécurité sous charge statique est défini par le rapport entre la capacité de charge statique  $C_0$  et la charge équivalente statique  $F_{p0}$  :

$$S_0 = \frac{C_0}{F_{p0}}. \quad (15.4.2)$$

Afin de garantir une sécurité suffisante, le coefficient de sécurité ne devrait pas être inférieur à  $S_0 = 4$ .

### 15.4.3 COMPORTEMENT SOUS CHARGE ET LUBRIFICATION

Le comportement d'un guidage dépend directement de sa rigidité et de la déformation des parties annexes. La figure 15.14 reproduit le comportement des chariots MRA 35 et MRC 35 pour les trois classes de précontrainte. Pour ces deux chariots, les capacités de charge de base valent :  $C = 52\,000\text{ N}$  et  $C_0 = 93\,400\text{ N}$ .

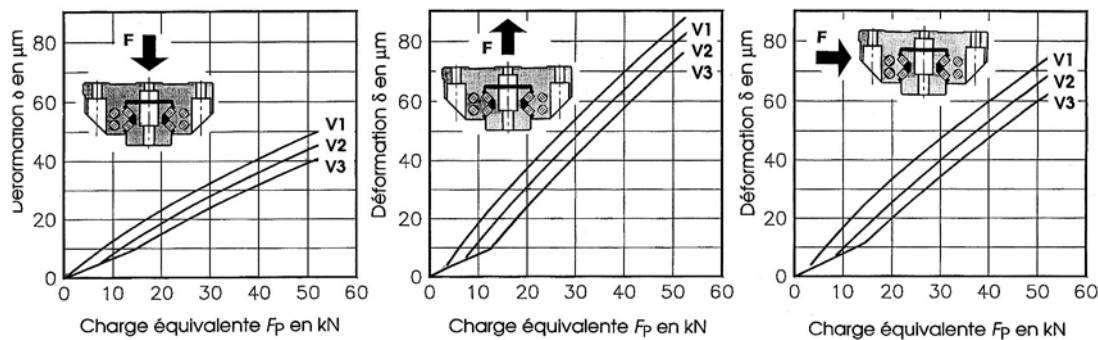


Figure 15.14 Caractéristique de la déformation du chariot MRA 35 pour les 3 classes de précontrainte  
 classe **V1** : précontrainte = 1560 N, classe **V2** : précontrainte = 4160 N,  
 classe **V3** : précontrainte = 6760 N

La lubrification des rails et des chariots protège ces composants de la corrosion et de l'usure. Le chariot est équipé d'un graisseur en standard. La lubrification doit être effectuée en fonction de l'utilisation mais au moins après 1000 heures ou trois mois de service. La graisse recommandée est la nuance KP2K selon DIN 51825 ou de l'huile ISO VG32 à VG100.

Les valeurs cinématiques admissibles sont :

- vitesses jusqu'à 3 m/s;
- accélérations jusqu'à 50 m/s<sup>2</sup>.

## 15.5 VIS À ROULEMENT

Remplacer le frottement de glissement par le frottement de roulement dans l'ensemble vis - écrou, telle est l'idée simple des concepteurs de vis à roulement. Les mécanismes classiques à vis et écrou à surfaces profilées se composent habituellement d'un écrou en bronze glissant sur une vis à profil trapézoïdal. Dans les vis à roulement, des éléments roulants, billes ou rouleaux, sont intercalés entre l'écrou et la vis. La transformation d'un mouvement rotatif en mouvement linéaire et vice versa n'est possible que si les pertes restent dans de faibles limites. La vis à billes est un arbre fileté dont le filetage est le chemin de roulement. L'écrou comporte un filetage intérieur identique et la liaison entre l'arbre et l'écrou est assurée par des billes qui circulent dans ces deux chemins de roulement. Les avantages principaux des vis à roulement sont :

- douceur de mouvement, sans à-coups, rendement mécanique jusqu'à 90%,
- excellente fidélité et grande fiabilité, suppression du jeu par précontrainte,
- durée de vie prévisible,
- faible usure, donc conservation des propriétés pendant toute la durée de vie.

### 15.5.1 DESCRIPTION DES VIS À ROULEMENT

Le principe de base des vis à roulement autorise une quantité de variantes constructives. Cette description comprend les types les plus courants.

#### 15.5.1.1 VIS À BILLES À TRANSFERT EXTERNE

Dans la vis à billes à transfert externe, les billes sont recyclées dans un tube extérieur à l'écrou. Le tube de recirculation enjambe plusieurs tours de billes porteuses. Cette conception est simple mais conduit à un diamètre d'écrou important. Dans tout système de transfert, le point critique se situe aux endroits où les billes quittent les chemins de roulement. La sortie et l'entrée des billes dans le tube s'effectuent tangentiellement aux chemins de roulement. La vitesse des billes peut devenir élevée si la résistance au roulement reste extrêmement faible aux points critiques. L'angle de contact idéal entre les billes et les deux chemins de roulement est de  $45^\circ$ . Si cet angle est dépassé, les billes n'assurent plus leur fonction portante. Il en résulte une augmentation de l'usure et une diminution de la durée de vie. Dans le système à tube externe, les gorges sont presque semi-circulaires, si bien que ce danger n'existe pas. L'écrou est associé à une vis à filet roulé très économique. Ce système a acquis une position prépondérante sur le marché.

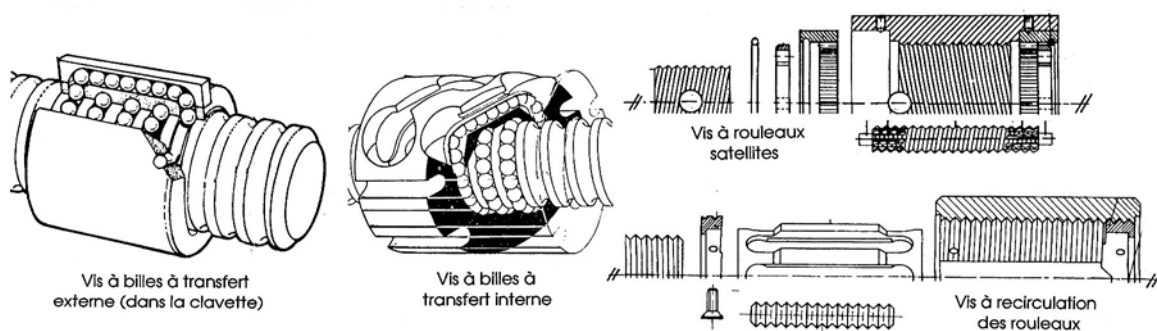


Figure 15.15 Vis à roulement : à transfert externe, à transfert interne, à rouleaux satellites, à recirculation de rouleaux

#### 15.5.1.2 VIS À BILLES À TRANSFERT INTERNE

Dans la vis à billes à transfert interne, les billes sont recyclées dans un pion par-dessus le sommet des filets de la vis à chaque tour de billes porteuses. Ce principe conduit à une conception plus compacte, mais moins économique. Le filetage, le diamètre extérieur et les faces de l'écrou sont rectifiés. Le nombre de pions de recirculation dépend de la capacité de charge recherchée. Ils sont répartis sur la périphérie de l'écrou. Le filetage des vis de haute précision est rectifié; il est roulé pour celui des vis de précision moyenne.

Dans une autre version de vis à billes à transfert interne, les billes décrivent un trajet hélicoïdal dans l'écrou, d'une extrémité à l'autre de celui-ci. Elles reviennent à leur point de départ au moyen d'un passage de section circulaire situé à la périphérie de l'écrou.

### 15.5.1.3 VIS À ROULEAUX SATELLITES

Dans les vis à billes, la charge se transmet entre l'écrou et la vis par l'ensemble des billes actives. Le diamètre des billes représente généralement 60 à 70% du pas. La capacité de charge de ce système dépend directement de la pression ponctuelle, fonction du diamètre des billes et du nombre de points de contact. Pour augmenter la capacité d'une vis à roulement, il faut remplacer le contact ponctuel par un contact linéique.

La vis à rouleaux satellites se compose d'un arbre fileté, d'un écrou avec filetage intérieur et d'un certain nombre de rouleaux filetés. Les rouleaux sont logés entre la vis et l'écrou, établissant un contact entre les divers filets. En mouvement de rotation, les rouleaux effectuent un cheminement planétaire autour de la vis. Les rouleaux présentent à leurs extrémités une denture et un embout cylindrique. Les rouleaux conservent leur position dans l'écrou en raison de cet engrenage. Ils sont maintenus pendant leur rotation, parallèlement à l'axe de la vis. Les rouleaux satellites présentent toujours un filet unique. La vis et l'écrou, par contre, ont un même nombre de filets, généralement 4, 5, 6 ou 8. L'avance est le produit du pas des rouleaux satellites par le nombre de filets. Il est recommandé de ne pas soumettre les vis à rouleaux à des régimes de fonctionnement alternatifs de fréquence trop élevée sans précaution.

### 15.5.1.4 VIS À RECIRCULATION DE ROULEAUX

Les vis à recirculation de rouleaux utilisent des rouleaux à gorge. Le rouleau roule sur le filetage de l'écrou et se déplace axialement par rapport à l'écrou. Au terme de chaque rotation d'un rouleau autour de la vis, il doit être ramené dans sa position axiale initiale. Le mouvement axial des rouleaux est commandé par des cames fixées dans l'écrou. Pour libérer les rouleaux de leur charge au moment où ils parviennent aux cames, ce qui est indispensable pour le recyclage, l'écrou comporte un évidement. En abordant cet évidement, les rouleaux accomplissent un mouvement radial qui interrompt le contact entre leurs gorges et les filets de la vis. Ils peuvent alors exécuter leur déplacement axial. Une cage guide constamment les rouleaux et les maintient en position correcte, que ce soit en exploitation ou lors d'un démontage séparant la vis de l'écrou.

Le nombre d'entrées est toujours identique pour la vis et l'écrou. Le pas correspond à l'écartement entre les gorges des rouleaux. Le nombre de filets choisis est habituellement 2 ou 3. Ce type permet d'atteindre une capacité de charge élevée pour une avance faible. Toutefois, une faible avance influe légèrement sur le rendement. L'utilisation de ces vis sous charge alternée à fréquence élevée peut provoquer un matage des cames préjudiciable à la longévité de l'ensemble.

### 15.5.1.5 FLASQUES DE MONTAGE ET PALIERS

Le montage des écrous cylindriques s'effectue directement dans un alésage cylindrique ou les écrous peuvent être livrés équipés de flasques de montage carrés ou cylindriques. Comme les vis doivent être centrées dans un ou deux paliers, les fabricants de vis à roulement offrent également des boîtes de palier et des flasques de montage. Les boîtes de palier sont construites à partir de deux roulements à contact oblique à 40° de la série 72. Des joints d'étanchéité à lèvres s'opposent à la pénétration de corps étrangers et évitent les pertes de lubrifiant. Il est possible d'éliminer complètement le jeu axial dans le palier, de précharger légèrement les roulements tout en conservant un couple à vide minimum. SKF offre aussi des roulements à billes de précision complétant les mécanismes à vis. Ces roulements sont fabriqués avec un angle de contact de 60° et possèdent un grand nombre de billes. Ils peuvent être livrés par jeu de 2, 3 ou 4 pièces, préreglés afin de répartir la charge sur chaque roulement.

## 15.5.2 CHOIX ET CONTRÔLES DES VIS À ROULEMENT

Les vis à roulement sont conçues pour supporter uniquement des charges axiales, donc toute composante radiale doit être évitée. Les charges radiales doivent se transmettre par des guidages linéaires. Si les conditions sévères d'alignement au montage ne peuvent pas être assurées, il faut soit choisir une vis de diamètre plus grand, soit monter l'écrou sur pivots ou cardan, la vis sur roulement à rotule.

### 15.5.2.1 CRITÈRES POUR LE CHOIX D'UNE VIS À ROULEMENT

Le choix d'une vis à roulement s'effectue à partir de plusieurs critères dont les principaux sont énumérés ici.

1. Type de mouvement : très lent avec vitesse linéaire  $< 10$  mm/s, très rapide avec vitesse linéaire  $> 300$  mm/s, position de la charge à déplacer : est ou n'est pas mesurée par la vis.
2. Charge appliquée sur la vis : à l'arrêt, en mouvement sous charge constante, en mouvement sous charge variable, en mouvement de va et vient.
3. Fréquence de rotation : valeurs minimale et maximale, inversion du sens de la charge, vibrations.
4. Service et durée de vie : nombre de courses par heure, d'heures de service par jour, de jour par année et nombre probable d'années d'utilisation, relation (15.5.1).
5. Montage et entretien : type de machine, qualité de l'exécution des pièces annexes avec possibilité d'atteindre la précision exigée, entretien pendant toute la durée de vie.
6. Coût total : prix de revient de la vis à roulement, des flasques et supports de vis et écrou, usinage des parties annexes, réglage et montage.

### 15.5.2.2 NOMBRE DE TOURS EXIGÉ

Sous une charge extérieure égale à la charge dynamique de base, la vis choisie aura une durée de vie  $L_{10}$  de un million de révolutions, 90% des vis à roulement atteignant ou dépassant cette valeur nominale. Le nombre de révolutions à prévoir dans le calcul est égal au produit suivant :

$$L_{\text{rév}} = \frac{\text{course}}{\text{pas}} \cdot \frac{\text{nb. courses}}{\text{heure}} \cdot \frac{\text{heure}}{\text{jour}} \cdot \frac{\text{jour}}{\text{année}} \cdot \text{années.} \quad (15.5.1)$$

Ce nombre de tours total s'exprime le plus souvent en millions de tours.

### 15.5.2.3 CHARGE ÉQUIVALENTE SUR LA VIS

Le mécanisme à vis à roulement commande le plus souvent des pièces en mouvement de va et vient. Les efforts extérieurs et les effets de masse modifient à chaque instant la charge axiale dans la vis. Pour pouvoir calculer la charge dynamique équivalente, il faut déterminer la force moyenne constante de calcul ayant la même influence sur la durée de vie de la vis que la charge variable réelle. En supposant un contact ponctuel entre la vis, les billes et l'écrou, la force axiale de calcul  $F_{\text{cal}}$  se trouve par l'expression usuelle des roulements.

$$F_{\text{cal}} = \sqrt[3]{\frac{F_1^3 l_1 + F_2^3 l_2 + \dots + F_n^3 l_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}}. \quad (15.5.2)$$

avec :  $F_i$  force constante appliquée sur la distance  $l_i$ ,  
 $l_i$  distance sur laquelle la force axiale peut être supposée constante.

## 15. Guidages linéaires à roulements

La durée de vie de la vis ne dépend pas seulement de l'intensité de la force axiale mais aussi du type de charge et du type de cycle. Pour les vis Transrol de la maison SKF, les facteurs de correction sont donnés par les valeurs proposées ci-après.

### Type de charge

Bonne coaxialité de la charge et de l'axe de la vis.

Alignement précis de l'écrou avec les paliers de la vis :

$$f_a = 1,0$$

Coaxialité incertaine de la charge et de la vis :

$$f_a = 1,05 \text{ à } 1,10$$

Défauts caractérisés de coaxialité.

La vis contribue au guidage de la charge :

$$f_a = 1,1 \text{ à } 1,5$$

### Type de cycle

Vitesse constante ou variant progressivement :

$$f_v = 1,0$$

Accélération, inversion rapides, vibrations, mouvements oscillants

à haute fréquence :

$$f_v = 1,05 \text{ à } 1,2$$

Chocs caractérisés, occasionnels à répétition :

$$f_v = 1,1 \text{ à } 1,5$$

### Conditions de lubrification

Lubrifiant propre, appoints réguliers :

$$f_g = 1,0$$

Lubrifiant usagé, appoints insuffisants :

$$f_g = 0,85 \text{ à } 0,5$$

Lubrifiant pollué, présence de particules abrasives :

$$f_g = 0,5 \text{ à } 0,32.$$

La force axiale corrigée ou force équivalente vaut le produit :

$$F_P = F_{cal} \cdot f_a \cdot f_v. \quad (15.5.3)$$

Finalement, la durée de vie en millions de tour se trouve par la relation usuelle des roulements,  $C$  étant la capacité de charge dynamique de base donnée dans les catalogues :

$$L_{10} = f_g \left( \frac{C}{F_P} \right)^3 \cdot 10^6 \text{ tours.} \quad (15.5.4)$$

Ce nombre de tours doit être supérieur au nombre de tours exigé sous (15.5.1), donc :

$$L_{10} > L_{rév.} \quad (15.5.5)$$

### 15.5.2.4 FRÉQUENCE DE ROTATION LIMITE

La fréquence de rotation limite ne devrait pas dépasser 80% de la vitesse critique de l'ensemble. Cette vitesse critique dépend de la longueur et du diamètre de la vis ainsi que de la position et forme des paliers. La longueur et le diamètre sont imposés par la place disponible, la disposition des paliers jouant un rôle de premier plan. Dans certains cas, il faut modifier le pas de la vis pour maintenir la fréquence de rotation hors du domaine critique. La fréquence de rotation limite, exprimée en tours par seconde, peut se calculer au moyen de la formule pratique suivante :

$$n_{lim} = 65 \cdot 10^4 \cdot f_{lim} \cdot \frac{d_0}{l_{pr}^2}. \quad (15.5.6)$$

avec :  $d_0$  le diamètre à fond de filet de la vis, exprimé en mm,

$l_{pr}$  la distance entre les appuis de paliers supportant la vis, exprimée en mm,

$f_{lim}$  le facteur caractérisant le type de montage et le type de palier (figure 15.16);  
type de palier : appui simple, appui à encastrement (2 rangées de billes).

Si la fréquence de rotation est dépassée, il faut augmenter le diamètre de la vis ou améliorer les conditions d'appui de l'arbre.

### 15.5.2.5 CONTRÔLE DU FLAMBEMENT

Pratiquement, tous les mécanismes à vis à roulement doivent supporter en un ou plusieurs points de la course un effort de compression. Il convient de vérifier la vis au flambement comme dans une poutre. Le diamètre à fond de filet  $d_0$  de la vis adoptée doit être supérieur à la valeur limite donnée par la formule suivante :

$$d_0 \geq \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 64 F_a \cdot l_{cr}^2}{\pi^3 E \cdot f_{cr}}} \quad (15.5.7)$$

Dans cette relation,  $l_{cr}$  est la longueur de calcul de la partie sollicitée en compression et  $E$  est le module d'élasticité. Si cette expression n'est pas satisfaite, il faut augmenter le diamètre de la vis. La formule contient un facteur de sécurité de 3.

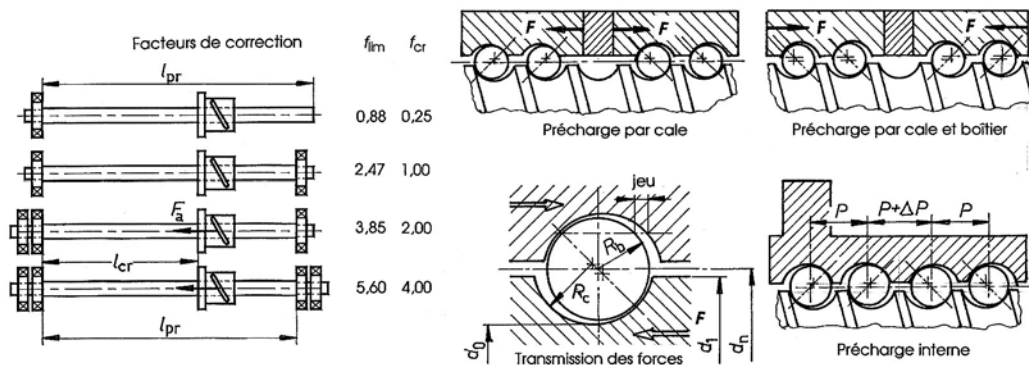


Figure 15.16 Influence de la position des appuis sur la vitesse critique et le flambement  
Dimensions générales Précontrainte entre la vis et l'écrou

### 15.5.2.6 CHARGE STATIQUE SUR LE MÉCANISME

La charge statique de base  $C_0$  est définie par la charge constante et centrée pour laquelle la déformation permanente totale de l'un des chemins de roulement et de l'élément roulant le plus chargé atteint 0,0001 du diamètre de cet élément. Il est également possible de définir le coefficient de sécurité en charge statique comme le rapport de la charge statique de base à la force statique équivalente  $F_{P0}$ .

$$S_0 = \frac{C_0}{F_{P0}} \quad (15.5.8)$$

Le coefficient de sécurité sera choisi en fonction du type de charge et de l'incertitude dans l'adoption de la valeur exacte.

## 15.5.3 GÉOMÉTRIE ET COMPORTEMENT

Les catalogues des fabricants donnent les dimensions extérieures de la vis et de l'écrou, la valeur du pas et le nombre de circuits de billes.

### 15.5.3.1 DIMENSIONS DE LA VIS

Les dimensions principales de la vis sont les suivantes :

- diamètre nominal de la vis :  $d_n$ ,
- diamètre extérieur de la vis :  $d_1$  champ de tolérance selon la qualité,
- diamètre intérieur de la vis :  $d_0$  champ de tolérance selon la qualité,



## 15. Guidages linéaires à roulements

- pas :  $P$  champ de tolérance selon la qualité,
- sens du filetage : à droite par défaut, exceptionnellement à gauche,
- mode de fabrication : roulé à froid, trempé, parachevé par microbillage, ou rectifié,
- nombre de tours des éléments roulants,
- nombre de circuits de billes.

L'angle du filet de la vis, défini à partir du pas et du diamètre nominal de la vis, se trouve par la relation valable pour tous les mécanismes à vis, soit :

$$\tan \gamma = \frac{P}{\pi \cdot d_n} \quad (15.6.1)$$

*Exemple* : Vis SKF Transrol SFC, diamètre nominal 25 mm, pas 25 mm, angle du filet :

$$\gamma = \arctan(25 \text{ mm/p.} 25 \text{ mm}) = 17,66^\circ.$$

L'angle du filet influe moins sur le rendement de la vis à roulement car le coefficient de frottement équivalent se situe entre 0,006 et 0,0016 pour les conceptions usuelles.

### 15.5.3.2 PRÉCONTRAINTÉ ENTRE LA VIS ET L'ÉCROU

Dans les vis à billes avec filetage roulé de précision moyenne, chaque écrou est apparié avec sa vis afin d'assurer un jeu axial minimum et d'améliorer la précision de positionnement. Le jeu axial est de 0,1 mm au maximum et le rattrapage du jeu s'effectue par rondelles élastiques entre deux écrous. La distance entre les deux écrous peut être ajustée. La disposition des trous de fixation sur les flasques permet un réglage par pas de 1/30 du pas de la vis. Cette gamme de vis est normalement conçue pour des applications avec vis tournante. La fréquence de rotation est limitée par le produit de cette fréquence  $n$  en t/s par le diamètre nominal  $d_n$  en mm; ce produit  $n \cdot d_n < 1000$  et  $n$  ne devrait pas dépasser 100 tours par seconde.

Dans les mécanismes à vis à roulement de précision, avec vis rectifiée ou roulée, la rigidité et la précision peuvent s'améliorer par une précharge. Avec un seul écrou non préchargé, le jeu axial est compris entre 0,02 et 0,05 mm selon l'exécution. Pour éliminer les jeux et augmenter la rigidité du mécanisme, la précharge peut se réaliser par l'une des méthodes suivantes.

#### 1. Conception avec deux écrous et une cale de précharge.

Le réglage de la précharge s'obtient par la rectification de l'épaisseur de la cale interposée entre les deux écrous. Cette opération est effectuée en usine avant la livraison. Il faut exercer le même effort sur les deux écrous que celui appliqué lors du réglage en usine. La précharge peut s'effectuer en extension ou en compression. Dans ce dernier cas, la précharge se réalise le plus souvent par un bouchon fileté venant presser l'un des écrous cylindriques. Le couple de serrage du bouchon implique la force axiale produite. Après montage, il faut vérifier la conformité du couple de précharge avec les spécifications du fabricant. La figure 15.16 montre les diverses possibilités de précharge.

#### 2. Conception avec un écrou à précharge interne.

La précharge s'obtient dans un écrou fileté avec un décalage  $\Delta P$  entre deux groupes de circuits à billes. Le réglage de la précharge est effectué en usine avant la livraison.

### 15.5.3.3 RENDEMENT DU MÉCANISME

Le rendement du mécanisme est à calculer pour la transformation d'un mouvement de rotation en un mouvement de translation rectiligne ainsi que dans le sens inverse. Les systèmes à billes possèdent un rendement supérieur à celui des systèmes à rouleaux car les pertes n'existent qu'au niveau des surfaces de roulement.

*Rendement direct* : transformation d'un couple en une force axiale.

L'application de la relation générale du rendement mécanique valable pour les vis et écrous à frottement selon la loi de Coulomb est aussi applicable aux vis à roulement. Le rendement direct, en charge moyenne, s'exprime par le rapport usuel :

$$\text{Mécanisme vis - écrou : } \eta_{\text{méc}} = \frac{\tan \gamma}{\tan(\gamma + \rho_e)} \quad (15.6.2)$$

avec :  $\rho_e$  angle de frottement équivalent. Les valeurs usuelles du coefficient sont :

vis à billes de précision  $\mu_e = 0,006$ ,  
vis à billes de précision moyenne  $\mu_e = 0,075$ ,  
vis à rouleaux satellites  $\mu_e = 0,009$  à  $0,016$  selon les versions.

*Rendement indirect* : transformation d'une force axiale en couple

Dans ce cas, le rendement mécanique se trouve par la relation :

$$\text{Mécanisme vis - écrou : } \eta_{\text{méc1}} = \frac{\tan(\gamma - \rho_e)}{\tan \gamma} \quad (15.6.3)$$

Si la réversibilité est un handicap dans la conception, il est nécessaire de prévoir un organe de sécurité intermédiaire comme un frein.

#### 15.5.3.4 COUPLE ET PUISSANCE À PRODUIRE

Les grandeurs mécaniques dépendent directement des efforts appliqués, du rendement et du sens de la transformation de mouvement.

Transformation	Rotation → translation	Translation → Rotation
Force axiale :	$F_a$	$F_a = \frac{2\pi \cdot M}{P[m] \cdot \eta_{\text{méc1}}}$
Couple :	$M = \frac{F_a \cdot P[m]}{2\pi \cdot \eta_{\text{méc}}}$	$M$
Puissance :	$P_{\text{méc}} = \frac{F_a \cdot P[m] \cdot n}{\eta_{\text{méc}}}$	$P_{\text{méc}} = \frac{2\pi \cdot n \cdot M}{\eta_{\text{méc1}}}$

(15.6.4)

avec :  $F_a$  force axiale en newtons,  
 $P$  pas de la vis en mètre,  
 $n$  fréquence de rotation en tours par seconde,  
 $P_{\text{méc}}$  puissance mécanique en watts,  
 $M$  couple en m·N.

## CHAPITRE 16

# ACCOUPLLEMENTS ET JOINTS D'ARBRE

Les accouplements et les joints d'arbre ont pour objet de relier deux arbres et de transmettre un couple de torsion à la fréquence de rotation imposée par l'arbre menant. La plupart de ces éléments sont fabriqués en grande série par des maisons spécialisées suivant les normes en vigueur, soit pour les cotes de raccordement, soit pour l'accouplement complet. Le choix correct de l'accouplement est dicté par la géométrie des axes, les erreurs de centrage et d'alignement, la durée de vie exigée, les facilités de montage, de démontage et d'entretien, le prix de revient, l'amortissement désiré, etc.. Le couple maximal à transmettre par un accouplement s'exprime à partir de la puissance motrice, de la fréquence de rotation et du facteur de service. Le couple maximal se calcule par l'expression :

$$M_{\text{tmax}} = f_s \cdot M_{\text{tnom}},$$

avec :  $M_{\text{tnom}} = P_{\text{nom}} / \omega_{\text{nom}}$  le couple nominal,  
 $f_s$  facteur de service tenant compte des irrégularités dans la transmission,  
 $M_{\text{tmax}}$  couple maximal permettant de trouver la taille de l'accouplement.

Le facteur de service diffère très souvent d'un fabricant à l'autre. Les accouplements peuvent se subdiviser en deux catégories : accouplements rigides et accouplements souples. Les critères du choix sont principalement :

1. Facilité d'implantation et de démontage : si possible sans déplacement axial des arbres.
2. Aucune pièce dangereuse en protubérance lorsque l'accouplement ou le joint est en mouvement de rotation.
3. Masse minimale des pièces constituant l'ensemble afin d'éviter des sollicitations supplémentaires dans les arbres et sur les appuis.
4. Moment d'inertie de masse le plus faible possible.
5. Balourds réduits au minimum surtout pour les accouplements prévus pour les grandes fréquences de rotation. Dans ce dernier cas, l'accouplement monté sur les arbres doit être équilibré dynamiquement.
6. Prix de revient acceptable en fonction de la qualité des machines reliées par l'accouplement ou le joint d'arbre.

### 16.1 ACCOUPLEMENTS RIGIDES

Les accouplements rigides transmettent le couple de torsion entre les arbres menant et menés par l'intermédiaire de pièces ajustées, par emboîtement de surfaces cylindriques ou par frottement de pièces serrées l'une contre l'autre. Ils exigent un excellent centrage des axes afin de ne transmettre qu'un couple de torsion pur. Dans les grandes turbomachines, les accouplements sont toujours placés aux points à moments nuls de flexion.

#### 16.1.1 ACCOUPLEMENTS À PLATEAUX AVEC BOULONS AJUSTÉS

Les plateaux viennent directement de forge ou sont rapportés sur les arbres et fixés par clavette, par alésage tronconique, par frettage, par soudure circulaire, etc.. Le centrage se réalise par emboîtement, la partie mâle se trouvant habituellement sur le plateau moteur. Le plateau mené est équipé parfois de trous filetés pour les vis de déboîtement.

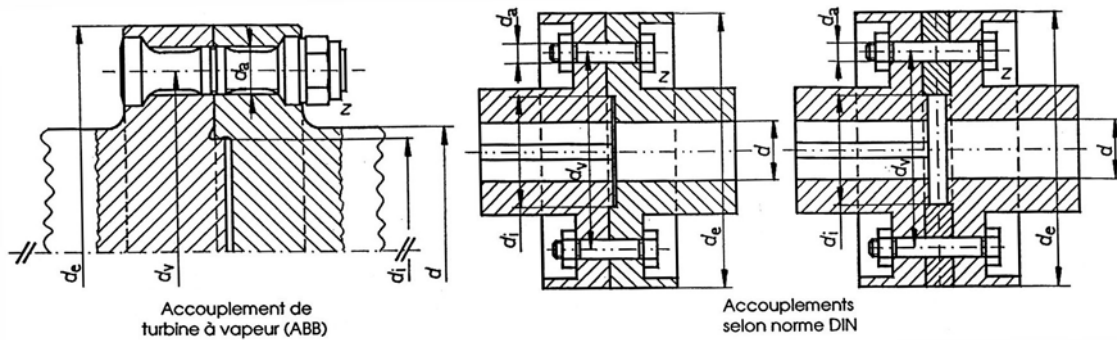


Figure 16.1 Accouplement à plateaux pour turbomachines, selon norme DIN 116

### 16.1.2 ACCOUPLEMENTS À FROTTEMENT PAR PLATEAUX

Dans ce type d'accouplement, la transmission du couple s'effectue seulement par le frottement des plateaux serrés l'un contre l'autre. Le couple transmissible doit rester inférieur au couple de glissement entre surfaces serrées.

### 16.1.3 COUPLE TRANSMISSIBLE PAR L'ACCOUPLEMENT

Le couple de torsion transmissible par l'accouplement comprend deux effets : le frottement entre les plateaux et le cisaillement des boulons ajustés. La pression entre les plateaux, supposée répartie uniformément, se calcule par :

$$p = \frac{F_{\text{serrage}}}{A_{\text{plateaux}}} = \frac{z F_a}{\pi (d_e^2 - d_i^2) / 4} \leq p_{\text{adm}}, \quad (16.1.1)$$

avec :  $z$  nombre de vis de serrage,  
 $F_a$  force axiale au serrage des vis,  
 $d_e, d_i$  diamètres extérieur et intérieur de la surface circulaire de contact.

Le couple de torsion  $M_{t,\mu}$ , transmissible seulement par frottement, peut se trouver en introduisant les notions fondamentales entrevues au chapitre 1 et les particularités du calcul des vis de serrage :

$$M_{t,\mu} = \frac{d_m}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{F_{\text{résiduelle}}}{\alpha_A} = \frac{(d_e + d_i) \cdot \mu_0 \cdot z (F_a - F_Z)}{4 \alpha_A S_{\text{gl}}}, \quad (16.1.2)$$

avec :  $d_m = 1/2 (d_e + d_i)$  diamètre moyen de serrage,  
 $\mu_0$  coefficient de frottement d'adhérence entre les surfaces,  
 $S_{\text{gl}}$  sécurité au glissement,  
 $\alpha_A$  facteur de serrage du système à vis,  
 $F_Z$  perte de serrage engendrée par le tassement des surfaces.

Le couple de torsion transmissible par le cisaillement des boulons ajustés peut se calculer en supposant une contrainte de cisaillement admissible répartie uniformément dans la section :

$$M_{t,\tau} = \frac{d_v}{2} \cdot z F_{c,\text{adm}} = \frac{d_v \cdot z \cdot \pi d_a^2 \cdot \tau_{\text{adm}}}{8}, \quad (16.1.3)$$

avec :  $d_v$  diamètre de serrage des vis,  
 $d_a$  diamètre de la section de cisaillement  
 $F_{c,\text{adm}}$  force de cisaillement admissible,

$\tau_{adm}$  contrainte de cisaillement admissible dans la section des boulons.

Le couple total transmissible est la somme de ces deux couples. Très souvent, seul le couple engendré par le frottement entre les plateaux est introduit dans le contrôle et le cisaillement dans les boulons sert seulement à améliorer la fiabilité de l'entraînement.

$$M_{t,transmissible} = M_{t,\mu} + M_{t,\tau} \leq M_{tmax}. \quad (16.1.4)$$

## 16.2 TAILLE DES ACCOUPLEMENTS DÉFORMABLES

Les accouplements souples comprennent de nombreuses familles d'éléments de transmission, chaque fabricant offrant plusieurs modèles dans les catalogues. Les accouplements déformables sont introduits entre des arbres dont l'alignement n'est pas parfait, ce qui est pratiquement toujours le cas, ou pour éviter la transmission des à-coups entre la partie motrice et la machine menée. La recherche de la taille de l'accouplement dépend non seulement du couple nominal et du facteur de service, mais aussi du comportement total de l'entraînement.

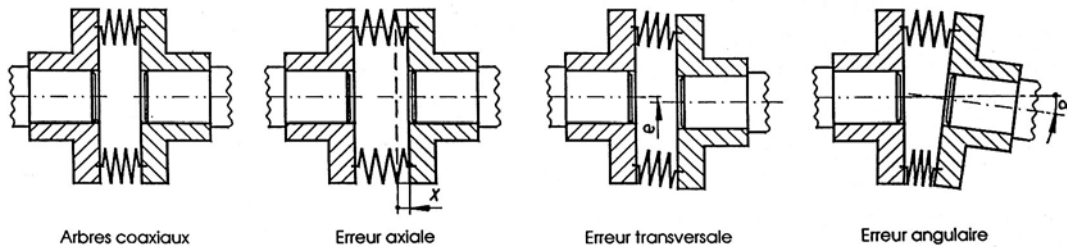


Figure 16.2 Erreur de positionnement des arbres dans les accouplements élastiques

### 16.2.1 ERREURS DANS LE POSITIONNEMENT DES ARBRES

Les arbres de la partie motrice et de la partie menée ne sont jamais parfaitement alignés et les erreurs de positionnement sont la résultante d'erreurs partielles comprenant :

1. *Erreur axiale* : ce défaut est presque toujours présent dans tous les accouplements, engendré par la dilatation thermique et le positionnement des arbres. Il provoque une force axiale  $F_x$  calculable par :

$$F_x = k_x \cdot x, \quad (16.2.1)$$

avec :  $k_x$  raideur axiale de l'ensemble,  
 $x$  défaut axial.

2. *Erreur transversale* : les arbres menant et mené sont excentrés de la distance  $e$ . Pour éliminer ce défaut, il faut produire une force radiale  $F_e$  calculable par :

$$F_e = k_e \cdot e, \quad (16.2.2)$$

avec :  $k_e$  raideur radiale de l'ensemble,  
 $e$  défaut transversal.

3. *Erreur angulaire* : les arbres menant et mené se coupent et forment un angle  $\alpha$ . Pour éliminer ce défaut d'alignement, il faut produire un couple  $M_\alpha$  calculable par :

$$M_\alpha = k_\alpha \cdot \alpha, \quad (16.2.3)$$

avec :  $k_\alpha$  raideur angulaire de l'ensemble,

$\alpha$  défaut angulaire.

4. *Effet des erreurs sur l'accouplement* : les trois forces et couple provoquent des sollicitations supplémentaires sur la transmission, soit dans l'accouplement lui-même, soit dans les appuis des arbres. Les raideurs dynamiques, définies en charge variable, sont supérieures aux raideurs statiques données sous déformation constante; elles sont indicées par dyn.

### 16.2.2 COUPLES DANS LA TRANSMISSION

Les accouplements déformables reprennent les sollicitations en torsion de différentes manières. Le tableau 16.1 représente schématiquement les types fondamentaux des couples : constant, périodiques ou non périodiques. La définition des couples, existant pour la machine motrice (indice m) et pour la partie entraînée (indice e), comprend :

- couples nominaux :  $M_{nm} = P_{nm}/\omega_{nm}$  et  $M_{ne} = P_{ne}/\omega_{ne}$ ,
- couples de pointe :  $M_{sm}$  et  $M_{se}$ ,
- amplitude de la i - ème harmonique du couple :  $M_{wmi}$  et  $M_{wei}$ .
- fréquence de la i - ème harmonique :  $f_i$ .

Les effets de masse sont caractérisés par les moments d'inertie de masse des deux parties constituant l'entraînement :

- moment d'inertie de la partie motrice :  $I_m$ ,
- moment d'inertie de la partie entraînée :  $I_e$ ,
- rapport des moments d'inertie :  $m = I_m/I_e$ .

### 16.2.3 MÉTHODES DE RECHERCHE DE LA TAILLE

La recherche de la taille ou du comportement de l'accouplement élastique peut s'effectuer selon trois méthodes plus ou moins évoluées :

1. Recherche élémentaire au moyen des renseignements donnés dans les divers catalogues des fournisseurs. À partir du couple nominal, le couple maximal se trouve en multipliant cette valeur par des facteurs tenant compte de la machine motrice et de la machine réceptrice, du type de cycle, du facteur de service, etc..
2. Recherche de la taille et du couple maximal en supposant un comportement linéaire de l'accouplement. Le système est alors composé de deux masses en rotation reliées par un ressort et un amortisseur.
3. Recherche de la taille et du couple maximal en introduisant le comportement de tous les composants : moteur, récepteur, accouplement. Le comportement de l'ensemble est étudié par simulation ou numériquement en tenant compte de l'allure des couples et de la non linéarité de l'accouplement.

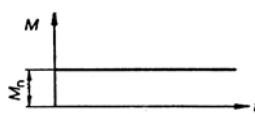
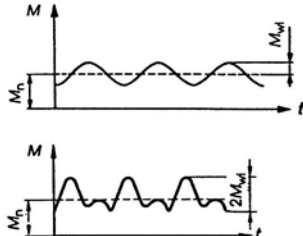

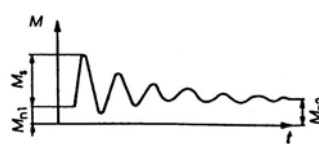
La caractéristique d'amortissement  $\psi$  se définit par le rapport de l'énergie d'amortissement pendant un cycle complet de charge et de décharge à l'énergie élastique de déformation des éléments amortisseurs :

$$\psi = \frac{W_{am}}{W_{el}}, \quad (16.2.4)$$

avec :  $W_{am}$  énergie anéantie dans les amortisseurs,  
 $W_{el}$  énergie de la déformation élastique linéaire.

## 16. Accouplements et joints d'arbre

Tableau 16.1  
**Facteurs de correction et relations de calcul (DIN 740 Teil 2)**

A. Facteurs de correction				
1. Facteur de démarrage $f_Z$				
Il dépend du nombre de démarrages $Z$ par heure				
$Z =$	$\leq 120$	$120 < Z \leq 240$	$Z > 240$	
$F_Z =$	1,0	1,3	à demander au fabricant	
2. Facteur de température $f_\square$ : températures normales de 10°C à 30°C.				
Valable pour les éléments en caoutchouc, il dépend de la composition et de la température en service.				
Températures		Composition du caoutchouc		
En service	naturel	polyuréthane	perbunan	
-20°C à +30°C	1,0	1,0	1,0	
>30°C à +40°C	1,1	1,2	1,0	
>40°C à +60°C	1,4	1,4	1,0	
>60°C à +80°C	1,6	1,8	1,2	
3. Facteur de fréquence pour couples dynamiques $f_f$				
Il dépend de la fréquence de la composante alternée du couple. Il tient compte indirectement de l'échauffement des parties déformables.				
- fréquence $f \leq 10$		$f_f = 1,0$		
- fréquence $f > 10$		$f_f = 0,1 f$		
4. Facteur de la fréquence de rotation $f_n$				
Il dépend de la fréquence de rotation de la transmission.				
5. Facteur d'à-coups : il vaut en moyenne $f_s = 1,8$				
B. Relations de calcul				
Relation		Allure de la sollicitation		
1. Couple statique				
$M_n = M_{nm}$ ou $M_n = M_{ne}$				
2. Couple harmonique pulsant et couple périodique				
$M_{wi} = M_{mi} [1/(1+m)] V_{fi}$				
Ou				
$M_{wi} = M_{ei} [m/(m+1)] V_{fi}$				
3. Couple non périodique avec passage par la résonance				
$M_s = M_{mi} [1/(1+m)] V_r + M_e$				
4. Couple non périodique avec à-coups				
$M_s = M_{sm} [1/(1+m)] f_s + M_e$				

La fréquence propre en torsion du système mécanique composé des deux masses et du ressort se trouve par la relation vue précédemment au chapitre 10 :

$$f_{pr} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k_{t \text{ dyn}} \left( \frac{1}{I_m} + \frac{1}{I_e} \right)}, \quad (16.2.5)$$

Le facteur d'amplification du couple peut s'exprimer en fonction de la fréquence propre et de la fréquence de la  $i$ -ème harmonique, de la caractéristique d'amortissement  $\psi$ , par :

$$V_{fi} = \sqrt{\frac{1 + \psi^2 / 4\pi^2}{(1 - f_i^2 / f_{pr}^2)^2 + \psi^2 / 4\pi^2}}, \quad (16.2.6)$$

et le facteur d'amplification à la résonance, pour  $f_i = f_{pr}$ , par :

$$V_r = \sqrt{\frac{1 + \psi^2 / 4\pi^2}{\psi^2 / 4\pi^2}} \approx \frac{2\pi}{\psi}. \quad (16.2.7)$$

Ces divers facteurs interviennent dans le calcul du couple de référence. La taille définitive de l'accouplement va dépendre de tous les facteurs de correction donnés dans le tableau 16.1 sous A. De plus, le couple d'essai sur l'accouplement ne doit pas provoquer de déformations permanentes dans cet élément et le couple nominal doit être au minimum égal au couple nominal de la partie entraînée.

#### 16.2.4 PRINCIPE DE LA MÉTHODE ÉVOLUÉE

On entend par méthode évoluée une méthode dans laquelle le modèle de la transmission, constitué par les parties menante et menée, par l'accouplement élastique, est mis sous forme d'équations différentielles, généralement non linéaires, et résolu au moyen d'une simulation analogique ou d'un logiciel numérique. Cette méthode doit intervenir lorsque :

- la transmission ne se laisse pas réduire en un système simple à deux masses et un ressort + amortisseur;
- les caractéristiques de l'accouplement ne peuvent pas se linéariser dans le domaine probable des sollicitations;
- l'allure des à-coups ne se laisse pas simuler par un signal échelon;
- la transmission comprend du jeu non négligeable;
- l'augmentation du couple, par rapport au couple nominal, est à trouver pour les divers passages en résonance;
- la température finale des éléments déformables est fonction d'une charge non harmonique;
- la connaissance des valeurs en régime transitoire est une exigence impérative dans le cahier des charges.

La méthode évoluée peut comprendre la simulation de toutes les sollicitations sur les arbres et dans l'accouplement en tenant compte de l'évolution dans le temps des couples sur les parties motrice et menée, dans le domaine des fréquences de rotation de la transmission. La recherche des phénomènes vibratoires impose l'intégration d'équations différentielles non linéaires. Ces contrôles étendus sont réservés aux installations à haute qualité technique et exigences économiques élevées. Ils s'introduisent seulement dans des conditions particulières de comportement. De plus, ils imposent une collaboration intense entre les divers fabricants ou fournisseurs des machines et de l'accouplement afin de connaître parfaitement toutes les caractéristiques des composants.



### 16.3 DESCRIPTION DES ACCOUPLEMENTS DÉFORMABLES

Cette description contient une collection très limitée des diverses catégories d'accouplements élastiques existant dans le commerce. Les accouplements sont livrés soit pré alésés, soit au diamètre définitif avec rainure de clavette si nécessaire.

#### 16.3.1 ACCOUPLEMENTS À ÉLÉMENTS MÉTALLIQUES

Les éléments métalliques permettent de transmettre des couples importants sous un volume restreint tout en conservant une bonne rigidité.

##### 1. Joint de dilatation

Le joint de dilatation permet de compenser seulement les erreurs axiales sur les arbres accouplés. Il se compose de deux manchons, équipés de deux ou trois crabots, calés sur les arbres et d'une bague intermédiaire de centrage chassée dans l'un des manchons. Le couple transmissible est limité par la pression sur les faces actives en contact.

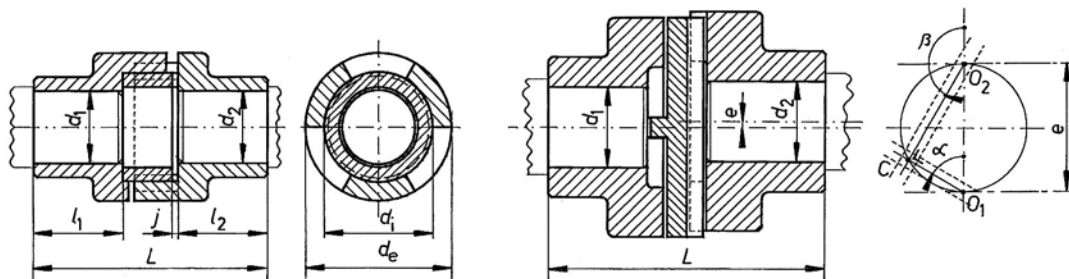


Figure 16.3 Joints de dilatation Joint Oldham avec position des languettes de guidage

##### 2. Joint Oldham

Ce joint autorise un faible déplacement relatif radial des arbres. Il se compose de deux manchons rainurés fixés sur les arbres et d'un plateau intermédiaire muni d'une languette sur chaque face. Les faces actives des languettes forment un angle droit entre elles. Le joint est homocinétique car en chaque position, le rapport des vitesses angulaires des arbres moteur et mené reste constant.

Les centres des arbres étant désignés par  $O_1$  et  $O_2$ , le point  $C$  se déplace sur une circonférence de diamètre  $O_1O_2$ . Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont reliés par la relation :  $\beta = \alpha + \pi/2$ . La dérivée de ces deux positions angulaires par rapport au temps donne :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \omega_2 = \omega_1.$$

Le contrôle de la pression, supposée répartie linéairement sur les faces actives des languettes, est complété par la vérification des sollicitations entre les arbres et leurs moyeux.

##### 3. Accouplement avec ressorts élastiques

La présence d'éléments élastiques en métal, placés à l'intérieur de l'accouplement, permet de transmettre aisément des couples très importants. Ces ressorts peuvent travailler en flexion, en torsion, en compression, suivant la forme adoptée.

Le premier accouplement se compose en principe de deux plateaux maintenus l'un par rapport à l'autre en position axiale par une articulation sphérique, trois tourillons fixés dans chacun des plateaux comprimant des ressorts hélicoïdaux, figure 16.4 à gauche (Accouplement ELSI-

HYDROSTAR muni de cônes). L'exécution représentée sur la figure est réservée aux entraînements sur bateaux.

L'accouplement représenté sur la figure 16.4 à droite, entièrement métallique, utilise un ruban métallique travaillant principalement en flexion. La forme particulière du ruban, en plusieurs tronçons, et des guidages dans les flasques réduit le bras de levier en fonction de la charge et permet ainsi d'augmenter la rigidité. Les ressorts sont maintenus en position par un manchon de protection.

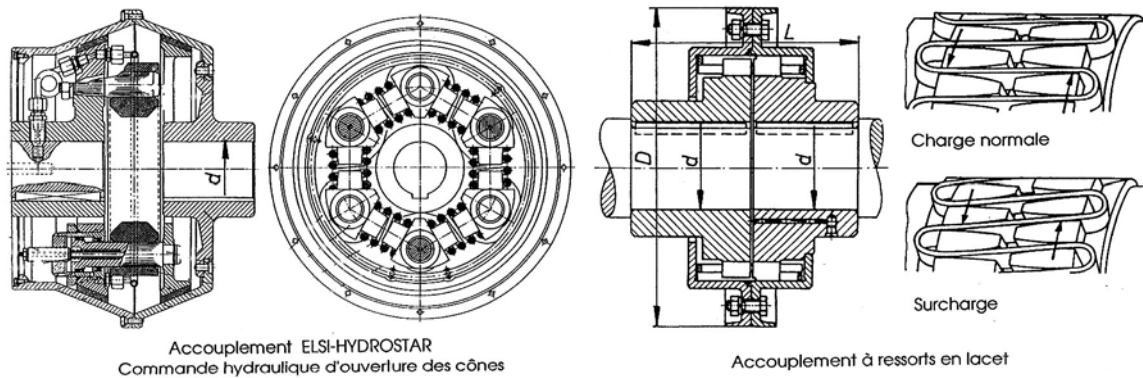


Figure 16.4 Accouplements à ressort hélicoïdal comprimé et ressort à lame en lacet

#### 4. Accouplement à denture

Les accouplements à dents compensent les déviations angulaires et les désalignements d'axes. Ils autorisent la dilatation longitudinale des arbres, n'engendrent aucune poussée axiale susceptible de surcharger les paliers, conviennent pour les deux sens de rotation, sont prévus principalement pour un montage horizontal. Ils existent dans de nombreuses exécutions pour des arbres allant de quelques millimètres, les dentures étant en matière synthétique, jusqu'à 1000 mm.

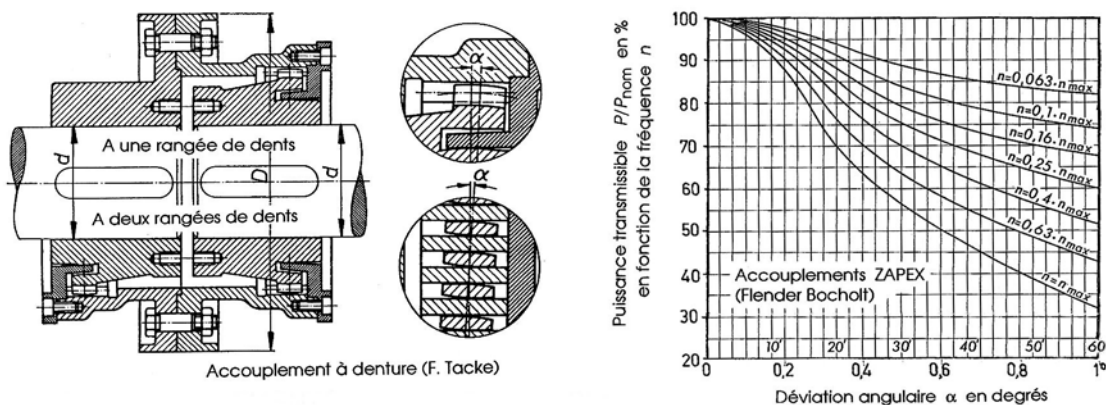


Figure 16.5 Accouplements à denture (ZAPEX de Flender Bocholt)

L'accouplement à denture est de conception symétrique. Dans l'exécution en acier, les deux parties du joint sont emmanchées à chaud ou fixées sur les bouts d'arbre à relier par clavettes parallèles ou inclinées. Elles sont munies de dentures extérieures droites, bombées, fraisées dans un segment de sphère équatorial. Le centre de cette sphère est le point où l'axe de la denture intercepte l'axe de l'arbre.

La denture extérieure est bombée de telle sorte que la largeur de la dent décroît de chaque côté à partir de son centre. La denture interne du manchon est par contre cylindrique et les flancs

restent parallèles. La forme bombée des dents et l'existence d'un léger jeu permettent aux parties de l'accouplement de pivoter à l'intérieur du manchon. Le centrage du manchon par rapport aux parties de l'accouplement se fait automatiquement par l'engrènement des dentures. Cette conception réalise une articulation; l'accouplement complet est doublement articulé donc flexible. La déviation angulaire des arbres mal alignés produit un mouvement de va et vient entre les dents bombées et la denture intérieure. Une lubrification à l'huile ou à la graisse est indispensable, le lubrifiant étant projeté sur les dentures. L'étanchéité est assurée par des bagues munies de joints souples.

#### 5. Accouplement à paroi flexible

Dans ce genre d'accouplement, la transmission du couple s'effectue grâce à la rigidité tangentielle d'une paroi plane et l'élasticité transversale de cette membrane élimine les effets du désalignement des axes. Un exemplaire de cette famille est l'accouplement ARPEX de la maison Flender. Ce joint d'arbre est équipé d'éléments élastiques composés d'un empilage de lamelles en acier inoxydable formant un anneau continu, figure 16.6 à droite. Cet ensemble forme une transmission compacte, pratiquement sans jeu, rigide en torsion, élastique en flexion, assurant un rapport constant des vitesses angulaires. Il se compose en principe de deux flasques fixés sur les arbres menant et mené, un manchon intermédiaire et deux anneaux flexibles. La fixation de l'anneau s'effectue au moyen de vis ajustées serrées d'une part dans les flasques, d'autre part dans le manchon intermédiaire.

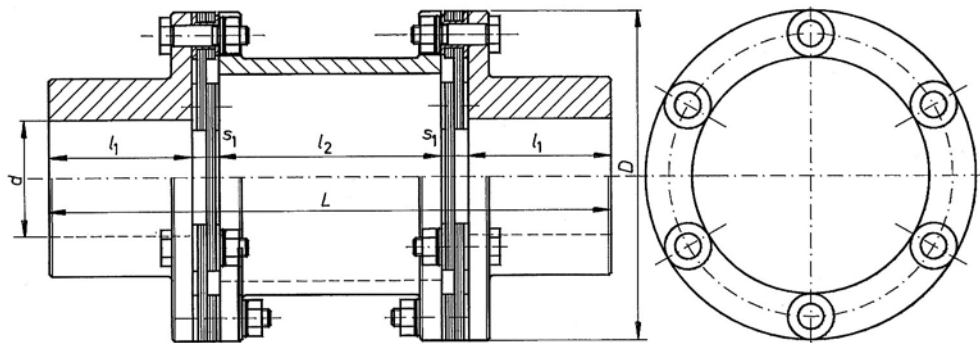


Figure 16.6 Accouplement ARPEX entièrement métallique de la maison Flender avec composants

### 16.3.2 ACCOUPLEMENTS À ÉLÉMENTS EN CAOUTCHOUC

Dans cette famille de joints d'arbre, de nombreuses variantes sont à la disposition des utilisateurs. Ces accouplements compensent les petites erreurs d'alignement des arbres, amortissent les à-coups et baissent la fréquence de résonance de la transmission. L'énergie mécanique perdue dans les composants en caoutchouc se transforme en énergie thermique et limite de ce fait la puissance transmissible. La description ci-après comprend seulement quelques solutions typiques. Les fabricants offrent de nombreuses variantes à partir de quelques composants fondamentaux.

La figure 16.7 à gauche montre deux petits accouplements : le premier avec une étoile en caoutchouc placée entre les doigts d'entraînement des deux flasques, le deuxième à denture bombée, la solution mécanique étant tout à fait semblable à celle de la conception métallique, le manchon intermédiaire étant en polyamide.

#### 1. Accouplement avec tampons en caoutchouc

Cet accouplement se compose en principe de trois parties : un plateau menant avec doigts d'entraînement moulés, un plateau mené avec le même nombre d'alvéoles, un certain nombre

de tampons logés dans les alvéoles et répartis autour du moyeu. Des doigts de forme particulière viennent s'emboîter entre les tampons élastiques. Les plateaux sont fabriqués en fonte grise et les tampons sont en perbunan afin de résister aux projections de liquides gras. Les tampons sont principalement soumis à un effort de compression, leur rigidité augmentant avec le couple à transmettre. La caractéristique non linéaire de l'accouplement et ses bonnes qualités d'amortissement assurent la protection des organes commandés. Ce type compense les désalignements  $e$  et les déviations angulaires  $\alpha$  ainsi que de légers déplacements axiaux.

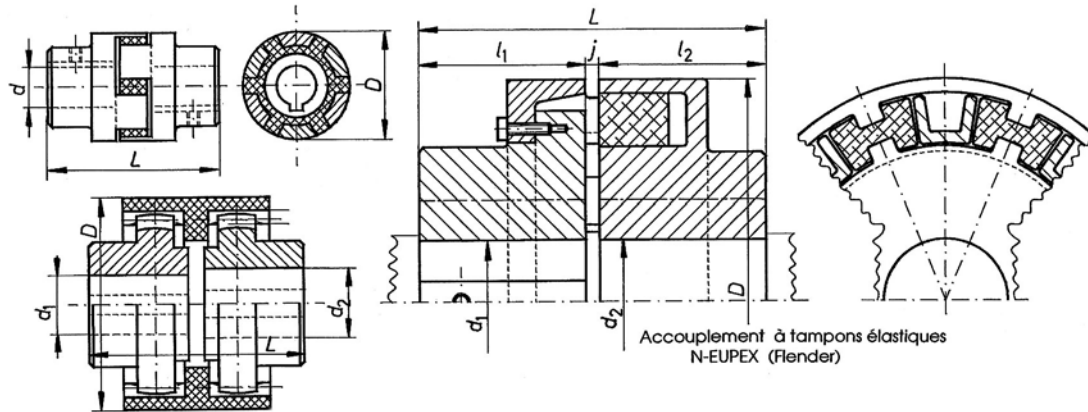


Figure 16.7 Accouplements en matière synthétique et à tampons de caoutchouc

## 2. Accouplement semi-élastique à broches et tonnelets de compression

Les accouplements semi-élastiques à broches se composent de deux moyeux en fonte perlitique dont un seul est équipé de broches d'entraînement sur lesquelles viennent se monter des tonnelets élastiques en caoutchouc. L'élasticité torsionnelle protège l'ensemble de l'installation car la courbe caractéristique croît d'une façon progressive d'où limitation de l'amplitude des vibrations éventuelles. Sous l'effet du couple nominal, l'angle de torsion est d'environ  $1,5^\circ$  à  $2^\circ$ . Il est possible, dans des cas spéciaux, d'utiliser des manchons d'une dureté différente présentant une autre courbe caractéristique d'élasticité. L'élasticité transversale et l'effet de la flexion sur les broches facilitent l'alignement des machines et le déplacement axial des manchons dans le sens longitudinal autorise un déplacement des arbres. La disposition des broches et les dimensions réduites des tonnelets permettent de prévoir des moyeux relativement importants et d'obtenir un faible moment d'inertie de masse. Le comportement à la chaleur de la matière des tonnelets limite la température ambiante admissible à  $80^\circ\text{C}$  en atmosphère humide. Le démontage de l'accouplement s'effectue par déplacement axial d'un des moyeux.

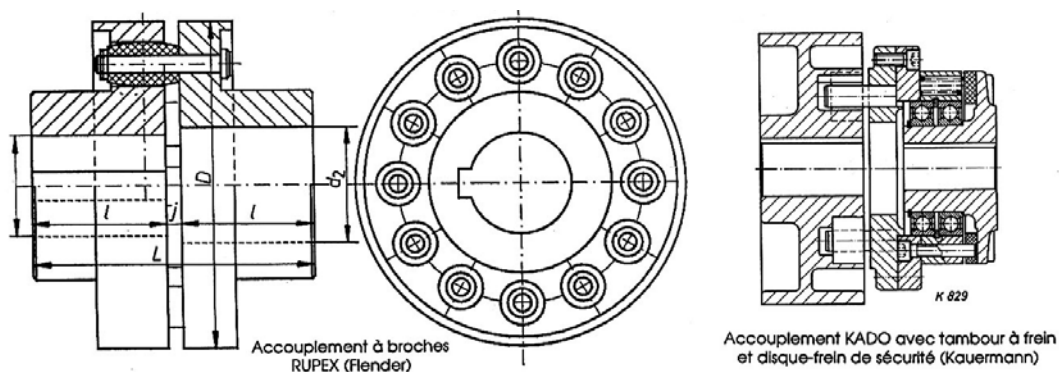


Figure 16.8 Accouplement semi-élastique avec broches et tonnelets : principe de base  
Accouplement monté dans un tambour de frein avec disque de sécurité

### 3. Accouplement à toile ou tore élastique

Ce type d'accouplement existe en de nombreuses variantes chez la plupart des fabricants. La transmission du couple de torsion se réalise par une rigidité tangentielle plus importante de la toile ou du tore monté entre le flasque moteur et le moyeu mené. La figure 16.9 montre deux versions à toile radiale de ce type d'accouplement fabriquées par la firme Kauermann, Düsseldorf. A droite de la figure, deux versions à profil semi-torique, complétées par une conception radiale sont commercialisées par la firme Stromag et vendues sous la désignation Periflex. L'avantage essentiel de cette conception est de présenter une très grande souplesse dans le sens axial, ce qui compense les erreurs d'alignements des arbres. Par contre, l'énergie accumulée dans la partie flexible, sous forme calorifique, peut échauffer la ou les parois en caoutchouc et diminuer fortement la durée de vie de ce joint.

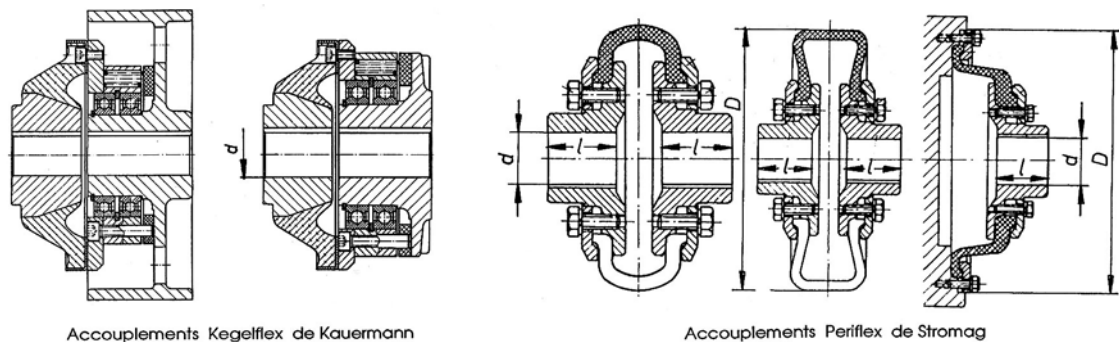


Figure 16.9 Accouplements à toile ou tore en caoutchouc : à gauche deux versions Kegelflex de Kauermann, à droite trois variantes de l'accouplement Periflex de Stromag

## 16.4 TRANSMISSION ENTRE DEUX ARBRES SE CROISANT SOUS UN ANGLE ALPHA

Les accouplements cités précédemment sont capables de transmettre efficacement le couple de torsion seulement si les arbres sont alignés correctement. Dès que l'angle  $\alpha$  ou l'excentricité entre les deux axes dépasse les valeurs admissibles, il est nécessaire de prévoir un mécanisme autorisant un angle plus élevé ou un désalignement. Ce sous-chapitre traite des joints placés entre deux arbres se coupant sous un angle  $\alpha$  supérieur à la valeur limite usuelle. Toute position oblique des axes engendre une variation du rapport des vitesses angulaires des arbres menant et mené. Une transmission est dite homocinétique si les angles de rotation correspondants de l'arbre moteur et entraîné sont constamment dans le même rapport, cette caractéristique portant la désignation de rapport de transmission :  $i = \omega_1 / \omega_2$ . Dans une transmission homocinétique, le rapport des vitesses angulaires des deux arbres est donc constant. Cette notion est extrêmement importante dans la transmission d'un couple entre deux arbres. En l'absence de cette propriété, un rapport de transmission variable crée des accélérations angulaires qui alliées aux inerties des pièces forment des efforts parasites. Ces dernières peuvent provoquer des comportements imprévisibles de l'ensemble.

### 16.4.1 JOINT DE CARDAN

Jérôme Cardan (Girolamo Cardano) donna son nom à la suspension dite à la Cardan mais il ne revendiqua nullement cette invention. L'idée de base de cette suspension est constituée par deux anneaux reliés ensemble et tournant l'un à l'intérieur de l'autre en n'étant reliés entre eux qu'en deux points opposés. Si un poids assez lourd est placé verticalement en leur centre,

il reste vertical malgré les mouvements imprimés de l'extérieur. Ce principe est à la base du gyroscope et s'applique aussi à la liaison entre deux arbres se coupant sous un angle  $\alpha$ .

#### 16.4.1.1 COMPOSANTS DU JOINT DE CARDAN

Dans l'exécution fondamentale, le joint de cardan ou encore à la Cardan se compose principalement des pièces suivantes :

- d'une fourche solidaire de l'arbre moteur,
- d'une seconde fourche semblable, montée sur l'arbre mené, dont le plan fait avec celui du premier, un angle de  $90^\circ$ ,
- d'un croisillon cruciforme, dont chacune des branches tourillonne par ses extrémités sur chacune des fourches.

Le joint de cardan est un mécanisme relativement volumineux et cher. Plusieurs conceptions permettent de simplifier les composants et ces variantes sont principalement :

- le joint à aiguilles à croisillon simple,
- le joint à couronne,
- le joint à noix,
- le joint à dés coulissant.

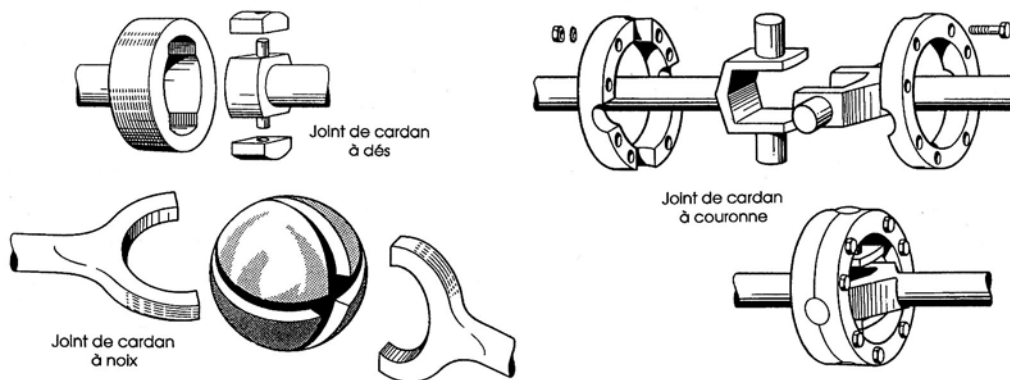


Figure 16.10 Variantes du joint de cardan : cardan à dés, à noix, à couronne

#### 16.4.1.2 RAPPORT DES ANGLES DE ROTATION

Les joints de cardan et leurs variantes ne peuvent assurer une transmission du mouvement à rapport constant entre deux arbres dès que les axes ne sont plus alignés. L'arbre menant et l'arbre mené possèdent la même vitesse moyenne, mais les vitesses angulaires instantanées ne sont rigoureusement égales qu'à chaque demi-tour. Si  $\alpha$  est l'angle formé par les axes des deux arbres,  $\varphi_1$  l'angle de rotation de l'arbre menant et  $\varphi_2$  l'angle de rotation de l'arbre mené, ce dernier angle est relié à l'angle menant par la relation :

$$\tan \varphi_2 = \cos \alpha \cdot \tan \varphi_1,$$

et

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctan(\cos \alpha \cdot \tan \varphi_1) - \varphi_1. \quad (16.3.1)$$

La figure 16.11 montre la position relative des axes des arbres et l'erreur angulaire en fonction de l'angle de rotation de l'arbre menant. Les déviations angulaires sont données pour un angle  $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$  et  $45^\circ$ .

### 16.4.1.3 RAPPORT DES VITESSES ANGULAIRES

La vitesse angulaire d'une pièce en rotation autour d'un axe à direction invariable est égale à la dérivée de l'angle par rapport au temps. En supposant constante la vitesse angulaire de l'arbre menant, la vitesse angulaire de l'arbre mené varie à peu près sinusoïdalement en fonction de l'angle de rotation  $\varphi_1$ .

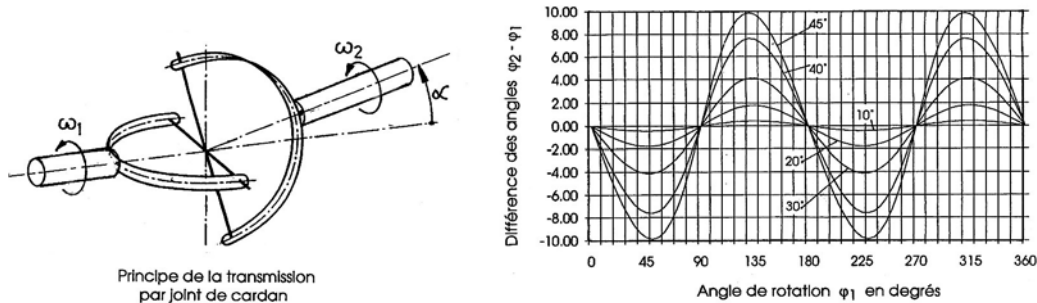


Figure 16.11 Angle d'intersection des axes, différence angulaire  $\Delta\varphi$  en fonction de l'angle menant  $\varphi_1$

La vitesse angulaire de l'arbre mené se trouve par l'expression :

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi_1} \cdot \omega_1. \quad (16.3.2)$$

La caractéristique cinématique de l'arbre mené en fonction de l'angle de rotation de l'arbre menant  $\omega_1$  peut se représenter sous forme graphique par le rapport  $\omega_2/\omega_1$ . Pour des angles  $\alpha$  très petits, l'allure de la courbe est presque sinusoïdale. Les courbes sont applicables à l'angle d'intersection des axes  $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$  et  $45^\circ$ .

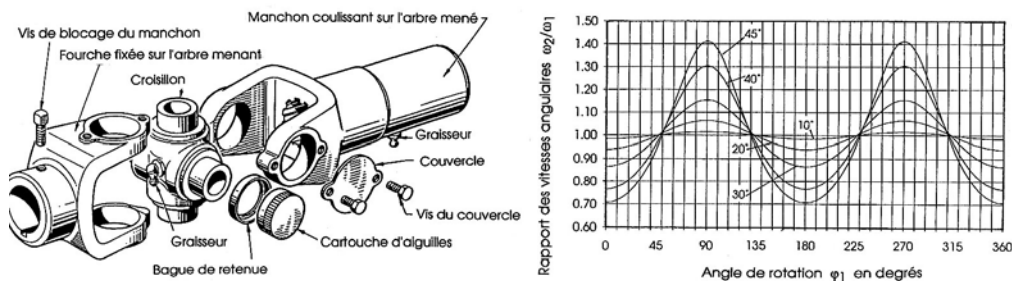


Figure 16.12 Composants du joint de cardan et rapport des vitesses angulaires en fonction de  $\varphi_1$

### 16.4.1.4 ACCÉLÉRATIONS ANGULAIRES

Dans un mouvement circulaire, l'accélération angulaire est égale à la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps. En supposant les mêmes conditions géométriques et cinématiques que précédemment, l'accélération angulaire de l'arbre menant serait nulle, celle de l'arbre mené tantôt positive, tantôt négative. L'expression de l'accélération angulaire  $\alpha_2$  devient :

$$\alpha_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2\varphi_1}{(1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi_1)^2} \cdot \omega_1^2. \quad (16.3.3)$$

Le rapport de l'accélération angulaire de l'arbre mené au carré de la vitesse angulaire de l'arbre menant paraît évoluer harmoniquement. Comme l'accélération est proportionnelle au carré de

la vitesse angulaire, la figure 16.13 montre le rapport  $\alpha_2/\omega_1^2$  pour  $\alpha = 10^\circ, 20^\circ$  et  $30^\circ$  sur le premier graphique, pour  $\alpha = 40^\circ$  et  $45^\circ$  sur le deuxième graphique.

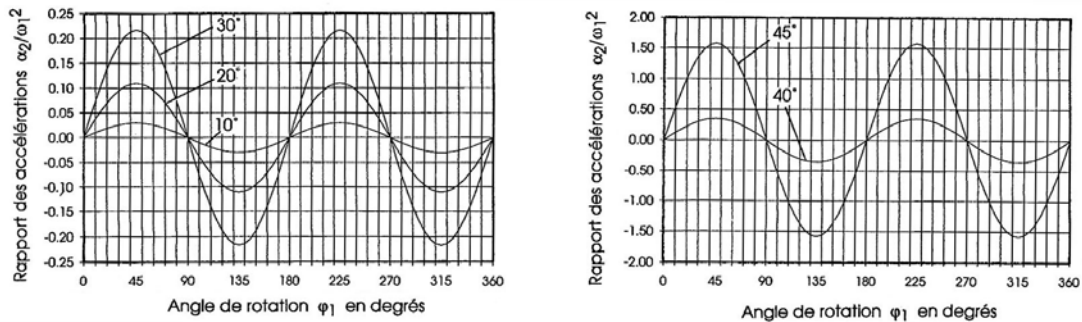


Figure 16.13 Rapport  $\alpha_2/\omega_1^2$  en fonction de l'angle de l'arbre menant et de l'inclinaison des axes

L'accélération angulaire devient très importante dès que l'inclinaison des axes dépasse  $30^\circ$ . Il ne faudrait pas dépasser environ  $25^\circ$  dans les transmissions fortement sollicitées.

#### 16.4.1.5 DISPOSITION DES AXES DANS LE JOINT HOMOCINÉTIQUE

Les propriétés cinématiques du joint de cardan ne sont pas favorables dans la transmission de couples à vitesses élevées car les effets d'inertie se répercutent sur les arbres menant et mené. Pour éliminer ce défaut majeur, il faut prévoir deux joints de cardan, soit trois arbres : un arbre moteur, un arbre intermédiaire et un arbre mené. Les relations des grandeurs cinématiques sont à corriger par le mouvement relatif de l'arbre intermédiaire. Les conditions géométriques à remplir par cette conception pour réaliser une transmission homocinétique sont :

1. les arbres menant et mené sont soit parallèles, soit symétriques par rapport à un plan bissecteur perpendiculaire au milieu de l'arbre intermédiaire;
2. les axes homologues des croisillons doivent se situer dans le même plan;
3. la position des fourches doit être ajustable en particulier dans la transmission par deux joints de cardan (assemblage à cannelures).

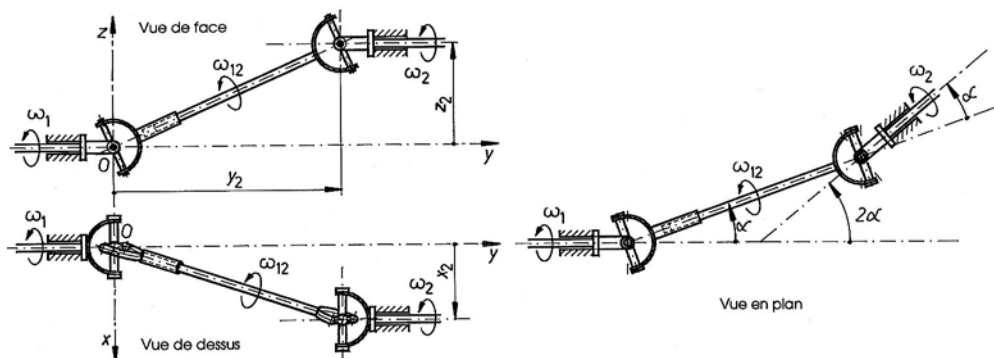


Figure 16.14 Disposition des arbres pour obtenir une transmission homocinétique :  
à gauche : arbres parallèles    à droite : arbres inclinés

Un second inconvénient du joint de cardan est le volume occupé par les fourches et les croisillons. Ce défaut peut partiellement s'éliminer en prévoyant un élément articulé sans arbre intermédiaire. Le troisième défaut est engendré par les déformations en flexion et torsion des



divers composants ainsi que par les conditions réelles de transmission sur deux arbres parallèles entraînés par le même élément moteur. La transmission du mouvement s'effectue pratiquement toujours avec une variation du rapport de transmission, d'où variation du couple pouvant atteindre jusqu'à 30% du couple moyen. De nombreuses solutions existent pour remplacer le joint de cardan par une conception plus simple. La figure 16.15 montre diverses constructions industrielles du joint de cardan.

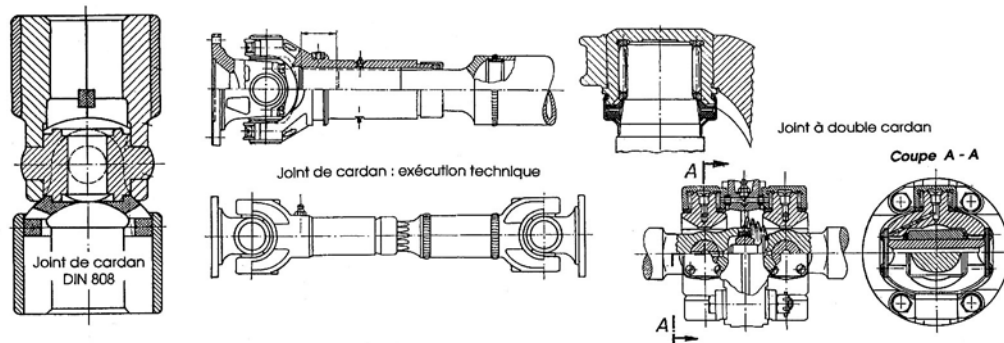


Figure 16.15 Joint de cardan : 1) joint simple selon DIN 808; 2) joint avec emmanchement à cannelures et arbre intermédiaire; 3) joint combiné à double croisillon

## 16.4.2 TRANSMISSION PAR JOINT TRIPODE

Le joint de cardan peut se monter assez facilement dans les véhicules de grandes dimensions là où la place à disposition est suffisante. Par contre, les voitures automobiles à traction avant nécessitent une réalisation de joints très compacts permettant des angles de braquage importants. Diverses variantes existent de manière à remplir plus ou moins bien la solution idéale afin d'atteindre un rapport de transmission constant. Ce sont les :

- joint Tracta à double noix,
- joint Spicer-Glaenzer à double croisillon,
- joint Rzeppa à billes,
- joint Bendix-Weiss,
- joint Tripode G.I. de Spicer-Glaenzer,
- joint Bouchard, etc.

Les trois derniers joints autorisent un déplacement longitudinal des deux extrémités du joint ce qui évite la présence d'un emmanchement à cannelure, donc à gagner de la place. Ce sous-chapitre traite le joint Tripode.

### 16.4.2.1 PRINCIPE DU JOINT TRIPODE

Le joint Tripode se compose en principe d'une fourche à trois branches parallèles disposées sur une surface cylindrique et fixée sur l'arbre menant, d'une étoile à trois branches montée sur l'arbre mené et de trois guidages reliant les deux premiers composants. L'arbre menant est maintenu en position axiale et l'arbre mené est articulé sur un point fixe. Sous l'effet de la rotation de la fourche, l'étoile est entraînée en mouvement circulaire par glissement de ses branches dans les guidages. Les caractéristiques géométriques générales de ce mécanisme sont :

- le nombre de branches de la fourche et de l'étoile :  $z = 3$ ,
- le rayon de positionnement des branches de la fourche :  $r$ ,
- la longueur de l'arbre mené entre l'étoile et le point fixe :  $l$ ,

- l'inclinaison de l'arbre mené par rapport à sa position concentrique :  $\alpha$ ,
- l'angle compris entre les branches :  $\Phi_1 = \Phi_2 = 2\pi/3$ .

L'arbre menant est repéré par le système de coordonnées trirectangle  $Ox_1y_1z_1$ , l'arbre menant par le système  $Ox_2y_2z_2$ . En position centrée, le système de référence  $Oxyz$  correspond au système  $Ox_1y_1z_1$ . La mise en équation de la position relative des arbres fait apparaître un système de plusieurs équations pouvant s'écrire sous forme matricielle.

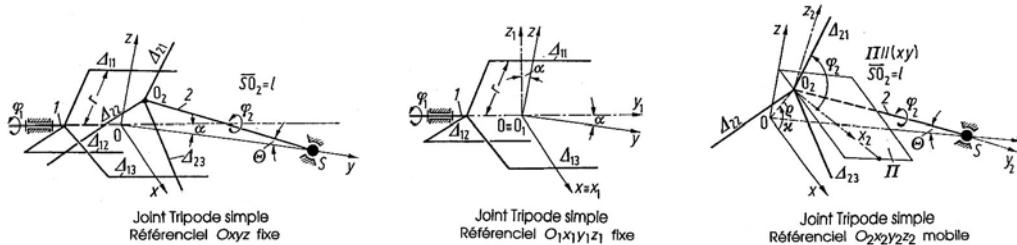


Figure 16.16 Principe de la conception de joint Tripode et systèmes de coordonnées

#### 16.4.2.2 RELATIONS CINÉMATIQUES DU JOINT

Les relations complètes de la position des arbres et des branches se simplifient fortement si l'on tient compte des conditions usuelles de conception et si l'on admet des erreurs cinématiques inférieures à 1% :

1. le joint Tripode s'emploie seulement pour de petits rapports géométriques :  $\lambda = r/l \leq 1/10$ ,
2. les exposants des termes de la solution exacte peuvent être négligés,
3. la position du centre mobile peut se confondre avec celle du système de coordonnées.

##### 1. Différence des angles de rotation

La solution du système simplifié d'équations permet de trouver la variation des angles de rotation en fonction de l'angle de rotation de l'arbre  $\varphi_1$  menant :

$$\varphi_2 - \varphi_1 \approx \frac{r(1 - \cos \alpha)}{2l(1 + \cos \alpha)} \cdot \tan \alpha \cdot \cos 3\varphi_1. \quad (16.4.1)$$

avec :  $\varphi_1$  angle de rotation de l'arbre 1,

$\varphi_2$  angle de rotation de l'arbre 2.

Le centre  $O_2$  se déplace sur une circonférence de rayon  $\rho$  et le rapport géométrique  $v = \rho/l$  vaut pratiquement :

$$v = \frac{\rho}{l} = \sin \Theta \approx \frac{r(1 - \cos \alpha)}{2l \cdot \cos \alpha}. \quad (16.4.2)$$

##### 2. Rapport des vitesses angulaires

La relation (16.4.1) permet de trouver le rapport des vitesses angulaires  $i$  en dérivant cette expression par rapport au temps :

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2 / dt}{d\varphi_1 / dt} \approx 1 - \frac{3r(1 - \cos \alpha)}{2l(1 + \cos \alpha)} \cdot \tan \alpha \cdot \cos 3\varphi_1. \quad (16.4.3)$$

Les valeurs minimale et maximale prises par les deux grandeurs cinématiques sont :

$$\text{- Différence des angles : } (\varphi_2 - \varphi_1)_{\max, \min} \approx \pm \frac{r(1 - \cos \alpha)}{2l(1 + \cos \alpha)}. \quad (16.4.4)$$

- rapport de transmission :  $i_{\max, \min} \approx 1 \pm \frac{3r(1 - \cos \alpha)}{2l(1 + \cos \alpha)} \cdot \tan \alpha \approx 1.$  (16.4.5)

Le joint Tripode devient homocinétique lorsque  $l \rightarrow \infty$  ou  $\alpha \rightarrow 0$ . Pour les valeurs géométriques usuelles, l'angle devient très faible et le joint peut être considéré comme pratiquement homocinétique, donc  $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \varphi$  et  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ . L'arbre mené décrit trois fois par tour un cône de rayon  $\rho$  et d'angle au sommet  $\Theta$ . Cette particularité limite l'emploi de ce joint aux vitesses peu élevées.

### 3. Représentations graphiques

La différence des angles de rotation, exprimée en minutes d'angle, et le rapport de transmission sont représentés sur la figure 16.17 en fonction de l'angle de rotation  $\varphi_1$  de l'arbre menant pour un rapport géométrique  $\lambda = 1/10$ .

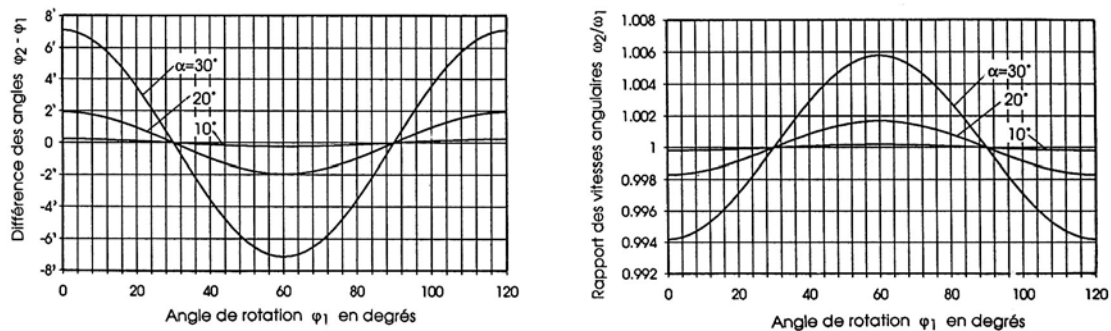


Figure 16.17 Différence des angles  $\varphi_2 - \varphi_1$  en minutes d'angle dans le joint Tripode.

Rapport géométrique  $\lambda = 1/10$  et pour trois inclinaisons de l'arbre mené :  $\alpha = 10^\circ, 20^\circ$  et  $30^\circ$ .

Rapport de transmission du joint Tripode pour  $\lambda = 1/10$  et les mêmes inclinaisons.

Ces deux représentations graphiques montrent une variation très faible de la différence des angles et un rapport de transmission voisin de 1. Ainsi le joint Tripode peut se classer dans la famille des joints quasi homocinétiques.

#### 16.4.2.3 CONCEPTION DU JOINT TRIPODE

Le joint Tripode ne peut jamais se monter seul dans une transmission à arbres concourants car l'élément mené effectue un mouvement sphérique. Lorsque le joint Tripode est couplé à un joint homocinétique, par exemple le joint Rzeppa, les lois cinématiques restent conservées et le rapport de transmission varie selon la loi citée précédemment. La figure 16.18 montre à gauche le schéma de principe de cet assemblage, avec les diverses caractéristiques géométriques, et l'exécution technique. Le joint Tripode peut aussi se coupler à un joint de cardan double homocinétique (transmission Borg-Warner) et le résultat reste identique.

Lorsque le deuxième joint n'est pas parfaitement homocinétique, les erreurs de cet élément s'additionnent à celles du joint Tripode dans le cas le plus défavorable. La figure 16.18 à droite montre le schéma de principe de cet assemblage, constitué par un joint Tripode et un cardan double centré, et son exécution technique. Comme pour les joints de cardan doubles, il est possible d'assembler deux joints Tripode afin de réaliser une transmission homocinétique.

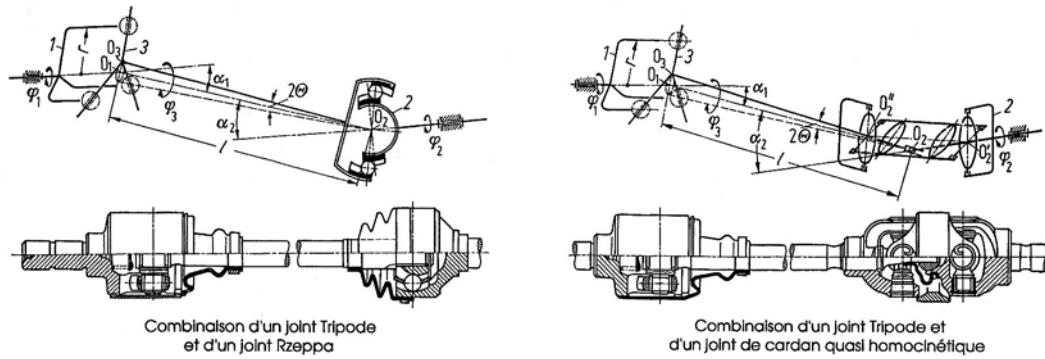


Figure 16.18 Couplage du joint Tripode avec : 1) un joint Rzeppa, 2) avec un double cardan

#### 16.4.2.4 COMPORTEMENT DU JOINT TRIPODE

Le comportement particulier de la partie menée engendre des effets d'inertie sur l'ensemble et au niveau de l'articulation. Ces efforts grandissent avec l'angle des axes  $\alpha$  et la vitesse angulaire  $\omega$ . En négligeant ces forces dynamiques et en supposant tous les centres de coordonnées confondus, les réactions sur les branches de l'étoile sont données par :

$$F_{e1} = F_{e2} = F_{e3} = \frac{M_{\text{moteur}}}{3r} \quad (16.4.6)$$

avec :  $F_{e1}, F_{e2}, F_{e3}$  forces normales sur les branches de l'étoile.

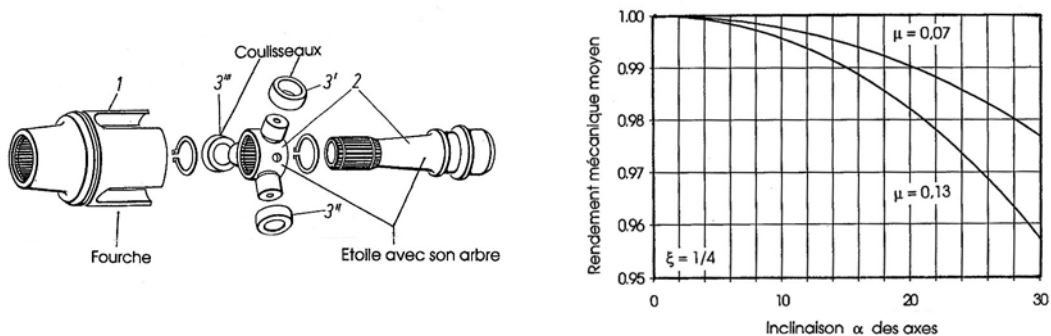


Figure 16.19 Vue éclatée d'un joint Tripode et rendement du joint en fonction de l'angle des axes

En simplifiant le problème et en supposant des pertes par frottement selon la loi de Coulomb, le rendement mécanique moyen du joint  $\eta_{\text{méc}}$  peut s'exprimer par la relation :

$$\eta_{\text{méc}} = 1 - 6\mu \cdot \left( \frac{(1 - \cos\alpha)}{\pi \cdot \cos\alpha} + \frac{\xi \cdot (1 - \cos\alpha)}{\pi \cdot (1 + \cos\alpha)} \right) \quad (16.4.7)$$

avec :  $\xi = r_{\text{coul}}/3r$  où  $r_{\text{coul}}$  est le rayon du coulisseau glissant dans la fourche.

La figure 16.19 montre la valeur du rendement mécanique en fonction de l'angle des axes pour deux coefficients de frottement  $\mu = 0,07$  et  $0,13$ .

## CHAPITRE 17

# MÉCANISMES À CAMES

Les mécanismes à cames ont pour objet de transformer un mouvement circulaire uniforme ou varié en un mouvement rectiligne ou circulaire oscillatoire. Ces ensembles, plans ou spatiaux, permettent de réaliser facilement la ou les fonctions exigées par la transmission. Ces mécanismes peuvent se combiner avec des systèmes articulés pour réaliser des mouvements intermittents. Un avantage essentiel des transmissions par cames est de pouvoir choisir les lois des mouvements oscillatoires : conditions de départ et d'arrivée, allure du mouvement, optimisation cinématique et dynamique. Ce chapitre présente tout d'abord les mécanismes à came avec profil connu et ensuite la recherche des profils et des propriétés à partir d'une cinématique donnée pour la tige ou le levier commandé.

### 17.1 DESCRIPTION GÉNÉRALE DES CAMES

La forme fondamentale de tout mécanisme à came se compose de trois chaînons : un chaînon formant le plan fixe, la came proprement dite et l'organe commandé. Dans l'étude de ce mécanisme, le principe d'inversion est applicable aux trois chaînons composants. L'ensemble est dit plan lorsque toutes les articulations et tous les chaînons sont placés dans un même plan; il est dit spatial lorsque cette condition n'est pas satisfaite. La recherche des grandeurs cinématiques et du comportement d'un mécanisme à came dans une position particulière peut s'effectuer par l'intermédiaire d'un quadrilatère articulé équivalent.

#### 17.1.1 LIAISON ENTRE LES CHAÎNONS

La forme géométrique de la came influence directement la conception et le fonctionnement du mécanisme. Le guidage de la pièce entraînée sur la came peut être unilatéral ou bilatéral. Le mouvement de la came consiste le plus souvent en une rotation complète, dans quelques cas particuliers en une rotation partielle. Pour améliorer les performances mécaniques et diminuer les pertes, la pièce entraînée en contact avec la came est équipée d'un élément roulant comme un galet cylindrique ou conique. Ces éléments sont fabriqués en série par les fournisseurs de roulements et se trouvent cités dans les catalogues.

La transmission du mouvement de la came vers l'organe de sortie s'effectue correctement lorsque la pièce entraînée reste toujours en contact avec la came. Cette condition fondamentale est réalisée soit par emboîtement, soit par application d'une force de maintien. Cette dernière solution engendre des efforts supplémentaires, augmente les pressions et diminue la durée de vie.

Les systèmes de transmission par emboîtement utilisent soit une double came formée par une rainure fermée, soit deux cames distinctes : la came principale et la contre-came. Les cames dites à épaisseur constante assurent également le contact continu entre les deux pièces mobiles. Pour que les systèmes à emboîtement fonctionnent correctement, il est recommandé de prévoir des éléments élastiques de précontrainte. La transmission du mouvement à contact unilatéral entre la came et le galet contient un ou plusieurs éléments de pression constitués le plus souvent par un ou plusieurs ressorts, par la charge extérieure. Ce contact est facilité par la présence de plusieurs cames sur le même arbre moteur. La figure 17.1 montre le principe des

solutions usuelle pour les transmissions à cames : mécanismes plan et spatial, contacts unilatéral et bilatéral.

CAMES POUR MÉCANISMES PLANS				CAMES POUR MÉCANISMES SPATIAUX			
Principe de base	Numéro	Exemples simplifiés de mécanismes à came Forme de la came Élément commandé	Usion sur la came Fonction de transfert	Principe de base	Numéro	Exemples simplifiés de mécanismes à came Forme de la came Élément commandé	Usion sur la came Fonction de transfert
PROFIL EXTÉRIEUR APPUI PLAN	1		Unilatéral avec ressort de pression Chok libre des mouvements	PROFIL HÉLICOÏDE CAME EN CLOCHE	11		Unilatéral Appui par ressort Chok libre des mouvements
PROFIL INTÉRIEUR APPUI PLAN	2		Unilatéral avec ressort de pression Chok libre des mouvements	PROFIL CREUX EN HÉLICOÏDE	12		Bilatéral, mais jeu à éliminer Chok libre des mouvements
PROFIL CREUX APPUI PLAN	3		Bilatéral, mais jeu important Chok libre des mouvements	PROFIL CREUX EN HÉLICOÏDE	13		Bilatéral, mais jeu à éliminer Mouvements aller - retour
PROFIL SAILLANT APPUI PLAN	4		Bilatéral, mais jeu important Chok libre des mouvements	PROFIL CREUX SUR CÔNE	14		Bilatéral, mais jeu à éliminer Chok libre des mouvements
PROFIL DOUBLE A DEUX CAMES	5		Bilatéral, mais jeu à éliminer Chok libre des mouvements	PROFIL CREUX VIS CYLINDRIQUE	15		Bilatéral, mais jeu important Mouvements périodiques 1/2
PROFIL À ÉPAISSEUR CONSTANTE	6		Unilatéral ou bilatéral 3 mouvements périodiques	PROFIL CREUX VIS GLOBOÏDE	16		Bilatéral, mais jeu important Mouvements périodiques 1/2
PROFIL SUR OU DANS COULISSE	7		Unilatéral ou bilatéral Mouvements aperiodiques	DISQUE PLAN INCLINÉ SUR AXE	17		Unilatéral Appui par ressort Mouvement oscillatoire

Figure 17.1 Catalogue général des mécanismes à cames

### 17.1.2 CLASSIFICATION SYSTÉMATIQUE

Ce chapitre présente surtout les mécanismes plans à cames constitués par un profil à surfaces concaves et convexes planes. La systématique des mécanismes plans à cames comprend les chaînes cinématiques à trois chaînons équipées d'une articulation à deux degrés de liberté. La figure 17.2 montre la chaîne cinématique de base et les deux variantes constructives standards obtenues en modifiant la forme de base. La fonction des chaînons peut se transformer en inversant les chaînons fixes et mobiles. La transformation des chaînes de Watt ou de Stephenson en mécanismes à cames est également possible. La classification et la désignation des transmissions par cames s'effectue par :

- la forme des corps composants : cames plane, en tambour, cylindrique, conique, globoïde, en arc de cercle.
- la forme du profil : extérieur, intérieur, saillant, creux.

- la nature du mouvement de l'élément commandé en mouvement oscillatoire : translation, rotation.
- le comportement de l'élément entraîné pendant son mouvement de va et vient.

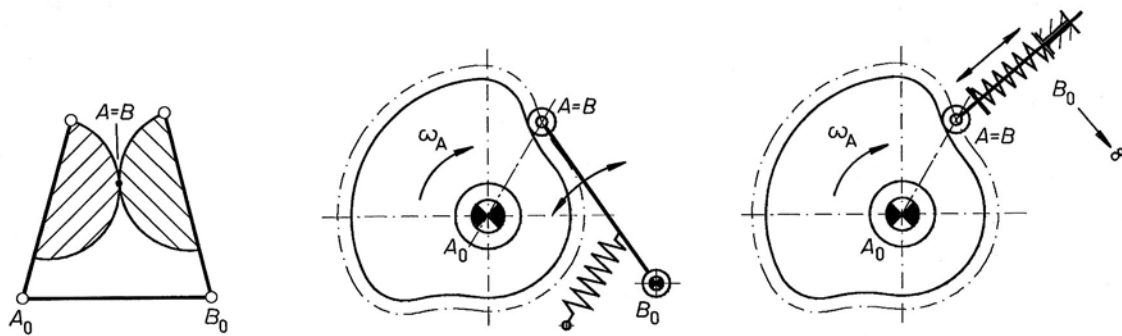


Figure 17.2 Chaîne cinématique de base et forme standard des mécanismes plans à came

## 17.2 CAMES SIMPLES À PROFIL CONNU

Lorsque le mécanisme à came doit déplacer une tige ou un levier en mouvement oscillant lent entre deux positions limites, le profil de la came peut se concevoir comme une courbe fermée constituée par des tronçons rectilignes et circulaires. Le passage d'un segment rectiligne à un arc de cercle ou la modification brusque du rayon de courbure engendre un à-coup provoqué par la variation brusque de l'accélération normale. Ce genre de came n'est pas recommandé pour les mouvements rapides.

### 17.2.1 PROFILS

On distingue principalement deux types de cames : les cames composées de profils partiellement rectilignes et les cames à profils seulement curvilignes constitués par des arcs de circonférence successifs ou d'autres courbes simples : spirales, développantes, etc. Le déplacement de l'élément commandé, tige ou levier, dépend de la position du centre du galet par rapport à l'axe de rotation de la came. Il faut bien distinguer la trajectoire relative du centre du galet de la forme géométrique extérieure ou intérieure de la came, figure 17.3 à gauche.

### 17.2.2 CHAÎNES CINÉMATIQUES DE SUBSTITUTION

L'étude cinématique du mouvement de l'élément commandé, dans une position bien définie, peut se simplifier en remplaçant le mécanisme à came par une chaîne cinématique plus simple. Le point fixe  $A_0$  est le centre de rotation de la came, le point mobile  $B$  est l'articulation du galet. La chaîne cinématique de substitution, valable seulement pour une position unique, est constituée par un mécanisme bielle - manivelle excentré dans le cas d'un mécanisme à tige, par un quadrilatère articulé dans le cas d'une came à levier. La recherche de la vitesse et de l'accélération en un point particulier s'effectue en appliquant les relations développées précédemment, figure 17.3 à droite.

### 17.2.3 CINÉMATIQUE DU CENTRE DU GALET

La position du galet par rapport à la came est trouvée par exemple graphiquement en supposant la came fixe et le rouleau mobile. Après avoir construit la trajectoire relative du centre du galet le long du profil de la came, à distance constante égale au rayon du galet, la position

du rouleau par rapport au centre fixe de la came est définie par le rayon  $A_0B$ . Cette position est étudiée pour plusieurs positions relatives en adoptant par exemple un intervalle angulaire constant.

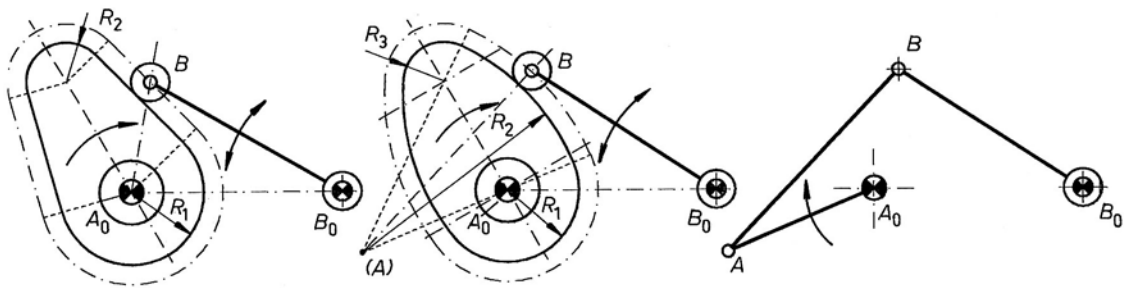


Figure 17.3 Cames simples de forme connue : came avec profil rectiligne entre deux tronçons cylindriques. Came à profil seulement curviligne et son quadrilatère de substitution

### 1. Vitesses absolue, relative et d'entraînement

Si la fréquence de rotation de la came est constante, il est recommandé d'adopter dans l'étude graphique une vitesse angulaire unitaire. Le mouvement absolu est celui du centre du galet par rapport au plan de référence sur lequel se trouve les points fixes  $A_0$  et  $B_0$ . La recherche des diverses vitesses s'effectue au moyen de la cinématique des mouvements relatifs, soit la relation vectorielle :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

avec :

- $v_a$  vitesse absolue du centre du galet,
- $v_r$  vitesse relative du centre du galet sur la trajectoire relative,
- $v_e$  vitesse d'entraînement provoquée par la rotation de la came :  $v_e = \omega_A A_0B$ .

### 2. Accélérations absolue, relative, d'entraînement et de Coriolis

Les accélérations totale et composantes, l'accélération absolue du centre du galet sont reliées par les sommes :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{en} + \vec{a}_{et} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{rt} + \vec{a}_C = \vec{a}_{an} + \vec{a}_{at}.$$

avec :

- $a_a$  accélération absolue du centre du galet comprenant deux composantes :
  - $a_{an}$  composante normale si le galet est monté sur un levier; cette composante est nulle dans les cames équipées d'une tige rectiligne,
  - $a_{at}$  composante tangentielle :  $a_{at} = \alpha_B \cdot (B_0B) = \alpha_B \cdot r_a$ ,
- $a_{en}$  accélération d'entraînement normale dépendant de la vitesse  $v_e$  et du rayon  $r_e$  :
  - $a_{en} = v_e^2 / r_e = \omega_e^2 r_e$  avec  $\omega_e = \omega_A$  la vitesse angulaire d'entraînement de la came,
- $a_{et}$  accélération d'entraînement tangentielle si  $\alpha_e \neq 0$ , perpendiculaire à la précédente,
- $a_{rn}$  accélération relative normale dépendant de  $v_r$  et du rayon  $r_r$  :
  - $a_{rn} = v_r^2 / r_r$ ; cette accélération est nulle si le profil est rectiligne,
- $a_{rt}$  accélération relative tangentielle, perpendiculaire à la précédente,
- $a_C$  accélération de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse relative :

$$a_C = 2 \omega_e \cdot v_r.$$

La vitesse relative du galet le long du profil de la came permet de trouver la fréquence de rotation de cet élément, valeur nécessaire au contrôle de la durée de vie. La modification brusque du rayon de courbure sur le profil provoque une variation brusque de l'accélération relative normale, engendre un à-coup et des vibrations.



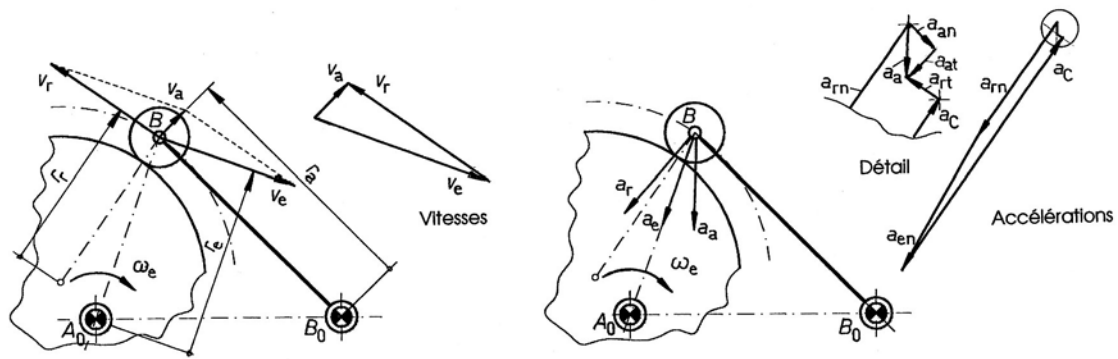


Figure 17.4 Vitesses et accélérations relatives, d'entraînement et absolues

### 17.2.4 CAMES À ÉPAISSEUR CONSTANTE

Les cames à épaisseurs constantes s'utilisent dans l'appareillage. Elles commandent des mouvements de va et vient sur des pièces en translation ou rotation. La forme fondamentale est un triangle à côtés curviligne. Comme cette forme fondamentale possède trois côtés se coupant en pointe, la pression entre la came et la partie entraînée deviendrait infiniment grande. Le profil pratique est constitué d'une courbe équidistante à cette courbe fondamentale. Les pointes sont alors remplacées par des arcs de cercle.

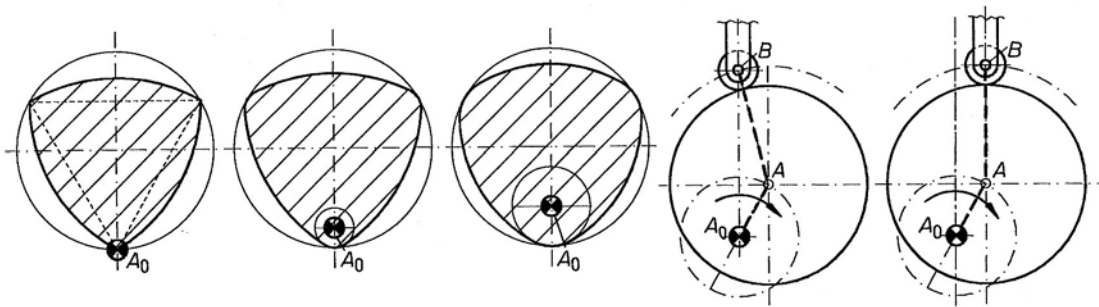


Figure 17.5 Cames à épaisseurs constantes : triangulaires et cylindriques

La came cylindrique tourne autour d'un point placé sur un axe différent de l'axe de symétrie. La recherche des grandeurs cinématiques dans la commande d'une came à tige centrée peut se réaliser en remplaçant cette came et son galet par un système bielle - manivelle centré. Si la tige est excentrée, le mécanisme de substitution est un système bielle - manivelle excentré.

## 17.3 LOIS CINÉMATIQUES DES CAMES

Lorsque la fréquence de rotation de la came reste modeste, il est possible d'adopter des lois très simples pour le mouvement de l'élément commandé. Par contre, si les vitesses et surtout les accélérations deviennent très importantes, il faut absolument choisir des lois cinématiques permettant de transmettre le mouvement dans des conditions optimales. Les lois fondamentales sont prévues pour des mouvements simples composés d'un point initialement immobile, se déplaçant d'une certaine distance rectiligne ou curviligne, le mouvement se terminant par l'arrêt.

### 17.3.1 MOUVEMENTS IMPOSÉS

Habituellement, les mouvements de l'élément commandé, tige ou levier, doivent satisfaire certaines caractéristiques géométriques et cinématiques telles la ou les positions successives à atteindre, les allures de la vitesse ou de l'accélération. Ces grandeurs peuvent se schématiser sur une représentation  $y = y(x)$  où  $x$  est la variable indépendante et  $y$  l'élongation,  $y'$  la vitesse,  $y''$  l'accélération linéaire ou angulaire de l'élément entraîné.

#### 1. Elongation

Le mouvement de l'élément commandé est imposé par un déplacement maximal et une ou plusieurs positions intermédiaires à atteindre dans des temps donnés. L'allure la plus simple se compose d'une montée, d'un arrêt, d'une descente et d'un nouvel arrêt jusqu'au prochain cycle. La figure 17.6 montre les cas suivants :

- a** vitesses initiale et finale nulles, un mouvement de va et vient sans arrêt intermédiaire,
- b** vitesses initiale, intermédiaire et finale nulles, mouvement d'aller, mouvement de retour,
- c** deux ou plusieurs mouvements d'aller avec repos intermédiaires,
- d** vitesse initiale nulle, mouvement continu de va et vient.

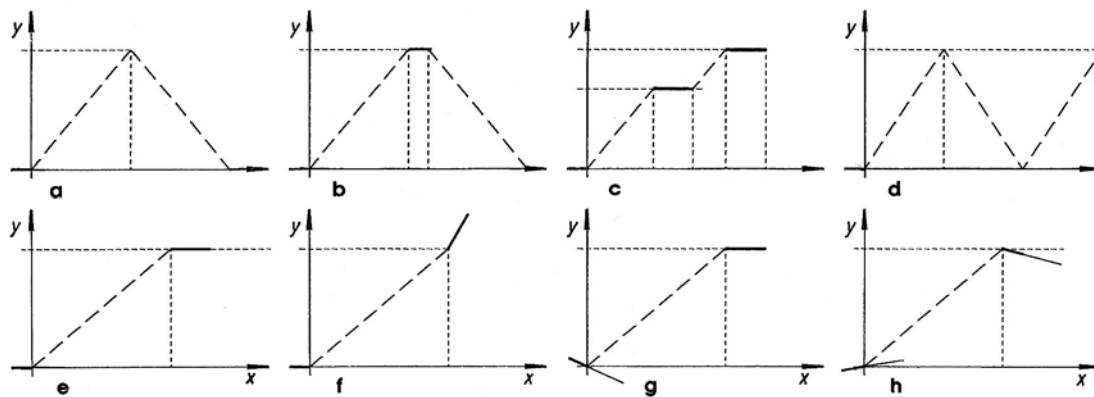


Figure 17.6 Allure de principe et schématique des élongations et des vitesses

#### 2. Vitesse

Les vitesses initiale et finale sont imposées par l'élément commandé. La vitesse doit varier progressivement pendant tout le cycle. Des conditions complémentaires ou particulières peuvent intervenir : vitesse maximale ou vitesse minimale, continuité de la vitesse lors de modification d'allure. La figure 17.6 montre les particularités suivantes :

- e** vitesses initiale et finale nulles,
- f** vitesse initiale nulle, vitesse finale imposée,
- g** vitesse initiale imposée, vitesse finale nulle,
- h** vitesses initiale et finale non nulles.

#### 3. Accélération

L'allure de l'accélération pendant le cycle influence directement les effets d'inertie des masses en mouvement. Pour éviter des à-coups, l'accélération ne doit en aucun cas varier brusquement. Deux cas sont représentés sur la figure 17.7 :

- j** accélération nulle au point de départ,
- k** accélération nulle au départ et en fin de mouvement.

Le cas le plus simple et le plus fréquent est représenté sur la figure 17.6 b : il consiste à déplacer l'élément mené d'une position initiale vers une position finale avec repos en ce point, puis à le ramener en position initiale.

## 17.3.2 FONCTIONS DE TRANSMISSION

Le mécanisme à came est un transformateur de mouvement. Sa caractéristique cinématique principale est la ou les fonctions de transmission entre la partie motrice et l'élément commandé. D'une manière générale, la fonction de transmission exprime la relation entre la grandeur de sortie et la grandeur d'entrée sous la forme générale :

$$y = y(x).$$

La grandeur d'entrée est une fonction du temps dans les mécanismes à cames, la grandeur de sortie est donc aussi une fonction du temps, soit :

$$y = y[x(t)].$$

Ces deux relations générales peuvent se dériver par rapport au temps. Il devient possible de définir successivement les grandeurs suivantes :

1. Fonction de transmission fondamentale dite d'ordre zéro :

$$y = y[x(t)],$$

2. Fonction de transmission de premier ordre :

$$y' = \frac{dy}{dx} = y'(x),$$

3. Fonction de transmission de second ordre :

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''(x),$$

4. Fonction de transmission de troisième ordre :

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''(x). \quad (17.1.1)$$

Les dérivées par rapport au temps s'écrivent :

1. Vitesse :
- $$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y' \cdot \dot{x},$$

2. Accélération :

$$\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = y'' \cdot \dot{x}^2 + y' \cdot \ddot{x},$$

3. Dérivée troisième :
- $$\ddot{\ddot{y}} = \frac{d^3 y}{dt^3} = y''' \cdot \dot{x}^3 + 3 y'' \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + y' \cdot \ddot{\ddot{x}}. \quad (17.1.2)$$

Un saut brusque de la vitesse provoque un choc dans les pièces entraînées et un saut brusque de l'accélération engendre un à-coup dans le mouvement. Pour que la transmission du mouvement s'effectue correctement sans chocs et sans à-coups, il faut que la vitesse et l'accélération soient toutes deux des fonctions continues du temps. Le mouvement total de l'élément commandé est fixé par la ou les fonctions de transmission sous forme de fonctions composantes simples. Le mouvement est dit mouvement de montée lorsque le galet s'éloigne du centre de rotation de la came, il est dit de descente dans le cas contraire.

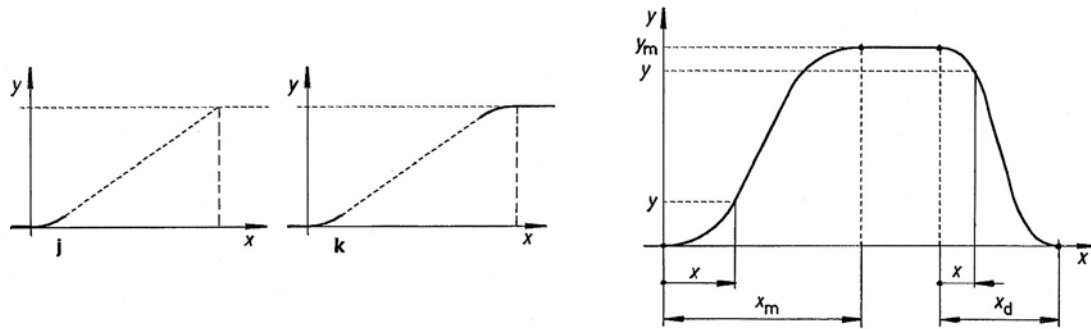


Figure 17.7 Allure schématique de l'accélération Fonctions de transmission pour un va et vient

### 17.3.3 FONCTIONS DE TRANSMISSION NORMÉE

Pour simplifier les calculs des mécanismes à cames et exprimer sous forme simple les diverses grandeurs cinématiques, les fonctions de transmission sont écrites sous la forme normée. Dans la représentation  $y = y(x)$ , la variation totale de la grandeur de sortie est représentée par  $y_m$ . Pour obtenir cette grandeur, la variable indépendante doit varier de  $x_m$ , l'indice m indiquant une "montée" de la tige ou du levier. De la position haute à la position initiale, la variable dépendante varie de  $y_m$  à zéro pour une variation  $x_d$  de la variable dépendante. La fonction de transmission normée s'exprime par :

1. À la montée : 
$$y = y_m \cdot f\left(\frac{x}{x_m}\right).$$
2. À la descente : 
$$y = y_m \cdot \left(1 - f\left(\frac{\bar{x}}{x_m}\right)\right).$$
 (17.1.3)

En introduisant la variable auxiliaire  $z = x/x_m$  pour la montée ou  $z = \bar{x}/x_d$  pour la descente, la fonction de transmission normée s'écrit :

1. À la montée : 
$$f\left(\frac{x}{x_m}\right) = f(z),$$
2. À la descente : 
$$f\left(\frac{\bar{x}}{x_d}\right) = f(z).$$
 (17.1.4)

Les valeurs particulières de cette fonction normée, valable seulement pour  $z$  compris entre 0 et 1, sont données par :

$$f(z=0) = 0 \quad \text{et} \quad f(z=1) = 1.$$

La fonction de transmission est dite symétrique si elle remplit l'une des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - f(1-z), & f'(z) &= f'(1-z), \\ f''(z) &= -f''(1-z), & f'''(z) &= f'''(1-z). \end{aligned}$$

Les fonctions  $f(z)$ ,  $f'(z)$ ,  $f''(z)$  sont les fonctions de transmission normées de premier, de second et de troisième ordre. Les conditions particulières imposées par les mouvements fixent les conditions de validité aux limites de la fonction de transmission normée.

### 17.3.4 CHIFFRES CARACTÉRISTIQUES

Les performances et qualités de la fonction normée et adoptée peut se trouver au moyen de divers chiffres exprimant les caractéristiques de vitesse maximale, d'accélération maxi-

male, de présence ou d'absence d'à-coup, de valeur du couple maximal. Les définitions sont les suivantes :

1. Chiffre de vitesse :  $C_v = \text{Maximum de } f'(z),$
2. Chiffre d'accélération :  $C_a = \text{Maximum de } f''(z),$
3. Chiffre d'à-coup :  $C_c = \text{Maximum de } f''(z).$
4. Chiffre de couple :  $C_M = \text{Maximum de } [f'(z) \cdot f''(z)].$

Cette dernière valeur exprime une grandeur proportionnelle au produit de la vitesse par l'accélération, soit une puissance à produire pour déplacer les masses.

## 17.4 FONCTIONS UTILISABLES

Les fonctions normées utilisables sont des fonctions mathématiques : polynomiales, trigonométriques simples ou combinées et des fonctions de forme supérieure. Elles permettent de trouver facilement les dimensions géométriques de la came à partir des grandeurs cinématiques adoptées et de la forme de l'élément commandé.

### 17.4.1 FONCTIONS POLYNOMIALES

Les fonctions normées polynomiales sont des expressions mathématiques contenant des termes en puissance de  $z$ . La forme générale est :

$$y = f(z) = \sum_{i=0}^n A_i \cdot z^i. \quad (17.2.1)$$

La classification des fonctions polynomiales est basée soit sur l'exposant le plus élevé de la somme, soit sur l'indication de toutes les puissances intervenant dans l'expression. Si l'exposant le plus grand est impair, le domaine de validité de la fonction de transmission est compris entre  $z = 0$  et  $z = 1$ . Par contre, si le polynôme est pair, la fonction de transmission normée comprend deux fonctions partielles : la première valable pour  $0 \leq z \leq 0,5$ , la seconde dans le domaine  $0,5 \leq z \leq 1,0$  :

Domaine de définition :  $0 \leq z \leq 0,5$   $0,5 \leq z \leq 1,0$

Fonction de transmission :  $y = \sum_{i=0}^n A_i \cdot z^i,$   $y = 1 - \sum_{i=0}^n A_i \cdot (1-z)^i.$

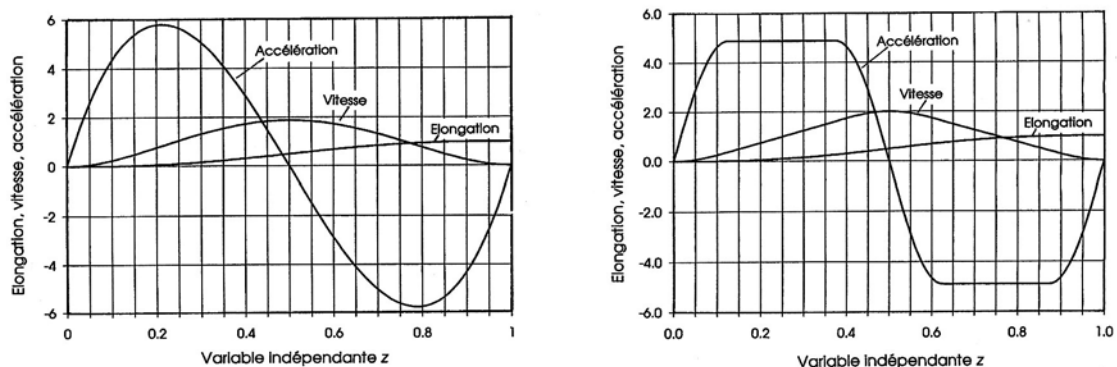


Figure 17.8 Fonctions polynomiales normées : P 3-4-5 et trapézoïdale + harmonique

Le tableau 17.1 donne les principales fonctions de transmission normées dans un mouvement partant du repos et se terminant à vitesse nulle. Ces fonctions se laissent modifier et ajuster pour d'autres conditions de mouvement, comme lorsqu'une ou plusieurs vitesses sont imposées, une continuité dans la valeur de l'accélération lors de l'inversion immédiate du mouvement ou lorsque plusieurs positions successives doivent être atteintes. L'observation de la variation de l'accélération pendant tout le cycle permet d'apporter les dernières modifications au choix définitif.

*Remarque importante sur les valeurs du tableau 17.1*

La valeur donnée pour chaque chiffre caractéristique est la valeur maximale. La variation des diverses fonctions joue un rôle non négligeable dans le choix définitif de la fonction de transmission

Les fonctions les plus utilisées dans la pratique sont :

- fonction P 3-4-5, facile à calculer,
- fonction P 3-4-5-6, contient plus de termes, mais une accélération maximale plus faible.

La fonction TH est une combinaison de fonctions polynomiales et de fonctions harmoniques, figure 17.8 à droite. Elle remplace avantageusement une fonction dans laquelle la dérivée seconde est représentée seulement par des segments de droite formant deux trapèzes successifs. Malheureusement, elle nécessite la présence de plusieurs expressions. Elle se remplace avantageusement par la fonction de degré 8, soit la P 3-4-5-6-7-8, voir figure 17.9.

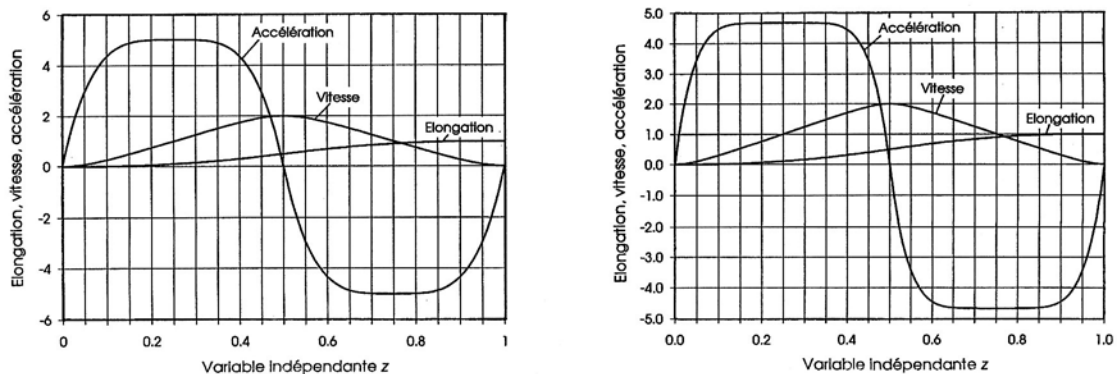


Figure 17.9 Fonctions polynomiales normées : P 3-4-5-6 et P 3-4-5-6-7-8

*Exemple de recherche d'une fonction polynomiale*

Soit à trouver la fonction polynomiale normée remplissant les conditions suivantes :

- mouvement partant du repos et aboutissant au repos, à accélérations initiale et finale nulle.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{À } z=0 : \quad & f(z=0) = 0, \quad f'(z=0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(z=0) = 0; \\ \text{À } z=1 : \quad & f(z=1) = 1, \quad f'(z=1) = 0 \quad \text{et} \quad f''(z=1) = 1. \end{aligned}$$

Ces six conditions particulières imposent un polynôme avec six coefficients et constante, soit un polynôme du cinquième degré :

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5, \\ f'(z) &= a_1 + 2 a_2 z + 3 a_3 z^2 + 4 a_4 z^3 + 5 a_5 z^4, \\ f''(z) &= 2 a_2 + 6 a_3 z + 12 a_4 z^2 + 20 a_5 z^3. \end{aligned}$$

En introduisant les conditions particulières pour  $z = 0$  et  $z = 1$ , les coefficients et constante valent :

$$\begin{aligned} a_0 = a_1 = a_2 &= 0, \\ a_3 = 10, \quad a_4 &= -15 \quad \text{et} \quad a_5 = 6. \end{aligned}$$

Tableau 17.1

**Fonctions de transmission polynomiales normées**

Degré Max	Fonction de transmission normée : $f(z)$	$C_v$ z valeur	$C_a$ z valeur	$C_c$ z valeur	$C_M$ z valeur
1	<b>P 1</b> $f(z) = z$	0,1 1,0	0 $\infty$	0 $\infty$	0 $\infty$
2	<b>P 2</b> pour $0 \leq z \leq 0,5$ $f(z) = 2 z^2$ pour $0,5 \leq z \leq 1,0$ $f(z) = 1 - 2(1-z)^2$	0,5 2,0	0,0,5 4,0	0,1 $\infty$	0,5 8,0
3	<b>P 2-3</b> $f(z) = 3 z^2 - 2 z^3$	0,5 1,5	0 6,0	0 $\infty$	0,211 3,46
4	<b>P 3-4</b> pour $0 \leq z \leq 0,5$ $f(z) = 8 (z^3 - z^4)$ pour $0,5 \leq z \leq 1$ $f(z) = 1 - 8[(1-z)^3 - (1-z)^4]$	0,5 2,0	0,25 6,0	0 48,0	0,342 7,92
5	<b>P 3-4-5</b> $f(z) = 10 z^3 - 15 z^4 + 6 z^5$	0,5 1,88	0,211 5,77	0 60,0	0,311 6,69
6	<b>P 3-4-5-6</b> pour $0,0 \leq z \leq 0,5$ $f(z) = 8 \cdot (5 z^3 - 15 z^4 + 24 z^5 - 16 z^6) / 3$ pour $0,5 \leq z \leq 1,0$ $f(z) = 1 - 8 \cdot [5(1-z)^3 - 15(1-z)^4 + 24(1-z)^5 - 16(1-z)^6] / 3$	0,5 2,0	0,25 5,0	0 80,0	0,385 7,61
8	<b>P 3-4-5-6-7-8</b> pour $0,0 \leq z \leq 0,5$ $f(z) = 8 \cdot (7 z^3 - 35 z^4 + 112 z^5 - 224 z^6 + 256 z^7 - 128 z^8) / 3$ pour $0,5 \leq z \leq 1,0$ $f(z) = 8 \cdot [7 \cdot (1-z)^3 - 35 \cdot (1-z)^4 + 112 \cdot (1-z)^5 - 224 \cdot (1-z)^6 + 256 \cdot (1-z)^7 - 128 \cdot (1-z)^8] / 3$	0,5 2,0	0,25 4,66	0 112,0	0,408 7,56
TH	<b>Trapézoïdal + Harmonique</b> avec $b = 8 \pi / (2 + \pi)$ , pour $0,0 \leq z \leq 0,125$ $f''(z) = b \cdot \sin(4 \pi z)$ pour $0,125 \leq z \leq 0,375$ $f''(z) = b$ pour $0,375 \leq z \leq 0,625$ $f''(z) = -b \cdot \sin(4 \pi z)$ pour $0,625 \leq z \leq 0,875$ $f''(z) = -b$ pour $0,875 \leq z \leq 1,00$ $f''(z) = b \cdot \sin(4 \pi z)$	0,5 2,0	0,25 4,89	0 61,4	0,39 8,09

Le polynôme normé vaut donc :

$$f(z) = 10 z^3 - 15 z^4 + 6 z^5 ,$$

$$f'(z) = 30 (z^2 - 2 z^3 + z^4) ,$$

$$f''(z) = 60 (z - 3 z^2 + 2 z^3) .$$

Ce résultat correspond et confirme les coefficients du polynôme P 3-4-5 .

La représentation graphique de ces trois fonctions est donnée sur la figure 17.8 à gauche.

### 17.4.2 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES SIMPLES

Les fonctions trigonométriques contiennent des composantes harmoniques et facilitent de ce fait la recherche du comportement dynamique du mécanisme. La fonction la plus simple et utilisable est la fonction de Bestehorn. L'accélération est une fonction sinusoïdale simple de l'angle de rotation de la came. La fonction S 1-3 permet de diminuer la valeur maximale de l'accélération. La fonction S 1-3-5 permet d'atteindre une dérivée troisième nulle en début et en fin de mouvement. La forme habituelle de ces fonctions simples est :

$$y = f(z) = z - \sum_{i=1}^n A_i \cdot \sin(2\pi \cdot i \cdot z) . \quad (17.2.2)$$

La figure 17.10 montre à gauche la fonction sinusoïdale à deux termes S 1-3. La partie droite de la même figure représente les accélérations des trois fonctions sinusoïdales simples.

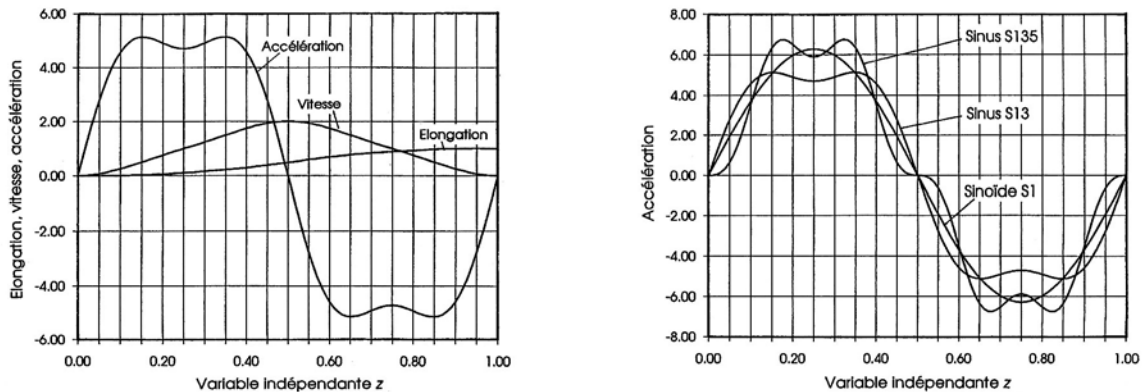


Figure 17.10 Fonctions sinusoïdales normées : S1-3 et comparaison des accélérations

### 17.4.3 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES OBLIQUES

Les fonctions trigonométriques obliques sont des fonctions supérieures permettant le choix de la vitesse maximale et la position de l'accélération maximale tout en garantissant une transmission sans à-coups. Pour cette classe de fonctions, il n'est pas possible d'exprimer la grandeur de sortie directement en fonction de la grandeur d'entrée. Ces deux grandeurs sont fonction d'un paramètre dénommé aussi  $z$ , avec  $z$  pouvant varier de 0,0 à 1,0. La forme générale de ces deux fonctions est :

$$\begin{aligned} f(z) &= z - (b_y/2\pi) \sin(2\pi z), \\ g(z) &= z - (b_x/2\pi) \sin(2\pi z). \end{aligned} \quad (17.2.3)$$

Les facteurs  $b_x$  et  $b_y$  doivent être choisis de telle sorte que la variation de la grandeur de sortie reste continue dans le domaine d'application. Les dérivées des fonctions de transmission s'expriment par :

#### Déplacement en montée

$$\begin{aligned} y &= y(z) = y_m \cdot f(z), \\ x &= x(z) = x_m \cdot g(z), \\ y' &= y'(z) = (y_m/x_m) \cdot F'(z), \\ y'' &= y''(z) = (y_m/x_m^2) \cdot F''(z), \end{aligned}$$

#### Déplacement en descente

$$\begin{aligned} y &= y(z) = y_m [1 - f(z)], \\ x &= x(z) = x_d \cdot g(z), \\ y' &= y'(z) = -(y_d/x_d) \cdot F'(z), \\ y'' &= y''(z) = -(y_d/x_d^2) \cdot F''(z). \end{aligned}$$



Tableau 17.2

**Fonctions de transmission trigonométriques normées**

Degré max	Fonction de transmission normée : $f(z)$	$C_v$ z valeur	$C_a$ z valeur	$C_c$ z valeur	$C_M$ z valeur
1	<b>Sinusoïde</b> $f(z) = 0,5 \cdot [1 - \cos(\pi z)]$	0,5 1,57	0 4,93	0 $\infty$	0,25 3,88
2	<b>Sinoïde de Bestehorn</b> $f(z) = z - (1/2\pi) \cdot \sin(2\pi z)$	0,5 2,0	0,25 6,28	0 39,5	0,33 8,16
3	<b>S 1-3</b> $f(z) = z - (15/32\pi) \cdot \sin(2\pi z) - (1/96\pi) \cdot \sin(6\pi z)$	0,5 2,0	0,152 5,13	0 59,2	0,383 8,12
5	<b>S 1-3-5</b> $f(z) = z - (15/512\pi) \cdot [18 \cdot \sin(2\pi z) - (1/9) \cdot \sin(6\pi z) - (3/25) \sin(10\pi z)]$	0,5 2,0	0,176 6,74	0,099 70,5	0,346 10,43
A	<b>Sinusoïde oblique</b> Optimisation du couple $f(z) = z - (1/2\pi) \cdot \sin(2\pi z)$ $g(z) = z - (0,134/2\pi) \cdot \sin(2\pi z)$	x = 0,5 1,76	x = 0,170 5,89	x = 0 61,0	x = 0,269 5,77
M	<b>Sinusoïde oblique</b> Optimisation du couple $f(z) = z - (1/2\pi) \cdot \sin(2\pi z)$ $g(z) = z - (0,41/2\pi) \cdot \sin(2\pi z)$	x = 0,5 1,42	x = 0,068 7,38	x = 0 192	x = 0,129 4,19
<b>C Combinaison harmonique</b> (selon E. Petersen) $0,0 \leq z \leq \lambda/4$ $f_1 = (\lambda \cdot C_a / 2\pi) \cdot [z - (\lambda/2\pi) \cdot \sin(2\pi z / \lambda)]$ $\lambda/4 \leq z \leq \lambda$ $f_2 = (\lambda/2\pi)^2 \cdot C_a \cdot \{8 + 2\pi z / \lambda - 9 \cos[(2\pi/3\lambda)(z - \lambda/4)]\}$ $\lambda \leq z \leq 1,0$ $f_3 = -(1-\lambda) \cdot C_a^* / \pi \cdot \{4(1-\lambda) / \pi \cdot \sin[\pi(z-\lambda)/(2(1-\lambda))] + (\lambda/2\pi)(4+\pi)\}$ , avec : $C_a^* = -2\pi^2 / (8 - \lambda(12 - \pi) + \lambda^2(4 - \pi))$ et $C_a = -(1-\lambda) \cdot C_a^* / \lambda$ .					

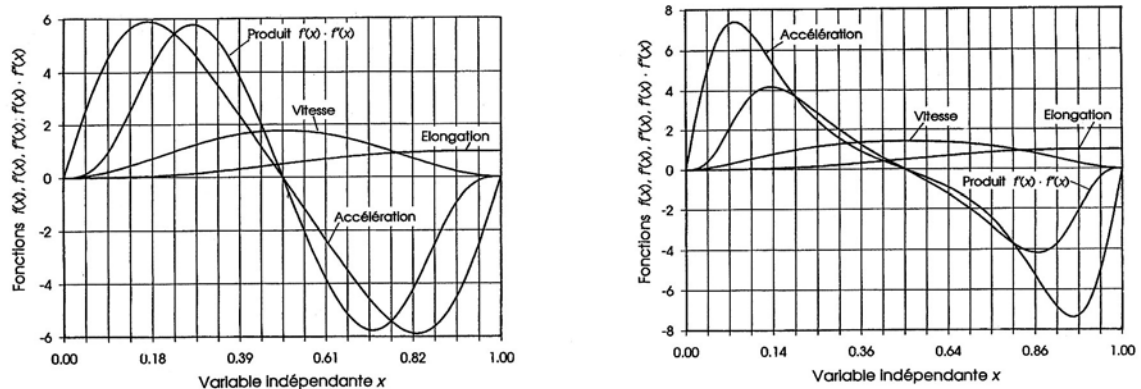


Figure 17.11 Fonctions trigonométriques obliques : optimisation de l'accélération ou du couple

Avec :  $f'(z) = 1 - b_y \cos(2\pi z)$ ,  $f''(z) = 2\pi b_y \sin(2\pi z)$ ,  
 $g'(z) = 1 - b_x \cos(2\pi z)$ ,  $g''(z) = 2\pi b_x \sin(2\pi z)$ .

Les dérivées successives des fonctions de transmission deviennent :

$$F'(z) = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dg(z)} = \frac{1 - b_y \cos(2\pi z)}{1 - b_x \cos(2\pi z)},$$

$$F''(z) = \frac{dF'(z)}{dg(z)} = 2\pi \cdot \frac{(b_y - b_x) \cdot \sin(2\pi z)}{[1 - b_x \cos(2\pi z)]^3}. \quad (17.2.4)$$

Les constantes  $b_x$  et  $b_y$  dépendent des conditions aux limites de la fonction, soit pour  $z = 0$  et  $z = 1$ . En ces points, la correspondance entre ces deux facteurs s'exprime simplement par :

$$F'(0) = F'(1) = \frac{1 - b_y}{1 - b_x}. \quad (17.2.5)$$

En tenant compte de cette dernière relation pour la dérivée première aux points initial et final, les facteurs  $b_x$  et  $b_y$  peuvent se choisir librement. Il est possible d'admettre par exemple  $b_y = 1$  et de varier  $b_x$  de -1 à +1. Sur la figure 17.12 à droite, les deux lignes pointillées donnent les valeurs dites optimales pour  $C_a$  et  $C_M$ . Le chiffre de vitesse maximal a toujours sa position pour  $z = 0,5$ . La figure donne également la variation des chiffres caractéristiques pour  $-0,9 < b_x < 0,9$  et pour les points particuliers :

- $b_x = 0$  pour la sinoïde de Bestehorn,
- $b_x = 0,134$  pour la sinusoïde oblique avec optimisation de l'accélération :  $C_{a \min} = 5,89$ ,
- $b_x = 0,41$  pour la sinusoïde oblique avec optimisation du couple :  $C_{M \min} = 4,19$ .

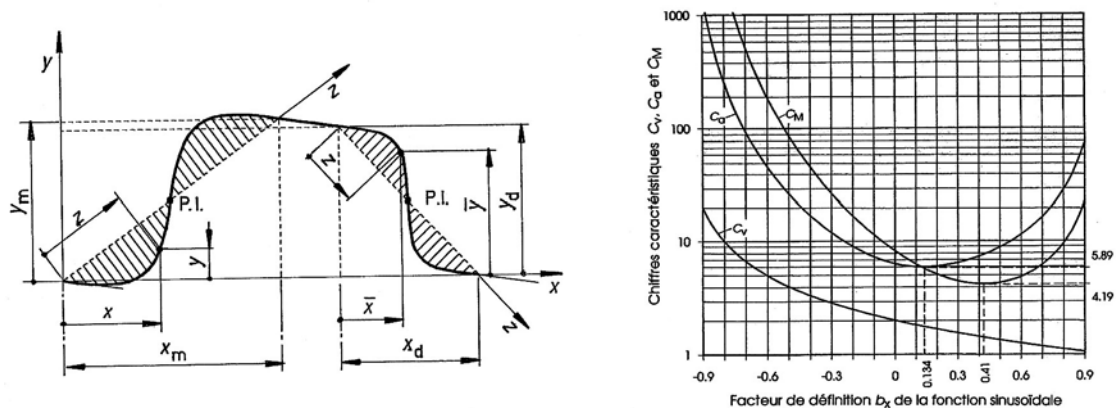


Figure 17.12 Représentation des fonctions de transmission pour les lois à sinusoïdes obliques  
Chiffres caractéristiques  $C_v$ ,  $C_a$  et  $C_M$  pour  $b_y = 1$  et  $b_x$  variable de -0,9 à +0,9

#### 17.4.4 MOUVEMENTS MIXTES AVEC VITESSE CONSTANTE

La course totale du mouvement du galet est généralement imposée dans les mécanismes à came. Il est parfois souhaitable, voire nécessaire, de fixer un domaine à vitesse linéaire ou angulaire constante par exemple pour actionner le déplacement précis d'un objet d'une position à l'autre.

##### 1. Principe de la méthode

Le mouvement uniforme de l'organe commandé peut se définir soit en fonction de l'angle de rotation de la came, soit en fonction de la course à prévoir. Dans les deux cas, la représentation graphique de la vitesse en fonction de l'angle de rotation ou du temps écoulé est modifiée par rapport aux discussions entrevues précédemment. La partie médiane de ce nouveau comportement comprend un tronçon horizontal. L'aire de la surface sous la courbe totale se compose de trois parties :

- une aire triangulaire curviligne à vitesse variant de zéro à sa valeur maximale,
- une aire rectangulaire à vitesse constante et maximale,
- une aire triangulaire curviligne à vitesse variant de sa valeur maximale à zéro.

L'aire totale doit correspondre exactement à l'élongation et doit valoir, pour une fonction normée, la grandeur unitaire soit  $y = 1$ . La figure 17.13 montre cette propriété et met en évidence la transformation à prévoir dans la mise en équation.

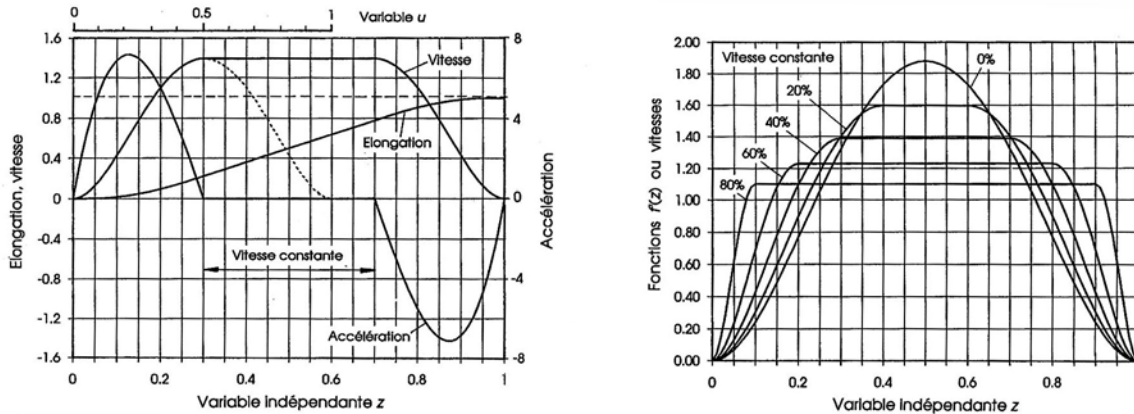


Figure 17.13 Principe de la mise en équation d'une loi mixte symétrique avec tronçon à vitesse constante. Allure de la variation de la vitesse pour plusieurs pourcentages de  $\lambda$

## 2. Mise en équation et facteurs de correction [2-103]

Le mouvement est dénommé mixte. En dehors du domaine à vitesse constante, l'allure de cette grandeur cinématique est identique à celle des mouvements fondamentaux discutés jusqu'ici, soit de type polynomial, soit de type harmonique.

Pour conserver les principes énoncés, nous introduisons un changement de variable dans le calcul du mouvement mixte et un facteur de multiplication. La variable indépendante dans le mouvement mixte total est encore  $z$  dans des limites telles que  $0 \leq z \leq 1$ . La variable dans le mouvement simple avec vitesse variable est  $u$  dans un domaine tel que  $0 \leq u \leq 1$ . L'allure de la dérivée première  $f_1'(u)$  par rapport à  $u$  est symétrique.

Définissons :

- $z$  variable indépendante dans le mouvement mixte complet,
- $u$  variable indépendante dans le mouvement selon la loi normée usuelle, (soit l'échelle complémentaire supérieure sur la figure 17.12 à gauche),
- $f_1, f_1', f_1''$  loi fondamentale, dérivées première et seconde de la loi normée à vitesse variable,
- $k_t$  facteur de changement de variable :  $k_t = z/u$ ,
- $k$  facteur d'adaptation de l'amplitude de la vitesse,
- $\varphi_2 - \varphi_1$  angle balayé par la came à vitesse constante du galet,
- $\Delta\varphi$  angle total de la came pour obtenir la course unitaire,  $y = 1$ ,
- $\lambda$  partie à vitesse constante exprimée par rapport l'angle de rotation de la came,
- $\lambda_y$  partie à vitesse constante exprimée par rapport à la course.

Après transformations et comparaison, le facteur d'adaptation d'amplitude de la vitesse, dans le cas d'une partie à vitesse constante, exprimée par rapport à l'angle de rotation de la came, se donne par :

$$k = \frac{1}{(1 - \lambda) + \lambda \cdot f_1'(u = 0,5)} \quad (17.3.1)$$

Si la partie à vitesse constante doit s'exprimer par rapport à la course normée et non par rapport à l'angle de rotation de la came, la partie à vitesse constante donnée par rapport à cet angle de rotation devient :

$$\lambda = \frac{1}{(1/\lambda_w - 1) \cdot f_1'(u=0,5) + 1}. \quad (17.3.2)$$

Dans ces deux expressions,  $f_1'(u=0,5)$  est la valeur de la dérivée première de la fonction normée à vitesse variable pour  $u=0,5$ , soit la valeur maximale de la vitesse normée.

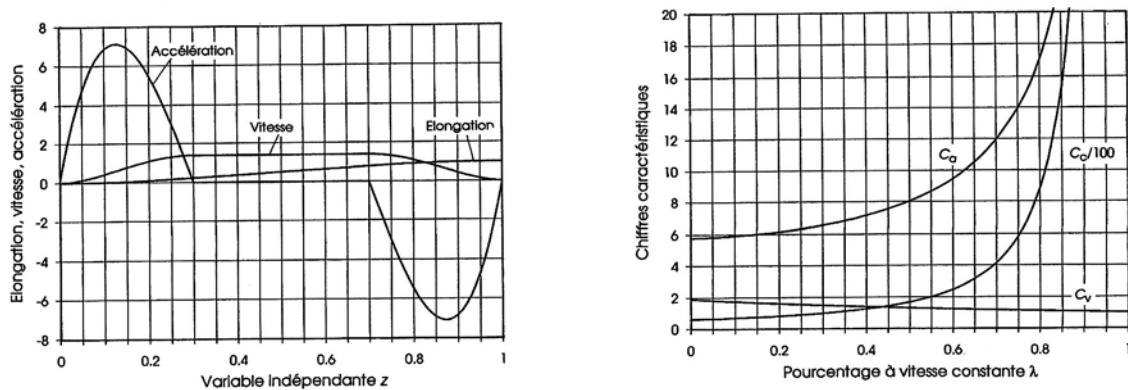


Figure 17.14 Représentation des grandeurs cinématiques avec vitesse constante :  $\lambda = 40\%$  (P 3-4-5).  
Chiffres caractéristiques de vitesse, accélération et à-coup en fonction de  $\lambda$  (P 3-4-5)

### 3. Elongation, vitesse et accélération

Trois domaines sont à considérer pour les grandeurs cinématiques normées dans le mouvement mixte : accélération, vitesse constante et décélération de l'organe mené.

#### 3.1 Domaine pour $z \leq 0,5 \cdot (1-\lambda)$ :

- élongation :  $y = f(z) = (k/k_t) \cdot f_1(k_t \cdot z),$
- vitesse :  $f'(z) = k \cdot f_1'(k_t \cdot z),$
- accélération :  $f''(z) = k \cdot k_t \cdot f_1''(k_t \cdot z).$

#### 3.2 Domaine pour $0,5 \cdot (1-\lambda) < z \leq 0,5 \cdot (1+\lambda)$ :

- élongation :  $y = f(z) = k \cdot \{ [z - (1-\lambda)/2] f_1'(u=0,5) + (1/k_t) f_1[k_t \cdot (1-\lambda)/2] \}.$
- vitesse :  $f'(z) = k \cdot f_1'(u=0,5),$
- accélération :  $f''(z) = 0.$

#### 3.3 Domaine pour $0,5 \cdot (1+\lambda) \leq z \leq 1,0$ :

avec :  $z_3 = z - \lambda$

$$y_2 = k \cdot [ \lambda \cdot f_1'(u=0,5) + f_1(u=0,5)/k_t ],$$

- élongation :  $y = f(z) = (k/k_t) \cdot [f_1(k_t \cdot z_3) - f_1(u=0,5)] - y_2,$
- vitesse :  $f'(z) = k \cdot f_1'(k_t \cdot z_3),$
- accélération :  $f''(z) = k \cdot k_t \cdot f_1''(k_t \cdot z_3).$

### 4. Remarques sur la variation de l'accélération et les chiffres caractéristiques

L'accélération est d'autant plus grande que la part à vitesse constante est importante. À la limite, l'accélération devient infiniment grande lorsque la vitesse est constante pendant tout le

mouvement :  $v = 1,0$ . La figure 17.14 à droite montre les chiffres caractéristiques en fonction du pourcentage à vitesse constante, la loi fondamentale adoptée étant la loi P 3-4-5. Ces chiffres dépendent légèrement de la loi fondamentale retenue. Enfin, les aires de toutes les surfaces représentées sur la figure 17.14 à droite valent un pour toutes les parties  $\lambda$ .

### 17.4.5 CONDITIONS PARTICULIÈRES DE CALCUL

#### 1. Fonctions de transmission discrètes

Dans certains cas particuliers, la fonction de transmission  $y = f(x)$  est donnée sous forme discrète. Les dérivées premières et secondes sont trouvées soit graphiquement, soit analytiquement par les méthodes usuelles des mathématiques numériques. Il est vivement recommandé d'améliorer les résultats au moyen d'un contrôle par intégration. Après avoir amélioré l'allure de la dérivée seconde  $y''(x)$  de manière à assurer une variation continue de l'accélération, calculer la première intégrale pour trouver  $y'(x)$  et la seconde intégrale pour retrouver  $y(x)$ . De légères modifications permettront d'atteindre les conditions imposées par les valeurs aux limites.

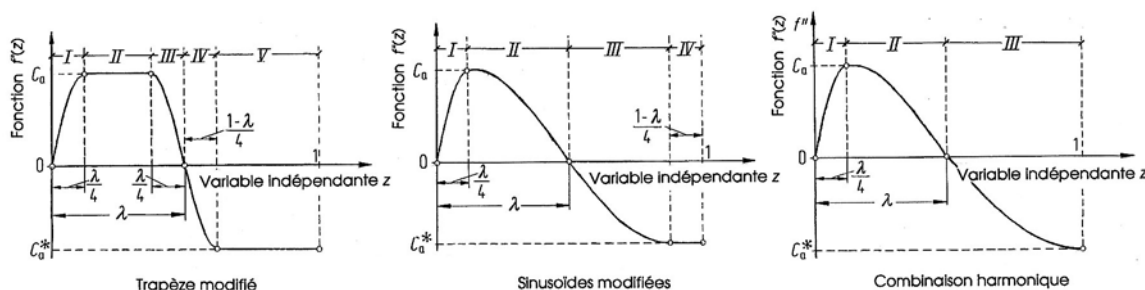


Figure 17.15 Trois représentations de  $f''(z)$  pour des mouvements sans phase de repos

#### 2. Mouvements oscillatoires sans phase de repos

Les fonctions de transmission données dans les deux tableaux précédents sont toujours prévues pour des mouvements oscillatoires avec phase d'immobilité au début et en fin de mouvement. Or dans de nombreuses applications techniques, le mouvement de va et vient doit s'effectuer sans repos intermédiaire. Si la vitesse angulaire de la came est élevée et si ces lois sont introduites dans l'étude, les effets dynamiques peuvent devenir très importants, engendrer des vibrations et créer du bruit du fait d'une accélération devenant nulle en fin de chaque mouvement composant. Il est donc recommandé de maintenir l'accélération à un niveau suffisant au moment de l'inversion du mouvement.

Sur la figure 17.15, la dérivée seconde de la fonction de transmission est représentée en fonction de la variable indépendante  $z$ . Elle doit être une fonction continue de  $z$ . Les possibilités représentées sont :

##### 2.1 Trapèze modifié par une sinusoïde

Cette loi est semblable à la loi trapézoïdale et harmonique. Elle se compose de cinq parties : sinusoïde, accélération constante, sinusoïde, sinusoïde et accélération constante.

##### 2.2 Sinusoïdes modifiées

Cette loi se compose de quatre parties : trois sinusoïdes et une accélération constante,

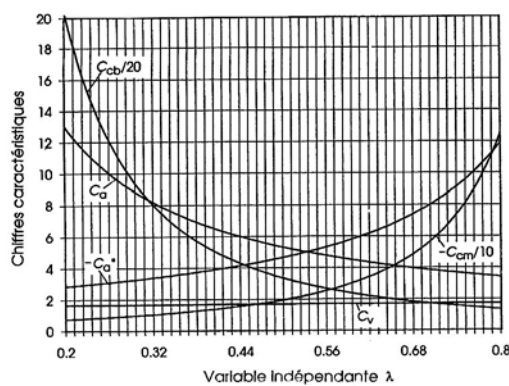
##### 2.3 Combinaison harmonique

Cette loi se compose de trois parties seulement : trois sinusoïdes. Les lois composantes sont données dans le tableau 17.1.

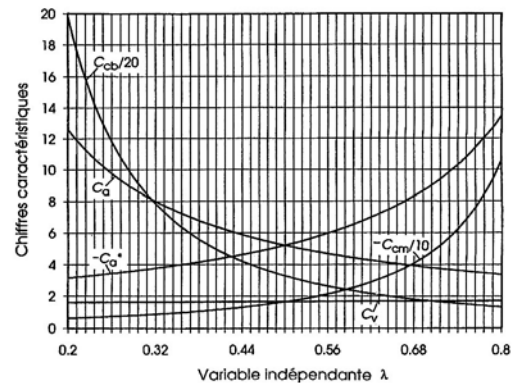
Les mouvements sont obtenus par intégration de la fonction normée  $f''(z)$  dans chaque cas en tenant compte des conditions aux limites. La variable indépendante  $z$  prend les valeurs comprises entre 0,0 et 1,0. La position où la fonction est nulle,  $f''(z) = 0$ , est définie par la grandeur  $\lambda$ . Les chiffres caractéristiques sont aussi :

- chiffre de vitesse :  $C_v$ ,
- chiffres d'accélération :  $C_a$  et  $C_a^*$ ,  $C_a$  dans la partie positive,  $C_a^*$  dans la partie négative,
- chiffre d'à-coup :  $C_{cb}$  et  $C_{cm}$ .

Ces trois fonctions sont adaptables aux conditions imposées par la transmission à came. Le paramètre  $\lambda$ , pouvant se choisir librement en fonction de critères d'optimisation, représente le rapport entre l'abscisse du point d'inflexion et la valeur  $z = 1$ .



Sinusoïdes modifiées



Combinaison harmonique

Figure 17.16 Chiffres caractéristiques pour la sinusoïde modifiée et la combinaison harmonique (Selon E.Petersen [2.105] : Lois combinées pour les mouvements sans phase de repos)

La figure ci-dessus montre la variation des divers chiffres caractéristiques en fonction du paramètre  $\lambda$ .

### 3. Choix de la fonction de transmission

Le choix de la fonction de transmission simple ou combinée dépend des contraintes imposées au mécanisme. Les chiffres caractéristiques permettent de trouver une solution satisfaisante à un type de problème posé. Les lois les plus utilisées sont : la parabole cubique, la loi polynomiale P 3-4-5, la sinoïde de Besthorn et la sinusoïde à couple optimal. Si les conditions de mouvement sont plus complexes, une étude plus poussée est nécessaire.

### 4. Mouvement complet

Les figures et relations proposées dans ce sous-chapitre permettent de résoudre le déplacement jusqu'à la vitesse nulle. Le mouvement de va et vient est obtenu en maintenant l'accélération négative ou son chiffre caractéristique  $C_a^*$  constant au début du mouvement de retour. Les relations cinématiques sont semblables à celles du mouvement d'aller et s'adaptent facilement aux nouvelles conditions.

## 17.4.6 LOIS CINÉMATIQUES

Les lois cinématiques d'un mécanisme à came décrivent l'angle du levier ou la course de la tige, la vitesse, l'accélération linéaire ou angulaire de l'élément entraîné en fonction du temps. Exprimons les valeurs de la fonction de transmission et ses dérivées successives à la montée et à la descente.

## Mouvement de montée

$$y = y(x) = y_m \cdot f(z),$$

$$y' = y'(x) = (y_m/x_m) \cdot f'(z),$$

$$y'' = y''(x) = (y_m/x_m^2) \cdot f''(z),$$

$$y''' = y'''(x) = (y_m/x_m^3) \cdot f'''(z).$$

## Mouvement de descente

$$y = y(x) = y_m \cdot (1 - f(z)),$$

$$y' = y'(z) = -(y_m/x_d) \cdot f'(z),$$

$$y'' = y''(z) = -(y_m/x_d^2) \cdot f''(z),$$

$$y''' = y'''(z) = -(y_m/x_d^3) \cdot f'''(z).$$

Exprimons également l'élongation rectiligne par  $w_B$ , par  $v_B$  la vitesse linéaire et par  $a_B$  l'accélération linéaire du centre du galet monté sur la tige en mouvement oscillatoire, par  $\psi_B$  la position angulaire, par  $\omega_B$  la vitesse angulaire et par  $\alpha_B$  l'accélération angulaire du levier supportant le galet. La course de montée est désignée par  $w_m$  et celle de descente par  $w_d$  en mouvement rectiligne, celle de montée par  $\psi_m$  et celle de descente par  $\psi_d$  en mouvement circulaire. L'angle balayé par la came pendant le mouvement de montée est  $\varphi_m$ , pendant le mouvement de descente  $\varphi_d$ . La vitesse angulaire de la came est  $\omega_0$ , l'accélération angulaire  $\alpha_0$  si elle existe. Les lois cinématiques générales deviennent :

## Mouvement de montée

## Mouvement de descente

## 1. Mécanismes à came avec tige rectiligne

$$w_B = w_m \cdot f(z),$$

$$w_B = w_d \cdot (1 - f(z)),$$

$$v_B = (w_m/\varphi_m) \cdot \omega_0 \cdot f'(z),$$

$$v_B = -(w_d/\varphi_d) \cdot \omega_0 \cdot f'(z),$$

$$a_B = (w_m/\varphi_m) \cdot \alpha_0 \cdot f'(z) + (w_m/\varphi_m^2) \cdot \omega_0^2 \cdot f''(z),$$

$$a_B = -(w_d/\varphi_d) \cdot \alpha_0 \cdot f'(z) - (w_d/\varphi_d^2) \cdot \omega_0^2 \cdot f''(z).$$

## 2. Mécanismes à came avec levier oscillant

$$\psi_B = \psi_m \cdot f(z),$$

$$\psi_B = \psi_d \cdot (1 - f(z)),$$

$$\omega_B = (\psi_m/\varphi_m) \cdot \omega_0 \cdot f'(z),$$

$$\omega_B = -(\psi_d/\varphi_d) \cdot \omega_0 \cdot f'(z),$$

$$\alpha_B = (\psi_m/\varphi_m) \cdot \alpha_0 \cdot f'(z) + (\psi_m/\varphi_m^2) \cdot \omega_0^2 \cdot f''(z),$$

$$\alpha_B = -(\psi_d/\varphi_d) \cdot \alpha_0 \cdot f'(z) - (\psi_d/\varphi_d^2) \cdot \omega_0^2 \cdot f''(z).$$

Cette collection de relations s'applique aux mécanismes à entraînement à vitesse angulaire  $\omega_0$  constante ou variable. Si la vitesse angulaire de la came est constante, l'accélération angulaire  $\alpha_0$  est nulle et les troisièmes relations se simplifient fortement.

## 17.5 GÉOMÉTRIE DE LA CAME

Les dimensions géométriques d'un mécanisme à came peuvent être choisies dans les limites imposées par les grandeurs cinématiques et dynamiques, par la position des composants dans l'ensemble d'une machine. Il est recommandé d'étudier plusieurs variantes dimensionnelles et d'optimiser la solution définitive.

## 17.5.1 ANGLES DE PRESSION ET DE TRANSMISSION

Une came bien construite doit posséder non seulement des qualités cinématiques de transformation de mouvement, mais aussi des propriétés géométriques et dynamiques adéquates afin d'assurer un fonctionnement impeccable entre la came, le galet ou le poussoir et l'organe entraîné dans les conditions de service imposées par l'implantation.

En supposant dans une première approche du problème toutes les pièces indéformables et sans frottement, la force normale sur la came, sur la ligne de contact avec le galet ou le poussoir, n'est habituellement pas dirigée suivant la tangente à la trajectoire relative du centre du galet. L'angle  $\alpha$  compris entre cette normale à la came et la tangente à la trajectoire du point  $B$

est appelé angle de pression comme dans les engrenages. Son angle complémentaire  $\beta$  est l'angle de transmission.

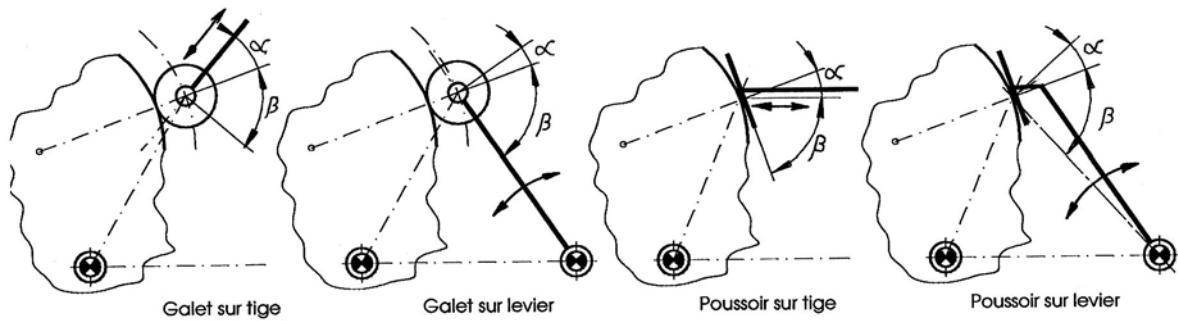


Figure 17.17 Angle de pression  $\alpha$  et angle de transmission  $\beta$  dans les mécanismes à came

Pour obtenir des conditions favorables de transfert du mouvement entre la came et l'organe entraîné, éviter les risques de coincement, l'expérience a montré que l'angle de pression ne devait pas dépasser les valeurs suivantes :

- Mécanisme lent à came avec  $n \leq 0,5$  tour/s, galet sur levier oscillant :  $\alpha \leq 45^\circ$ .
- Mécanisme rapide avec  $n > 0,5$  tour/s, galet monté sur tige rectiligne :  $\alpha \leq 30^\circ$ .

Une diminution de l'angle de pression s'obtient par une augmentation du rayon minimal de la came ou par un déplacement de la trajectoire de la tige ou du levier. Le rayon minimal de la came devrait être au moins égal à la montée totale du galet définie entre le rayon minimal et le rayon maximal.

### 17.5.2 RAYON DE COURBURE DE LA CAME

La came plane est limitée par une courbe fermée dont la forme dépend des fonctions de transmission adoptées, des angles de montée  $\varphi_m$  et de descente  $\varphi_d$ , de la course linéaire ou angulaire, du rayon minimal de la came. La valeur du rayon de courbure en chaque point peut se trouver si l'équation du profil de la came est connue.

Le rayon de courbure peut être positif ou négatif. Il est dit positif lorsque le centre de courbure se trouve du côté intérieur de la came, il est négatif dans le cas contraire. Les rayons de courbure négatifs ne doivent jamais être plus petits, en valeur absolue, que le rayon du galet sinon il y a interférence des profils et le galet ne peut plus suivre la surface de la came. Dans le cas de mécanismes équipés de poussoir, le profil de la came ne doit jamais être concave. Le rayon de courbure intervient dans la recherche de la pression hertzienne entre la came et le galet. Le rayon de courbure se trouve à partir de la trajectoire relative du centre du galet et le point de contact du galet sur la came se trouve sur la normale, soit la droite reliant le centre du galet au centre de courbure. L'angle de pression et la variation du rayon de courbure appartiennent aux propriétés importantes des mécanismes à came.



## 17.6 MÉCANISME À CAME À GALET SUR TIGE CENTRÉE

Le calcul des dimensions géométriques de la came est facilité par l'emploi d'un logiciel évolué, les opérations mathématiques étant répétitives en chaque point. Pour les cames avec tige centrée, les relations sont relativement simples et peuvent même s'enregistrer dans une calculatrice programmable.

### 17.6.1 GRANDEURS FONDAMENTALES

Le mécanisme à came est dit à tige centrée lorsque l'axe de la tige supportant le galet passe par le centre de rotation de la came. Les grandeurs initiales à introduire dans le calcul sont :

- la course de montée  $w_m$  ou de descente  $w_d$  du centre du galet,
- le rayon minimal de la came  $r_{\min}$ , le rayon maximal de la came  $r_{\max}$ ,
- les angles de rotation  $\varphi_m$  ou  $\varphi_d$  commandant la montée ou la descente,
- le nombre de montées et de descentes partielles pour un tour de la came,
- le diamètre du galet  $d_g = 2 r_g$ ,
- la fréquence de rotation de la came,
- les masses à déplacer et les efforts extérieurs sur la tige.

Le rayon minimal à prévoir dépend de l'angle de pression admissible. Dans un premier calcul, il est possible d'admettre :

$$r_{\min \text{ came}} \geq (1 \text{ à } 2) \cdot w_m.$$

Le facteur de multiplication dépend de l'angle de montée  $\varphi_m$  ou de descente  $\varphi_d$ . Plus l'angle est petit, plus le facteur est élevé.

### 17.6.2 MISE EN ÉQUATION

La mise en équation de la position du centre du galet par rapport au centre de rotation de la came utilise les coordonnées polaires et l'inversion du mécanisme. Le galet avec sa tige est supposé tourner autour du profil de la came fixe dans le sens mathématique. La position initiale du centre du galet se trouve sur l'axe de référence  $Ox$ , à la distance  $r_{\min} + r_g$  du centre de rotation  $A_0$  placé à l'origine du système de coordonnées. Dans la mise en équation, le galet avec sa tige s'est déplacé d'un angle  $\varphi$ , le centre du galet  $B$  s'étant éloigné radialement de la distance  $w$ . Le rayon issu de l'origine et défini par le point  $B$  est le rayon vecteur  $A_0B = r$ . Le profil de la came en contact avec le galet possède un rayon de courbure  $r_{cc}$ . Dans la mise en équation de la came, il est admis les déplacements suivants :

- un mouvement de montée, angle de rotation  $\varphi_m$ ,
- un repos en position haute,
- un mouvement de descente, angle de rotation  $\varphi_d$ ,
- un repos en position basse,
- un tour complet de la came pour ces quatre composantes.

#### 1. Rayons et ses dérivées par rapport à l'angle $\varphi$

Les grandeurs rayon instantané  $r = r(\varphi)$  et ses dérivées par rapport à l'angle  $\varphi$  sont définies par les relations suivantes :

Mouvement de montée

Mouvement de descente

#### 1. Rayon instantané : $r = r(\varphi)$

$$r = r_{\min} + r_g + w = r_{\min} + r_g + w_m \cdot f(z). \quad r = r_{\max} + r_g - w = r_{\max} + r_g - w_d \cdot f(z).$$

2. Dérivée première :

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{w_m}{\varphi_m} \cdot f'(z),$$

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{w_d}{\varphi_d} \cdot f'(z).$$

3. Dérivée seconde :

$$r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{w_m}{\varphi_m^2} \cdot f''(z),$$

$$r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2} = -\frac{w_d}{\varphi_d^2} \cdot f''(z). \quad (17.4.1)$$

Le calcul répétitif des grandeurs cinématiques : élongation, vitesse, accélération du centre du galet, et des grandeurs géométriques : angle de pression, rayon de courbure de la came, permet de justifier ou de modifier les grandeurs initiales. Pour diminuer l'angle de pression  $\alpha$ , il faut soit augmenter le rayon minimal de la came, soit augmenter les angles de montée  $\varphi_m$  ou de descente  $\varphi_d$ .

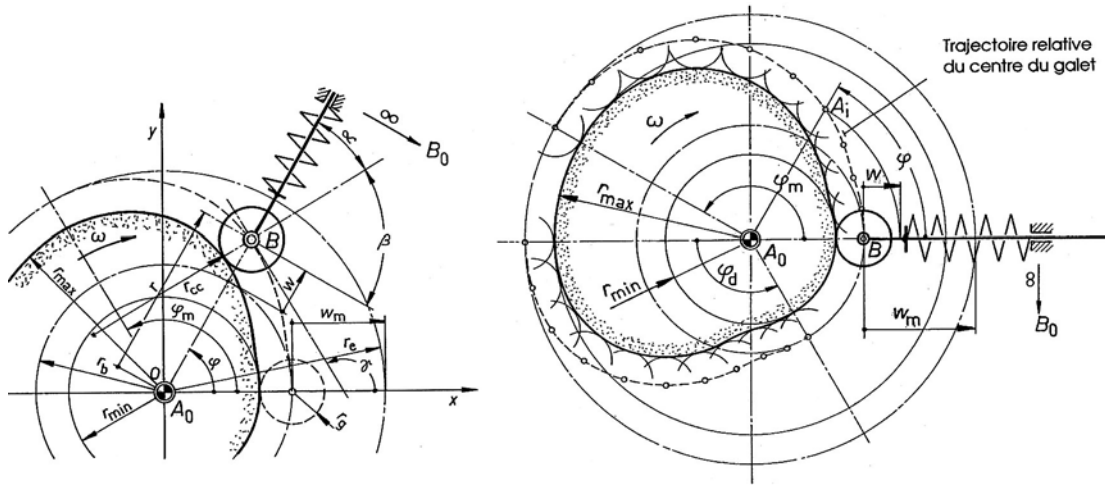


Figure 17.18 Grandeurs géométriques dans un mécanisme à came avec tige centrée  
Tracé graphique d'une came à partir de la trajectoire relative du centre du galet

## 2. Angle de pression

La tangente à la trajectoire relative au point  $B$  est défini par l'angle  $\gamma$ . L'angle de transmission  $\beta$  ou son complément l'angle de pression  $\alpha$  se calculent à partir de cet angle auxiliaire représenté sur la figure 17.18 et par les relations suivantes :

$$\sin \gamma = \frac{r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{r' \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

et finalement :

$$\tan \gamma = \arctan \frac{r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi}{r' \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi}. \quad (17.4.2)$$

L'angle de pression de la came se trouve par :

$$\alpha = 0,5 \pi + \varphi - \gamma. \quad (17.4.3)$$

La justification des relations proposées se trouve dans l'interprétation géométrique de la dérivée du rayon vecteur  $r$  par rapport à l'angle polaire  $\varphi$ . Dans le cas particulier,  $\gamma$  est l'angle compris entre la tangente à la courbe et le sens positif de la droite directrice correspondant à l'axe initial  $Ox$ .

*Attention* : Le calcul de l'angle auxiliaire  $\gamma$  doit tenir compte du signe des fonctions trigonométriques composantes  $\sin\gamma$  et  $\cos\gamma$  afin d'obtenir l'angle de pression correct.

### 3. Mouvement de la tige

La commande de la tige par la rotation de la came suppose un mouvement circulaire uniforme sur l'arbre moteur :  $\omega_0 = \text{constante}$ . Les propriétés cinématiques de la tige ou du point  $B$  sont :

Mouvement de montée	Mouvement de descente
- élongation : $w = w_m \cdot f(z)$ ,	$w = w_d \cdot [1 - f(z)]$ ,
- vitesse : $v = \frac{w_m}{\varphi_m} \cdot \omega_0 \cdot f'(z)$ ,	$v = - \frac{w_d}{\varphi_d} \cdot \omega_0 \cdot f'(z)$ ,
- accélération $a = \frac{w_m}{\varphi_m^2} \cdot \omega_0^2 \cdot f''(z)$ ,	$a = - \frac{w_d}{\varphi_d^2} \cdot \omega_0^2 \cdot f''(z)$ .

(17.4.4)

Le mouvement de la tige est positif lorsque le point  $B$  s'éloigne du centre de rotation  $A_0$ , négatif lorsqu'il s'en rapproche.

### 17.6.3 RAYON DE COURBURE

Le rayon de courbure de la trajectoire relative du centre du galet par rapport à la came et le rayon de courbure de la came dépendent directement des grandeurs fondamentales, en particulier du rayon minimal, de l'angle de rotation  $\varphi$  et de la fonction de transmission adoptée pour le mouvement. Comme les grandeurs précédentes sont exprimées en coordonnées polaires, le rayon de courbure en un point quelconque de la trajectoire relative se trouve par l'expression :

$$r_c = \frac{(r^2 + r'^2)^{1,5}}{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''}. \quad (17.5.1)$$

Le rayon de courbure de la came à profil extérieur, dans la même position relative de la tige par rapport à la came, vaut :

$$r_{c \text{ came}} = \frac{(r^2 + r'^2)^{1,5}}{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''} - r_g. \quad (17.5.2)$$

Un rayon de courbure positif indique un profil de came convexe, un rayon de courbure négatif représente une surface concave sur la came. Si la came présente des rayons de courbure négatifs, il faut contrôler la non interférence entre le profil de la came et celui du galet le long de tout le contour.

### 17.6.4 PROFIL DE LA CAME

Le profil de la came se déduit directement de la trajectoire relative du centre du galet. Graphiquement, ce profil est la courbe enveloppe des circonférences de rayon égal au rayon du galet  $r_g$  sur la trajectoire relative. Dans la plupart des positions, le point de contact  $P$  entre le galet et la came ne se trouve pas le rayon vecteur  $r(\varphi)$  mais sur la normale commune  $n$ , inclinée de l'angle de pression  $\alpha$  par rapport à l'axe de la tige. L'angle de pression sur la trajectoire relative est égal à celui de la came. La figure 17.19 montre la direction des tangentes  $t_B$  et  $t_P$  à ces deux courbes et celle de la normale commune  $n$ . Le point de contact entre le galet et la came peut se trouver par la relation vectorielle :

$$\vec{r}_{P \text{ came}} = \vec{r} + \vec{r}_g.$$

Le rayon vecteur issu du centre de la came  $r_{p \text{ came}}$  et aboutissant au point de contact  $P$  se construit ou se calcule facilement. La construction graphique du profil de la came consiste à dessiner la trajectoire relative et la courbe enveloppe, figure 17.19. Le tracé graphique utilise l'inversion cinématique en conservant la came fixe et en déplaçant la tige centrée avec son galet autour du point  $A_0$  de la came.

Le profil de la came doit aussi s'exprimer sous forme de coordonnées afin de pouvoir fabriquer cette pièce en atelier. Soit  $P$  le point de contact entre le galet et la came et  $x_p, y_p$ , les coordonnées rectangulaires de ce point définies par rapport à  $Oxy$ . Ces deux coordonnées se trouvent par projection des deux rayons  $r$  et  $r_g$  sur les axes :

$$\begin{aligned} x_p &= r \cdot \cos \varphi - r_g \cdot \cos(\varphi - \alpha), \\ y_p &= r \cdot \sin \varphi - r_g \cdot \sin(\varphi - \alpha). \end{aligned} \quad (17.5.3)$$

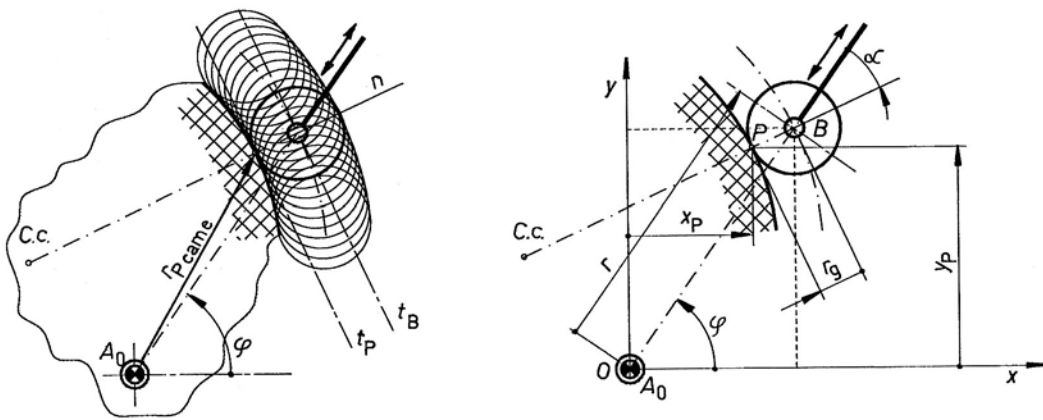


Figure 17.19 Construction du profil de la came à partir du profil enveloppe (C.c. centre de courbure)  
Position du point de contact  $P$  et coordonnées de ce point

### 17.6.5 EFFORTS ET COMPORTEMENT

Le mécanisme à tige centrée est un cas particulier de la came équipée d'une tige excentrée. La recherche des efforts et l'étude du comportement de ces deux mécanismes s'effectuera en détail au sous-chapitre 17.7.6.

## 17.7 MÉCANISME À CAME À GALET SUR TIGE EXCENTRÉE

Dans certaines implémentations et afin d'obtenir des conditions particulières de transmission comme une limitation de l'angle de pression, l'axe de la tige ne passe pas par le centre de rotation de la came, mais est excentré de la distance  $e$ . Ce mécanisme est le cas général d'une came commandant une tige équipée d'un galet.

### 17.7.1 GRANDEURS FONDAMENTALES

Les grandeurs initiales à introduire dans le calcul sont aussi :

- la course rectiligne de montée  $w_m$  ou de descente  $w_d$  du centre du galet,
- le rayon minimal de la came  $r_{\min}$ , le rayon maximal de la came  $r_{\max}$ ,
- les angles de rotation  $\varphi_m$  ou  $\varphi_d$  commandant la montée ou la descente,
- le nombre de montées et de descentes partielles pour un tour de la came,
- l'excentricité  $e$  et son signe,
- le diamètre du galet  $d_g = 2 r_g$ ,
- la fréquence de rotation de la came,
- les masses à déplacer et les efforts extérieurs sur la tige.

Comme pour le mécanisme à tige centrée, le rayon minimal à prévoir dépend de l'angle de pression admissible, des angles de montée et de descente et de l'excentricité. Dans un premier calcul, il est possible d'admettre :

$$r_{\min \text{ came}} = (1 \text{ à } 2) \cdot w_m.$$

Le facteur de multiplication vaut aussi une à deux fois la course maximale.

### 17.7.2 MISE EN ÉQUATION

La mise en équation de la trajectoire relative du centre du galet  $B$  et du profil de la came utilise un système de coordonnées orthonormé  $Oxy$ . Le point  $O$  coïncide avec le centre de rotation de la came  $A_0$ . L'axe  $Ox$  passe par le point de départ du centre du galet dans son mouvement de rotation. Ainsi, la position initiale du centre du galet se trouve à la distance  $r_b = r_{\min} + r_g$  du centre de rotation. L'excentricité  $e$  est :

- *positive* si l'axe de la tige, en position initiale, est tangent au cercle de rayon  $e$  en un point situé dans le premier quadrant.
- *négative* si l'axe de la tige, en position initiale, est tangent au cercle de rayon  $e$  en un point se trouvant dans le quatrième quadrant.

Le galet avec sa tige est supposé tourner autour du profil de la came fixe dans le sens mathématique. Dans la mise en équation d'une position quelconque du galet, ce dernier s'est déplacé angulairement de l'angle  $\varphi$ , le centre du galet  $B$  s'étant éloigné dans la direction de la tige de la distance  $w$ . Le déplacement total de montée est  $w_m$ . Cette longueur est différente de la différence des rayons  $\Delta r = r_{\max} - r_{\min}$ . Le rayon, issu du point  $O$ , et aboutissant au point de tangence initial de l'axe de la tige, est incliné de l'angle  $\delta$  par rapport à  $Ox$ . Dans la mise en équation des grandeurs géométriques et cinématiques, il est admis les déplacements suivants :

- un mouvement de montée, angle de rotation  $\varphi_m$ ,
- un repos en position haute,
- un mouvement de descente, angle de rotation  $\varphi_d$ ,
- un repos en position basse,
- un tour complet de la came pour ces quatre mouvements.

### 1. Géométrie et coordonnées du centre du galet

L'angle  $\delta$  compris entre l'axe  $Ox$ , le rayon issu du point  $O$  et aboutissant au point  $S$ , point de tangence du segment de droite partant du centre du galet en position initiale et se terminant sur le cercle de rayon  $e$ , se définit par :

$$\delta = \arccos \frac{e}{r_b} . \quad (17.6.1)$$

Le rayon de base  $r_b$  est la somme du rayon minimal de la came et du rayon du galet :

$$r_b = r_{\min} + r_g . \quad (17.6.2)$$

La variation de rayon  $\Delta r = r_{\max} - r_{\min} = r_e - r_b$  dépend du rayon de base, de l'excentricité et de la course du galet  $w_m$ . Elle peut se trouver par :

$$\Delta r = \sqrt{e^2 + (r_b \cdot \sin \delta + w_m)^2} - r_b . \quad (17.6.3)$$

L'angle auxiliaire  $\zeta$  se trouve par :

$$\zeta = \varphi + (\delta - 0,5 \pi) \cdot \text{signe}(e) . \quad (17.6.4)$$

En position quelconque du galet avec sa tige, l'axe de la tige est incliné de l'angle  $\zeta$ . L'élongation  $w$  et l'angle  $\zeta$  sont des fonctions de l'angle de rotation  $\varphi$  de la came. Pour une excentricité positive, figure 17.20 à gauche, les coordonnées du centre du galet sont :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = r_b \cdot \cos \varphi + w \cdot \cos \zeta, \\ y &= y_1 + y_2 = r_b \cdot \sin \varphi + w \cdot \sin \zeta. \end{aligned} \quad (17.7.1)$$

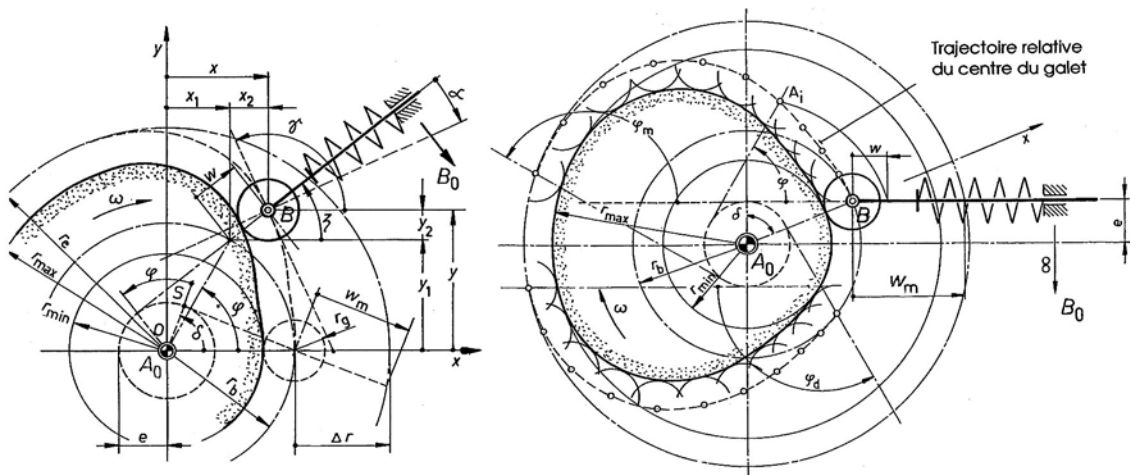


Figure 17.20 Dimensions géométriques dans le mécanisme à came avec tige excentrée positivement  
Construction du profil de la came à partir de la trajectoire relative du point  $B$

En introduisant la fonction de transmission normée  $f(z)$ , pour le mouvement de montée à partir du rayon minimal de la came, les coordonnées du centre du galet peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x &= r_b \cdot \cos(\varphi_m \cdot z) + w_m \cdot f(z) \cdot \cos \zeta, \\ y &= r_b \cdot \sin(\varphi_m \cdot z) + w_m \cdot f(z) \cdot \sin \zeta, \end{aligned} \quad (17.7.2)$$

avec :  $z = \varphi/\varphi_m$  dans le mouvement de montée,

$z = \varphi/\varphi_d$  dans le mouvement de descente.

En partant du point initial à la descente du galet, les équations paramétriques se transforment en :

$$\begin{aligned}x &= r_b \cdot \cos(\varphi_d \cdot z) + w_d \cdot [1 - f(z)] \cdot \cos \zeta, \\y &= r_b \cdot \sin(\varphi_d \cdot z) + w_d \cdot [1 - f(z)] \cdot \sin \zeta.\end{aligned}$$

### 2. Dérivées des coordonnées par rapport à l'angle $\varphi$

Le calcul de la tangente à la trajectoire relative et au profil de la came, de l'angle de pression  $\alpha$  et des rayons de courbure  $r_c$ ,  $r_{c \text{ came}}$ , introduit les dérivées premières et secondes des coordonnées par rapport à l'angle  $\varphi$ .

#### 1. Dérivées premières

$$\begin{aligned}\text{Axe } Ox \quad x' &= \frac{dx}{d\varphi} = -r_b \cdot \sin \varphi + w_m [f'(z) \cdot \cos \zeta - f(z) \cdot \sin \zeta], \\ \text{Axe } Oy \quad y' &= \frac{dy}{d\varphi} = r_b \cdot \cos \varphi + w_m [f'(z) \cdot \sin \zeta + f(z) \cdot \cos \zeta].\end{aligned} \quad (17.7.3)$$

#### 2. Dérivées secondes

$$\begin{aligned}\text{Axe } Ox \quad x'' &= \frac{d^2x}{d\varphi^2} = -r_b \cdot \cos \varphi + w_m \{ [f''(z) - f(z)] \cos \zeta - 2 f'(z) \cdot \sin \zeta \}, \\ \text{Axe } Oy \quad y'' &= \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -r_b \cdot \sin \varphi + w_m \{ [f''(z) - f(z)] \sin \zeta + 2 f'(z) \cdot \cos \zeta \}.\end{aligned} \quad (17.7.4)$$

### 3. Angle de pression

La direction de la tangente à la trajectoire relative au point  $B$  et au profil de la came au point de contact  $P$  se trouve par :

$$y'(x) = \tan \gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)}.$$

L'angle de pression devient :

$$\alpha = \zeta - [\arctan y'(x) - 1/2 \pi]. \quad (17.7.5)$$

Cet angle doit être aussi compris entre  $0^\circ$  et les limites recommandées pour le mécanisme à tige centrée.

## 17.7.3 RAYON DE COURBURE

La trajectoire relative du centre du galet par rapport au système de référence  $Oxy$  est exprimée par une fonction donnée sous forme paramétrique, le paramètre étant l'angle de rotation  $\varphi$  de la came. Les rayons de courbure, en un point quelconque de la trajectoire relative et du profil de la came, se trouvent par la relation générale démontrée en mathématiques. Le rayon de courbure en un point de la trajectoire relative vaut :

$$r_c = \frac{(x'^2 + y'^2)^{1,5}}{x'y'' - y'x''}. \quad (17.8.1)$$

Le rayon de courbure du profil de la came extérieure, dans la même position, se trouve par :

$$r_{P \text{ came}} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{1,5}}{x'y'' - y'x''} - r_g. \quad (17.8.2)$$

### 17.7.4 TRACÉ DE LA CAME

À partir des grandeurs initiales et des relations générales imposées par les conditions de transformation de mouvement, le tracé de la trajectoire relative du centre du galet et de la came peut se construire point par point. Les figures 17.20 et 17.21 montrent à droite deux cames, avec excentricité positive ou négative, même cinématique pour une montée et une descente.

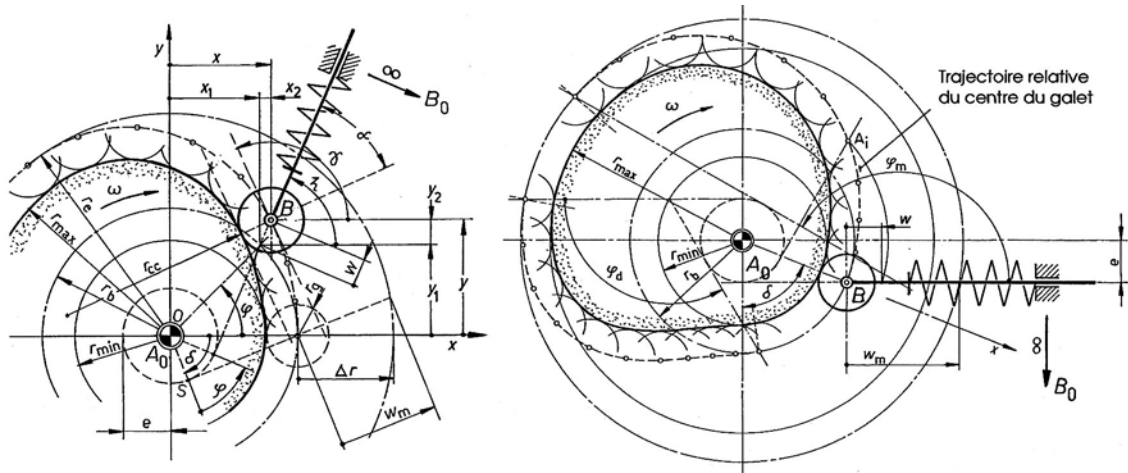


Figure 17.21 Dimensions géométriques dans le mécanisme à came avec tige excentrée négativement  
Construction du profil de la came à partir de la trajectoire relative du point B

#### 1. Principe de la construction graphique :

Après adoption de la position de l'excentricité, positive ou négative, du déplacement de montée  $w_m$  et de descente  $w_d$ , du rayon minimal de la came  $r_{\min}$  et du rayon du galet  $r_g$ , des angles de montée  $\varphi_m$  et de descente  $\varphi_d$ , de la loi normée, calculer :

- le rayon de base  $r_b$  selon relation (17.6.2),
- la variation des rayons  $\Delta r$  selon (17.6.3),
- le rayon maximal  $r_{\max} = r_{\min} + \Delta r$ ,
- l'angle auxiliaire  $\delta$  selon (17.6.1).

Tracer les deux cercles extérieurs : celui de la trajectoire relative  $r_e$ , celui de la came  $r_{\max}$ . Les deux cercles intérieurs sont définis par le rayon minimal  $r_{\min}$  et par le rayon de base  $r_b$ .

Diviser l'angle de montée  $\varphi_m$  et l'angle de descente  $\varphi_d$  en un nombre de pas suffisant, par exemple tous les  $5^\circ$  ou  $10^\circ$ . Calculer l'élongation  $w$  et porter cette dimension à partir de la circonférence de rayon  $r_b$  tangentielllement à la circonférence de rayon  $e$ . Dessiner des arcs de cercles centrés sur ces points. La courbe enveloppe est le profil de la came. Les figures 17.20 et 17.21 montrent le principe de cette tâche.

#### 2. Principe de la construction analytique :

La construction analytique du profil de la came se sert de la position du centre du galet B et des relations développées précédemment. Les coordonnées du point de contact P entre le galet et le profil de la came extérieure sont :

$$\begin{aligned} x_P &= r_b \cdot \cos \varphi + w \cdot \cos \zeta - r_g \cdot \cos(\zeta - \alpha), \\ y_P &= r_b \cdot \sin \varphi + w \cdot \sin \zeta - r_g \cdot \sin(\zeta - \alpha). \end{aligned} \quad (17.8.3)$$

Les points de la courbe peuvent se calculer tous les  $1^\circ$  ou  $2^\circ$ .



## 17.7.5 CONSTRUCTION DE LA CONTRE - CAME

Un moyen relativement simple d'éviter le décollement du galet de la surface de la came est d'ajouter à la came fondamentale une contre-came. Les possibilités, démontrées dans les trois figures suivantes, sont :

- came à galet centré avec contre-galet diamétralement opposé,
- came à galet excentré avec contre-galet dans le même axe,
- came à galet excentré placé dans une rainure de guidage.

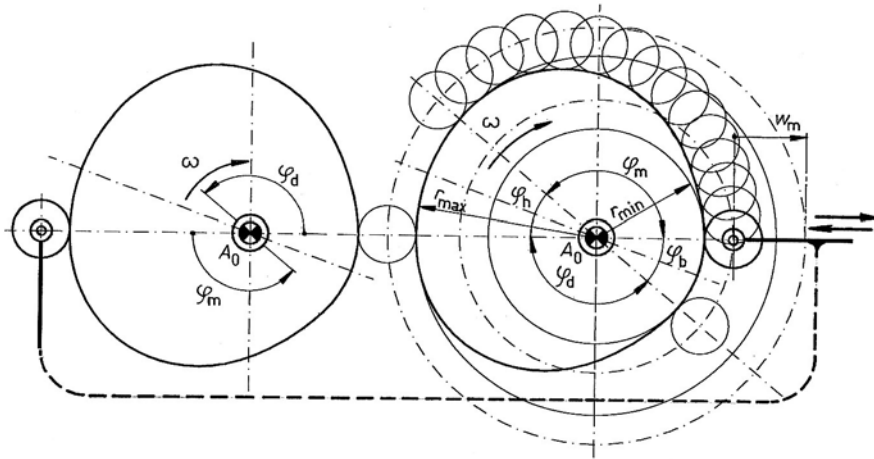


Figure 17.22 Came avec contre-came symétriques à galets centrés

## 1. Caractéristiques des cames extérieures à galets centrés (Exemple : figure 17.22)

- angle de montée :  $\varphi_m = 140^\circ$
- angle en position haute :  $\varphi_h = 40^\circ$
- angle de descente :  $\varphi_d = 140^\circ$
- angle en position basse :  $\varphi_b = 40^\circ$
- loi normée : polynôme du cinquième degré,
- course :  $\frac{2}{3}$  du rayon minimal de la came.

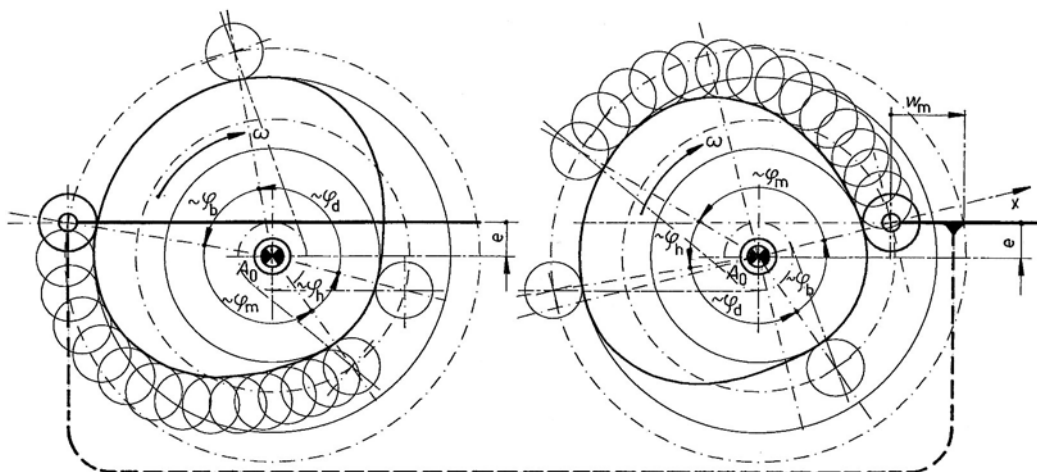


Figure 17.23 Came et contre-came à galets excentrés

## 2. Caractéristiques des cames extérieures à galets excentrés (Exemple : figure 17.23)

La figure 17.23 représente les deux cames à galets excentrés séparément afin de bien voir la forme des deux profils. Les caractéristiques sont :

- angle de montée :  $\varphi_m = 140^\circ$
- angle en position haute :  $\varphi_h = 40^\circ$
- angle de descente :  $\varphi_d = 110^\circ$
- angle en position basse :  $\varphi_b = 70^\circ$
- loi normée : polynôme du cinquième degré,
- course :  $\frac{2}{3}$  du rayon minimal de la came,
- excentricité :  $\frac{1}{3}$  du rayon minimal.

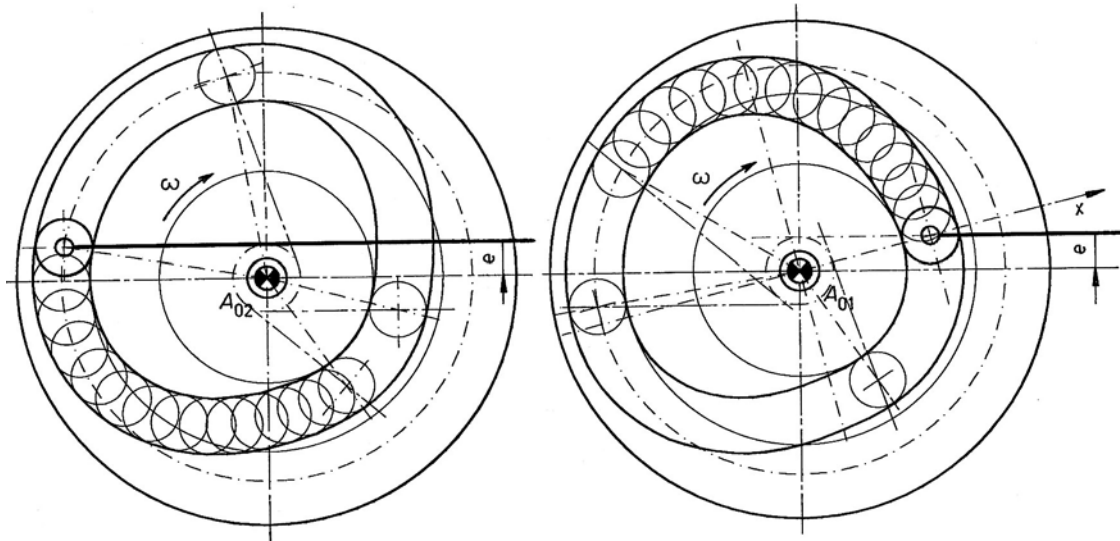


Figure 17.24 Deux cames avec galet placé dans une rainure

## 3. Caractéristiques des cames à galets placés dans une rainure (Exemple : figure 17.24)

- angle de montée :  $\varphi_m = 140^\circ$
- angle en position haute :  $\varphi_h = 40^\circ$
- angle de descente :  $\varphi_d = 110^\circ$
- angle en position basse :  $\varphi_b = 70^\circ$
- loi normée : polynôme du cinquième degré,
- course :  $\frac{2}{3}$  du rayon minimal de la came,
- excentricité :  $\frac{1}{3}$  du rayon minimal.

Les désignations des angles de rotation sont identiques sur les deux cames. Le mouvement de montée correspond au déplacement de la tige vers la droite.

### 17.7.6 EFFORTS DANS LE MÉCANISME

Les efforts dans le mécanisme proviennent essentiellement de la force appliquée à l'extrémité de la tige  $F_{ch}$  due à la charge et de l'effet d'inertie des masses à déplacer  $F_A = m \cdot (-a)$ .

#### 1. Hypothèses initiales

Les hypothèses de calcul sont :

- le mécanisme est constitué par une came à galet équipé d'une tige excentrée,
- le contact entre la came et le galet est assuré par un ressort,
- le coefficient de frottement  $\mu$  entre la tige et les guides est indépendant de la vitesse,

- la charge  $F_{ch}$ , appliquée à l'extrémité de la tige, est exprimée en fonction de l'élongation  $w$ , le sens de cette force est admis dirigé vers le centre de rotation de la came,
- la force produite par le ressort  $F_{res}$ , si elle existe, dépend seulement de sa compression, cette force se définit par l'expression :  $F_{res} = F_{res0} + k \cdot w$ , où  $F_{res0}$  est la force initiale après montage et  $k$  la raideur,
- l'épaisseur de la tige est négligée dans l'équilibre de rotation,
- le frottement sur l'axe du galet est négligeable vis à vis des autres pertes,
- la masse  $m$  de calcul est la réduction sur la tige de toutes les masses accélérées,
- la force d'inertie se définit par le principe de d'Alembert :  $F_A = m \cdot (-a)$ ,
- le sens positif du déplacement de la tige correspond à celui de l'axe  $Oy$ .

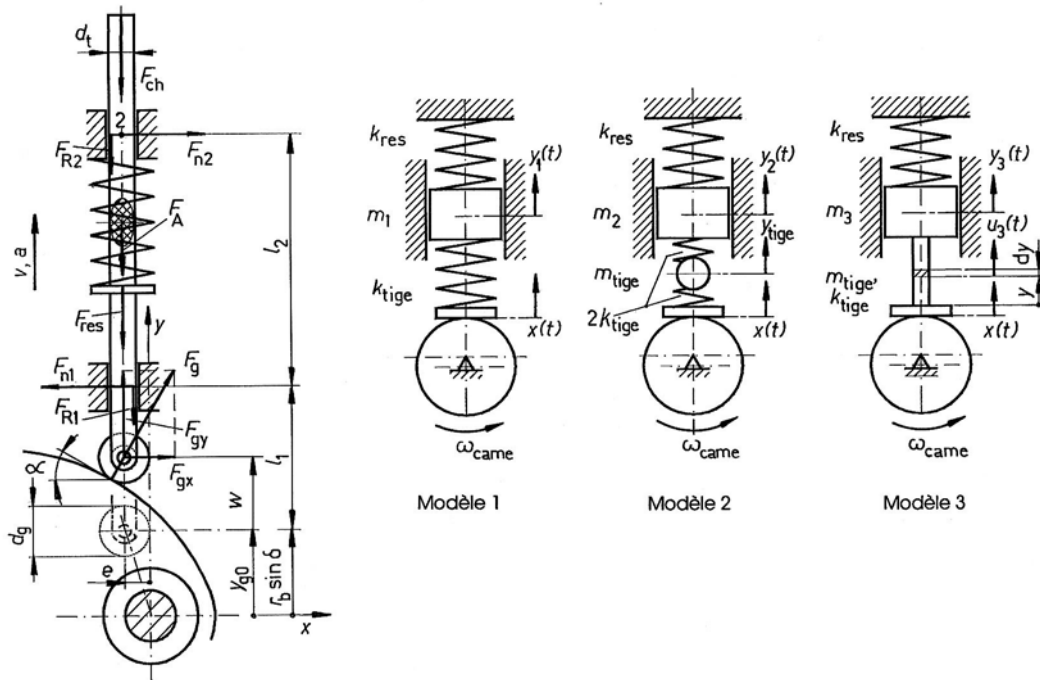


Figure 17.25 Schéma d'équilibre d'un mécanisme à came avec tige excentrée  
Modèles pour le calcul du comportement dynamique d'un mécanisme à came et tige

## 2. Equilibre de la tige

Les conditions d'équilibre du mécanisme sont fonction de l'élongation  $w(\varphi)$ . Le système de référence  $Oxy$  est centré sur l'axe de rotation de la came, la tige étant excentrée de la distance  $e$ . Les relations d'équilibre s'écrivent, voir figure 17.25 :

$$\Sigma F_x = 0 : F_{gx} - F_{n1} + F_{n2} = 0,$$

$$\Sigma F_y = 0 : F_{gy} - F_{R1} - F_{R2} - F_{ch} - F_{res} - F_A = 0,$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0 : -l_2 F_{n1} + (l_2 + l_1 - w) F_{gx} - 0,5 d_t F_{R1} + 0,5 d_t F_{R2} = 0,$$

avec :  $F_{R1} = \mu F_{n1}, \quad F_{R2} = \mu F_{n2},$

$$F_{gy} = F_g \cos \alpha, \quad F_{gx} = F_g \sin \alpha, \quad F_A = m \cdot (-a),$$

En substituant successivement les diverses expressions de l'équilibre et du frottement, les composantes normales des réactions d'appui prennent les valeurs suivantes :

$$F_{n1} = \frac{(l_2 + l_1 - w) \cdot \tan \alpha}{l_2 \mp \mu \cdot \tan \alpha \cdot (l_2 + 2l_1 - 2w)} \cdot (F_{ch} + F_{res} + F_A),$$

$$F_{n2} = \frac{(l_1 - w) \cdot \tan \alpha}{l_2 \mp \mu \cdot \tan \alpha \cdot (l_2 + 2l_1 - 2w)} \cdot (F_{ch} + F_{res} + F_A). \quad (17.9.1)$$

avec :

à la montée : signe - au dénominateur,

à la descente : signe + au dénominateur.

Les forces de frottement s'inversent et les forces normales se modifient en conséquence. Les intensités des composantes normales sur les guidages permettent de contrôler la pression moyenne ou la charge équivalente, donc la durée de vie de ces éléments.

### 3. Force normale sur le galet

En partant de la somme des forces selon les axes  $Ox$  ou  $Oy$  sur les guidages, il est possible de trouver la composante axiale de la force totale sur le galet. Cette dernière force doit rester toujours supérieure à zéro afin d'assurer le contact entre la came et le galet. Ces forces se trouvent par les expressions :

$$\begin{aligned} F_{gx} &= F_{n1} - F_{n2} = F_{gy} \cdot \tan \alpha, \\ F_{gy} &= F_{ch} + F_{res} + F_A \pm \mu \cdot (F_{n1} + F_{n2}), \\ F_g &= (F_{n1} - F_{n2}) / \sin \alpha = (F_{gx}^2 + F_{gy}^2)^{0,5}. \end{aligned} \quad (17.9.2)$$

Le contrôle de la présence de cette force entre la came et le galet s'effectue au moyen de la composante selon l'axe  $Oy$ . La condition à remplir est :

$$F_{gy} = F_{ch} + F_{res} + F_A \pm \mu \cdot (F_{n1} + F_{n2}) > 0, \quad (17.9.3)$$

signe + pour la montée,

signe - pour la descente.

Si cette composante devient négative, les caractéristiques du ressort doivent être modifiées de manière à assurer sûrement un contact entre la came et le galet. La force initiale ou la raideur dans le ressort peut se changer en adoptant des dimensions différentes. Une représentation graphique des diverses forces en fonction de l'angle de rotation facilite grandement l'étude. Un contrôle rapide consiste à rechercher les conditions de descente à accélération négative car très souvent la charge est nulle dans ces parcours.

### 4. Couple sur la came

Le couple à produire sur la came peut aussi se déterminer à partir des conditions de transmission. La force normale totale sur la came est désignée par  $F_g$ , l'angle de pression dans la position occupée par le galet sur la came par  $\alpha$ . Les projections sur le système d'axes  $Ox$   $Oy$  de la distance entre le centre de rotation de la came et le centre du galet sont :

- axe  $Ox$  :  $x_g = e$ ,

- axe  $Oy$  :  $y_g = r_b \cdot \sin \delta + w$ .

Le couple à produire se trouve finalement par :

$$\begin{aligned} M_{came} &= e \cdot F_{gy} + (r_b \cdot \sin \delta + w) \cdot F_{gx}, \\ M_{came} &= [e \cdot \cos \alpha + (r_b \cdot \sin \delta + w) \cdot \sin \alpha] \cdot F_g. \end{aligned} \quad (17.9.4)$$

L'excentricité  $e$  est à introduire avec son signe.

### 5. Pression superficielle

La pression superficielle entre la came et le galet se trouve en appliquant l'une des relations de Hertz. Elle dépend de la force normale sur le galet  $F_g$ , de la largeur de contact  $b$  entre

la came et le galet si le galet est cylindrique, des rayons de courbure de la came et du galet, des modules d'élasticité.

### 5.1 Galet cylindrique :

Pour un contact linéique, elle se trouve par la relation simplifiée :

$$p_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_g \cdot E}{b \cdot r_t}},$$

avec :  $r_t = r_{cc} \cdot r_g / (r_{cc} + r_g)$ , le rayon de la came  $r_{cc}$  s'introduisant avec son signe.

### 5.2 Galet bombé :

Le galet bombé compense les erreurs d'alignements et les déformations variables entre cet élément et la surface active de la came. Pour un contact ponctuel, la pression maximale se trouve par la relation générale :

$$p_H = \frac{3F_g}{2\pi ab},$$

avec :  $a, b$  demi axes de l'ellipse de contact, voir au chapitre 2 les relations générales de Hertz.

### 5.3 Contrôle de la pression :

La pression doit rester admissible en tout point de la came. Cette pression dépend des matériaux de la came et du galet ainsi que des traitements subis par ces deux pièces.

Pression admissible entre came et galet [N/mm<sup>2</sup>]

Matière de la came	Matière du galet	Pression admissible
GG 20	Acier durci	45 à 50
GG allié au nickel	Acier durci	50 à 70
GS 52	Acier durci	45
Acier cémenté trempé	Acier durci	150 à 200
20MnCr5 cémenté trempé	20MnCr5 cémenté trempé	200

### 6. Durée de vie du galet à roulement

Le galet suit la forme extérieure de la came et tourne généralement à vitesse angulaire variable. La vitesse circonférentielle du galet peut se déterminer à partir du contour de la came. L'effort normal étant connu, il est possible de trouver la durée de vie du galet en calculant la charge équivalente au moyen de la relation générale des roulements. La longueur du profil de la came se trouve par :

$$s_{\text{came}} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r_{\text{Pcame}} \cdot d\varphi \approx \sum_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \quad (17.9.5)$$

Le contour de la came est calculé pratiquement en un certain nombre de points discrets. Les différences se recherchent successivement par :

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i,$$

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i.$$

Le nombre de tours du galet par tour de la came est égal à la longueur du profil divisé par la longueur circonférentielle du galet :

$$n_{\text{galet/n came}} = s_{\text{came}} / (\pi \cdot d_g). \quad (17.9.6)$$

### 17.7.7 COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU MÉCANISME

La recherche du comportement d'un mécanisme à came nécessite l'élaboration d'un modèle de substitution. Ce modèle doit rester aussi simple que possible et devrait faire apparaître toutes les fréquences propres. La figure 17.25 à droite montre trois modèles pour le contrôle du comportement dynamique d'un mécanisme à tige excentrée. Le signal d'entrée sur la tige  $x(t)$  se compose du signal fondamental imposé par le profil théorique de la came et d'un signal perturbateur engendré par toutes les erreurs géométriques.

#### 1. Signal fondamental

Le signal d'entrée, imposé par le profil de la came, est constitué soit par l'élongation  $x=x(t)$ , la vitesse  $v=v(t)$  ou l'accélération  $a=a(t)$ . Cette dernière grandeur fait apparaître plus facilement les composantes harmoniques du mouvement adopté au moyen de l'analyse de Fourier. À vitesse angulaire  $\omega_{\text{came}}$  constante, le mouvement d'entrée est périodique, période  $P$ , et peut s'écrire sous la forme générale :

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \cos\left(k \frac{2\pi}{P} \omega_{\text{came}} t\right) + B_k \sin\left(k \frac{2\pi}{P} \omega_{\text{came}} t\right) \right].$$

Le signal d'entrée n'est pas nécessairement continu et peut comporter plusieurs mouvements successifs de montée et de descente séparés par des arrêts.

#### 2. Modèles de calcul

2.1 Modèle 1 : ce modèle se compose du poussoir constitué par le rouleau, de l'élasticité de la tige, des masses à déplacer et de la présence du ressort. La masse  $m_1$  peut se trouver par :

$$m_1 = m + m_{\text{res}}/3 + m_{\text{tige}}/2,$$

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} + (k_{\text{res}} + k_{\text{tige}}) \cdot y_1 = k_{\text{tige}} \cdot x.$$

2.2 Modèle 2 : ce modèle fait intervenir, en complément, la masse de la tige  $m_{\text{tige}}$  :

$$m_2 = m + m_{\text{res}}/3, k_{\text{tige}} = A E / l_{\text{tige}},$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} + (k_{\text{res}} + 2 k_{\text{tige}}) \cdot y_2 = 2 k_{\text{tige}} \cdot y_{\text{tige}},$$

$$m_{\text{tige}} \cdot \frac{d^2 y_{\text{tige}}}{dt^2} + 4 k_{\text{tige}} \cdot y_{\text{tige}} = 2 k_{\text{tige}} \cdot x.$$

2.3 Modèle 3 : la tige est une barre élastique continue avec une masse. Les relations sont :

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - E \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0, \text{ avec : } u_3(0, t) = x,$$

$$m_3 \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} (l, t) + A E \frac{\partial u_3}{\partial y} (l, t) + k_{\text{res}} \cdot u_3(l, t) = 0.$$

2.4 Transformation : au moyen de la transformation de Laplace, il est possible de trouver les fréquences propres et les déplacements.

#### 3. Comportement

Comme seule la partie stationnaire du signal de sortie  $y_k(t)$  intéresse le comportement, il est possible d'écrire :

$$Y_k(s) = G_k(s) \cdot X_k(s) \quad \text{avec} \quad s = j\omega = j k (2\pi/P) \omega_{\text{came}},$$

avec  $G_k(j\omega)$  la fonction de transfert du système. Comme l'amortissement est pratiquement nul, toutes les fonctions de transfert sont réelles. Elles peuvent se trouver à partir des relations ci-dessus pour les modèles proposés et donnent les fréquences propres.

## 17.8 MÉCANISME À CAME À GALET MONTÉ SUR LEVIER

Le mouvement imposé par le contact entre la came et le galet monté sur un levier articulé est un mouvement circulaire oscillatoire. A la limite, si la longueur du bras de levier était très grande par rapport aux dimensions de la came, il serait possible d'admettre un déplacement quasi rectiligne du galet. Les relations du mécanisme à tige excentrée sont à peu près applicables dans cette disposition. Dans le cas général, il n'est pas possible de confondre la trajectoire circulaire avec une trajectoire rectiligne pour le centre du galet. La mise en équation du mouvement du levier fait intervenir le mouvement relatif de cette pièce par rapport à la came et l'inversion du mécanisme.

### 17.8.1 GRANDEURS FONDAMENTALES

Les grandeurs initiales introduites dans l'étude de ce mécanisme à came sont :

- l'entraxe  $a$  entre les deux points fixes de la came et du levier  $A_0, B_0$ ,
- la longueur du levier oscillant  $l = B_0B$ ,
- les positions initiale  $\psi_0$  et finale de montée  $\psi_m$  du levier oscillant  $B_0B$ ,
- les courses angulaires de montée  $\Delta\psi_m$  ou de descente  $\Delta\psi_d$  du centre du galet,
- le rayon minimal  $r_{\min}$  de la came, le rayon maximale de la came  $r_{\max}$ ,
- les angles de rotation  $\varphi_m$  ou  $\varphi_d$  commandant la montée ou la descente,
- le nombre de montées et de descentes partielles pour un tour de la came,
- le diamètre du galet  $d_g = 2 r_g$ ,
- la fréquence de rotation de la came,
- les masses à déplacer et les efforts extérieurs sur le levier.

Les contraintes imposées par le mécanisme sont : la valeur des angles de pression  $\alpha$  et de transmission  $\beta$  pendant la montée et la descente, les dimensions minimale et maximale de la came afin d'assurer une rotation complète entre les points  $A_0$  et  $B_0$ . Les positions recommandées sont :

- différence entre le rayon maximal et le rayon minimal :  $r_{\max} - r_{\min} = (0,5 \text{ à } 0,25) r_{\min}$ ,
- afin d'assurer des angles de pression dans les limites admissibles : la position du levier oscillant en position médiane devrait être telle que le triangle  $A_0BB_0$  soit droit au point  $B$ .

### 17.8.2 MISE EN ÉQUATION

La mise en équation de la trajectoire relative du centre du galet par rapport au profil de la came utilise le principe de l'inversion : la came est supposée fixe, repérée dans un système de coordonnées  $O x y$  centré sur le point  $A_0$ . Dans la mise en équation des grandeurs géométriques, il est admis les déplacements suivants :

- un mouvement de montée, angle de rotation de la came  $\varphi_m$ ,
- un repos en position haute,
- un mouvement de descente, angle de rotation de la came  $\varphi_d$ ,
- un repos en position basse,
- un tour complet de la came pour ces quatre composants.

#### 1. Géométrie et coordonnées du centre du galet

Le point fixe  $B_0$ , centre de rotation du levier oscillant, se déplace dans le sens positif d'angles  $\varphi_i$  successifs définis par rapport à l'axe  $O x$ . La montée du galet correspond à un éloignement de son centre du centre de la came  $A_0$ , la descente à un rapprochement.

Les symboles utilisés dans les diverses relations sont :

- l'entraxe entre les points  $A_0$  et  $B_0$  :  $a = A_0B_0$ ,
- la longueur du levier oscillant :  $l = B_0B$ ,
- l'angle instantané de rotation de la came :  $\varphi$ ,
- l'angle instantané correspondant entre l'axe de référence  $Ox$  et le levier  $B_0B$  :  $\psi$ ,
- les coordonnées du centre du galet :  
abscisse :  $x_g$ ,  
par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$  : ordonnée :  $y_g$ ,
- un système de référence mobile  $Ox_i y_i$ , l'axe  $Ox_i$  passant par le centre de rotation du levier  $B_{0i}$  supposé mobile,
- l'angle initial du levier oscillant par rapport à  $Ox$  :  $\psi_0$ .

La projection du centre du galet  $B$  sur les deux axes de référence  $Ox$  et  $Oy$  se trouve en projetant tout d'abord ce point sur les deux axes  $Ox_i$  et  $Oy_i$ . En tenant compte de l'angle total de rotation du levier oscillant, il est possible d'écrire :

$$\text{angle total} = \varphi + \psi. \quad (17.10.1)$$

Si l'axe  $Ox$  passe par le point fixe  $B_0$  en position initiale, ce qui simplifie fortement la mise en équation, les projections du point  $B$  s'expriment par :

$$\begin{aligned} x_g &= a \cdot \cos\varphi + l \cdot \cos(\varphi + \psi), \\ y_g &= a \cdot \sin\varphi + l \cdot \sin(\varphi + \psi). \end{aligned} \quad (17.10.2)$$

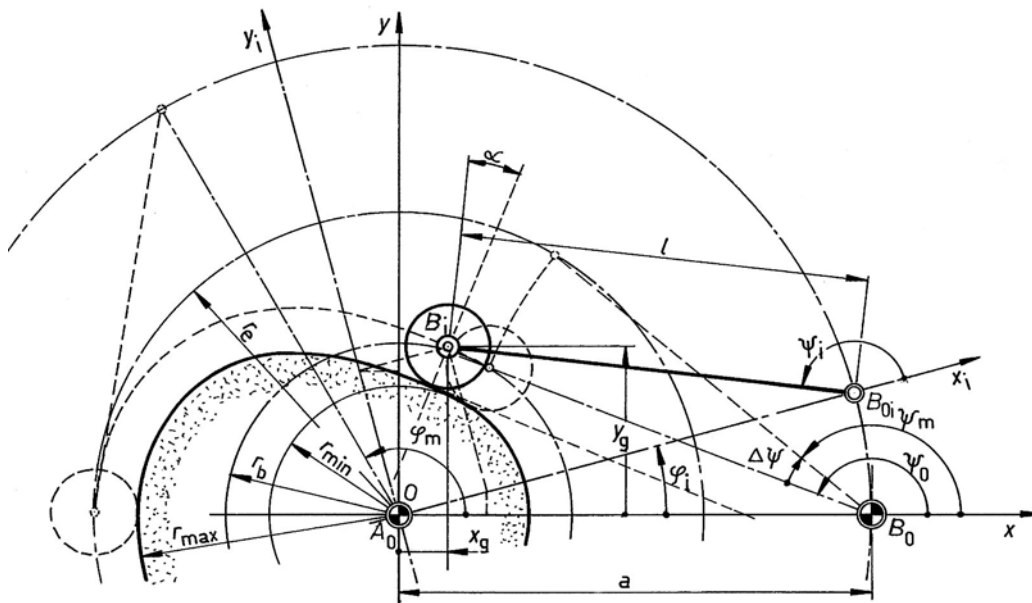


Figure 17.26 Grandeurs géométriques dans un mécanisme à came avec galet monté sur levier oscillant

Dans ces deux expressions, les coordonnées du centre du galet sont des fonctions des angles  $\varphi$  et  $\psi$ . L'angle  $\psi$  du levier oscillant  $B_0B$ , imposé par la loi normée et la course angulaire adoptées, peut se donner par la somme :

$$\psi = \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z). \quad (17.10.3)$$

Remarquons le sens de  $\Delta\psi$  dans la mise en équation : dans le mouvement de montée  $\Delta\psi_m$  est négatif, dans celui de descente  $\Delta\psi_d$  est positif. La fonction de transmission normée est choisie dans la collection polynomiale ou trigonométrique proposée précédemment.

En introduisant la relation de l'angle  $\psi$  par rapport à l'angle  $\varphi$ , il est possible de donner les coordonnées du centre du galet sous la forme générale :



$$\begin{aligned}x_g &= a \cdot \cos\varphi + l \cdot \cos[\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)], \\y_g &= a \cdot \sin\varphi + l \cdot \sin(\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)).\end{aligned}\quad (17.10.4)$$

## 2. Dérivées des coordonnées par rapport à l'angle $\varphi$

Calculons les dérivées premières et secondes des coordonnées du centre du galet par rapport à l'angle  $\varphi$  :

### 1. Dérivées premières

$$\begin{aligned}\text{Axe } O x : \quad x'_g &= \frac{dx_g}{d\varphi} = -a \cdot \sin\varphi - l \cdot \sin(\varphi + \psi) \cdot \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi}\right), \\ \text{Axe } O y : \quad y'_g &= \frac{dy_g}{d\varphi} = a \cdot \cos\varphi + l \cdot \cos(\varphi + \psi) \cdot \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi}\right).\end{aligned}\quad (17.10.5)$$

### 2. Dérivées secondes

$$\begin{aligned}\text{Axe } O x : \quad x''_g &= \frac{d^2x_g}{d\varphi^2} = -a \cdot \cos\varphi - l \cdot \cos(\varphi + \psi) \cdot \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 - l \cdot \sin(\varphi + \psi) \cdot \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}, \\ \text{Axe } O y : \quad y''_g &= \frac{d^2y_g}{d\varphi^2} = -a \cdot \sin\varphi - l \cdot \sin(\varphi + \psi) \cdot \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 + l \cdot \cos(\varphi + \psi) \cdot \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}.\end{aligned}\quad (17.10.6)$$

Comme l'angle  $\psi$  est une fonction de l'angle  $\varphi$ , les dérivées première et seconde de cet angle apparaissant dans ces relations sont trouvées par les expressions générales. Sur la figure 17.26, la variation de l'angle  $\psi$  est négative dans le mouvement de montée car le levier oscillant se déplace dans le sens horaire en s'éloignant du point  $A_0$ . Il faudra tenir compte de cette particularité dans l'introduction des grandeurs géométriques et cinématiques initiales.

## 17.8.3 ANGLE DE PRESSION ET RAYON DE COURBURE

### 1. Angle de pression

La pente de la tangente à la trajectoire relative du centre du galet dans la position étudiée se trouve par l'expression habituelle :

$$y'_{(x)} = \tan \gamma = \frac{y'_g}{x'_g}. \quad (17.11.1)$$

L'angle de pression  $\alpha$ , défini entre la normale à la trajectoire du point  $B$  ou du profil et la tangente à l'arc de cercle décrit par le point  $B$  par rapport au point fixe  $B_0$ , peut se calculer par l'expression :

$$\alpha = \varphi + \psi - \arctan \frac{y'_g}{x'_g}. \quad (17.11.2)$$

Cet angle doit être compris dans les limites proposées précédemment pour les autres cames.

### 2. Rayon de courbure

Le rayon de courbure de la came, au point de contact avec le galet, se trouve à partir des dérivées premières et secondes par la relation démontrée en mathématiques :

$$\text{Came extérieure :} \quad r_{\text{P came}} = \frac{(x_g'^2 + y_g'^2)^{3/2}}{x_g' y_g'' - y_g' x_g''} - r_g. \quad (17.11.3)$$

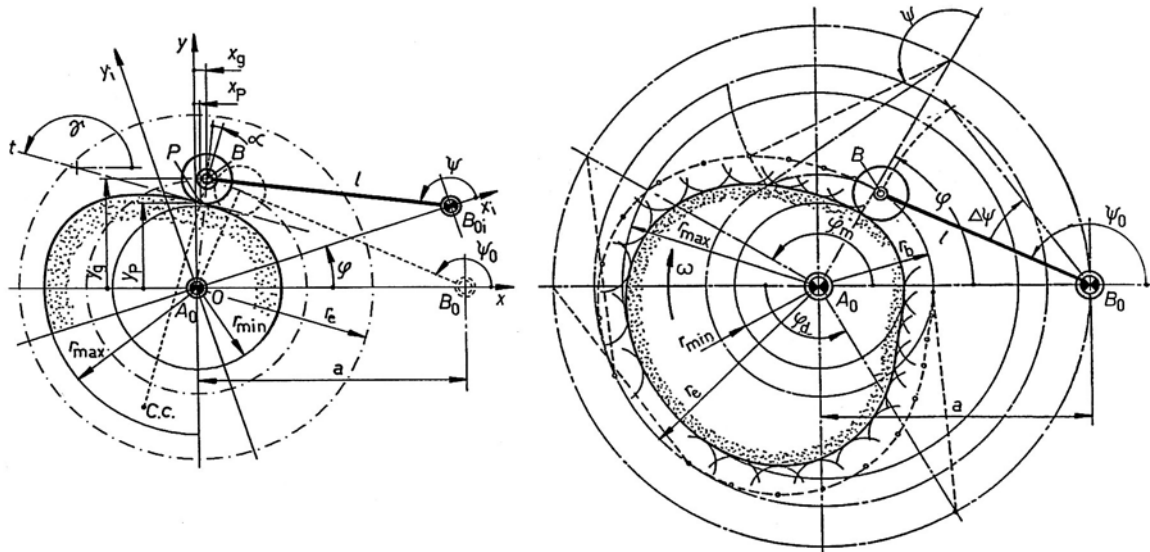


Figure 17.27 Grandeurs géométriques dans une position de l'inversion du mécanisme  
Tracé graphique d'une came avec galet monté sur un levier oscillant

#### 17.8.4 TRACÉ DE LA CAME ET DE LA CONTRE - CAME

##### 1. Tracé graphique de la came

A partir des grandeurs initiales et des relations générales trouvées, le tracé de la came se construit après le dessin de la trajectoire relative du centre du galet. Le point d'articulation  $B_0$  du levier sera déplacé sur une circonférence de rayon égal à l'entraxe  $a$ . Il est recommandé d'adopter un intervalle angulaire suffisant comme  $\Delta\varphi = 5$  ou  $10^\circ$  selon la valeur des angles de montée et de descente. En portant les diverses positions du point  $B_0$  le long de l'arc de montée et l'arc de descente, il sera possible de trouver la trajectoire relative du point  $B$ . À partir des ces points, tracer des arcs de cercle de rayon  $r_g$ . La forme de la came est la courbe enveloppe de la trajectoire relative, distante du rayon du galet  $r_g$ .

##### 2. Construction analytique de la came

La construction analytique du profil de la came se sert de la position du centre du galet  $B$  et des relations développées précédemment. Les coordonnées du point de contact  $P$  entre le galet et le profil de la came extérieure sont :

$$\begin{aligned} x_p &= a \cdot \cos\varphi + l \cdot \cos(\varphi + \psi) + r_g \cdot \cos(\gamma + \pi/2), \\ y_p &= a \cdot \sin\varphi + l \cdot \sin(\varphi + \psi) + r_g \cdot \sin(\gamma + \pi/2). \end{aligned} \quad (17.11.4)$$

avec :  $\gamma = \arctan[y'_g(x)] = \arctan(y'_g/x'_g)$ , relation (17.11.1).

Les points de la courbe peuvent se calculer tous les  $1^\circ$  ou  $2^\circ$  selon la précision désirée. Ces deux relations donnent la position initiale et finale du point  $P$  dans le mouvement de montée. Par exemple, pour  $\varphi = 0$ , soit en position initiale, les relations se simplifient en :

$$\begin{aligned} x_{p0} &= a + l \cdot \cos\psi_0 + r_g \cdot \cos(\gamma_0 + \pi/2), \\ y_{p0} &= l \cdot \sin\psi_0 + r_g \cdot \sin(\gamma_0 + \pi/2). \end{aligned}$$

Ces deux coordonnées permettent de trouver le rayon vecteur issu du point  $A_0$  et aboutissant au point de contact  $P_0$ . Le rayon initial vaut ainsi  $|r_{p0}| = (x_{p0}^2 + y_{p0}^2)^{0,5}$ . Il est également possible de trouver les coordonnées en position finale après la montée du galet. Le rayon final

se trouve par une relation semblable. Ainsi le rayon minimal et le rayon maximal peuvent se calculer par des relations simples.

### 3. Tracé de la contre-came

Pour éviter le décollement du galet du profil de la came, il est aussi possible de prévoir soit un ressort de pression, soit une contre-came. Le levier, avec son galet de la contre-came, est en principe solidaire du levier principal. La compensation du jeu inévitable et des erreurs de fabrication se réalise très souvent au moyen d'un levier mobile par rapport au levier principal et d'un système presseur à ressort. Les leviers et les galets montés aux points  $B$  et  $B_2$  peuvent avoir les mêmes dimensions ou des dimensions différentes. La construction de la contre-came se sert également des lois normées dites de montée et de descente, ces mouvements étant inversés sur ce profil.

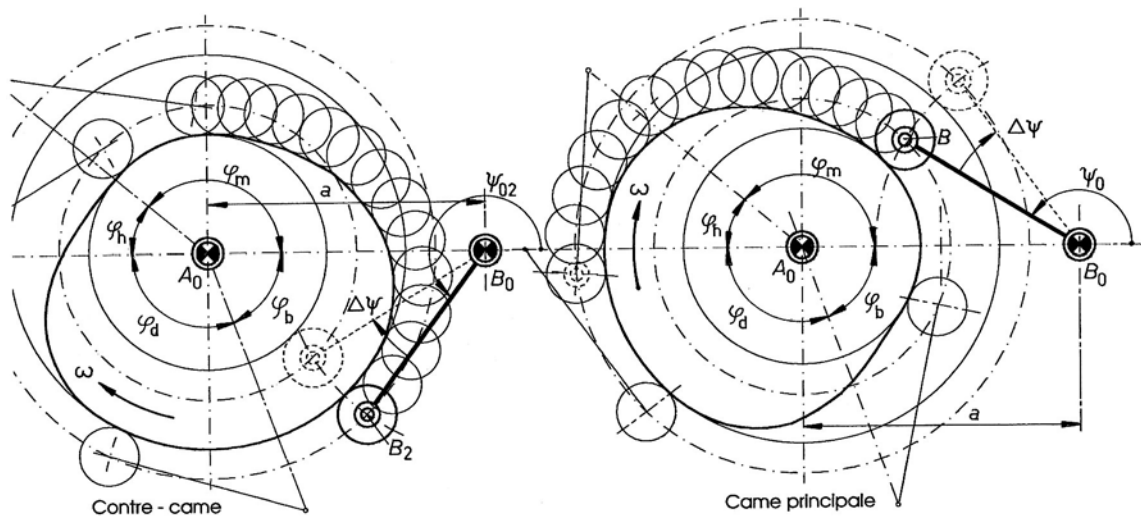


Figure 17.28 Came principale avec contre-came et leviers à galets

La figure 17.28 montre le principe de la conception de la came principale et de la contre-came. Ces deux pièces sont représentées disjointes. Les points  $A_0$  des deux cames sont placés sur le même axe de rotation. Les deux leviers et galets ont mêmes dimensions. Les caractéristiques introduites dans ce mécanisme sont :

- angle de montée :  $\varphi_m = 140^\circ$ ,
- angle en position haute :  $\varphi_h = 40^\circ$ ,
- angle de descente :  $\varphi_d = 110^\circ$ ,
- angle en position basse :  $\varphi_b = 70^\circ$ ,
- loi normée : polynomiale du cinquième degré,
- course angulaire :  $\Delta\psi = 22,5^\circ$ ,
- position, longueur du levier : en position médiane du levier, le levier est un des côtés de l'angle droit du triangle de base  $a$ .

## 17.8.5 EFFORTS DANS LE MÉCANISME À LEVIER

Les diverses forces et couples proviennent du contact entre le profil de la came et le galet monté sur le culbuteur et de l'inertie des masses à déplacer.

### 1. Hypothèses initiales

Les hypothèses introduites dans la recherche de l'équilibre dynamique sont :

- le mécanisme se compose d'une came et d'un culbuteur équipé d'un galet,

- le contact entre le profil de la came et le galet est assuré par un ressort,
- les pertes par frottement dans le galet et dans l'articulation du culbuteur sont négligeables,
- la charge  $F_{ch}$  appliquée sur le culbuteur est exprimée en fonction de la rotation  $\psi$ ,
- le sens de cette force est tel que le moment de cette force par rapport au point  $B_0$  s'oppose au mouvement de montée du galet,
- le moment produit par le ressort  $M_{res}$ , s'il existe, dépend seulement de la rotation du culbuteur :  $M_{res} = M_{res0} + k \cdot \psi$ ,
- l'effet de masse, introduit dans le calcul, est le moment d'inertie de masse réduit  $J_{B0}$  de toutes les masses intervenant dans le mécanisme à partir du culbuteur,
- le couple d'inertie se définit par le principe de d'Alembert :  $M_A = J_{B0} \cdot (-\alpha_B)$ ,
- le sens positif de la rotation se définit par le mouvement dit de "montée" du galet.

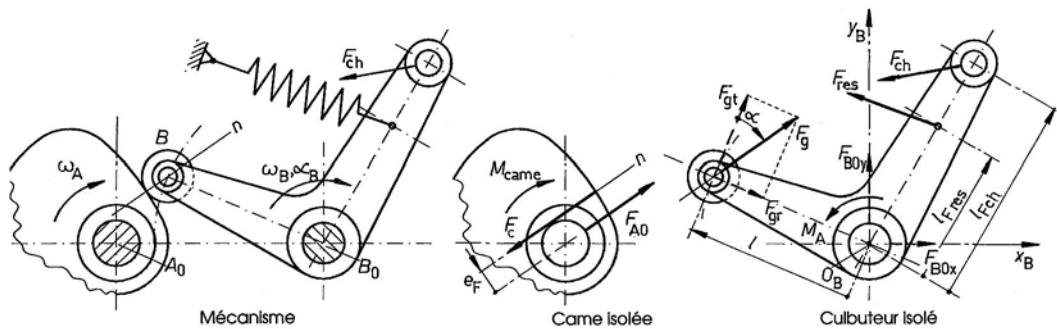


Figure 17.29 Mécanisme à came et culbuteur : équilibre de la came et du culbuteur

## 2. Equilibre de la came et du culbuteur

Les conditions d'équilibre du mécanisme sont fonction de l'angle de rotation de la came et du culbuteur  $\psi(\varphi)$ .

### 2.1 Equilibre de la came

En négligeant l'effet centrifuge sur l'axe de rotation, la came est sollicitée seulement par la force normale  $F_c$  dirigée vers le centre de courbure, par la réaction d'appui  $F_{A0}$  et par le couple  $M_{came}$ . Les équilibres sont :

- équilibre de translation :  $\vec{F}_c + \vec{F}_{A0} = 0$ ,
- équilibre de rotation :  $|\vec{M}_{came}| = e_F \cdot F_c$ .

### 2.2 Equilibre du levier culbuteur

Le système de référence  $O_B x_B y_B$  passe par le point  $B_0$ . Le culbuteur est sollicité par la force normale sur le galet  $\vec{F}_g$ , la réaction d'appui  $\vec{F}_{B0}$ , la force du ressort  $\vec{F}_{res}$ , la charge  $\vec{F}_{ch}$  et par le couple provoqué par l'inertie des masses en rotation  $M_A$ . Toutes ces forces se laissent projeter sur le système d'axes rectangulaires  $O_B x_B$  et  $O_B y_B$ . Les équilibres sont :

- équilibre selon l'axe  $O_B x_B$  :  $\Sigma F_x = 0 : F_{gx} + F_{B0x} + F_{resx} + F_{chx} = 0$ ,
- équilibre selon l'axe  $O_B y_B$  :  $\Sigma F_y = 0 : F_{gy} + F_{B0y} + F_{resy} + F_{chy} = 0$ ,
- équilibre de rotation point  $B_0$  :  $\Sigma M_{B0} = 0 : M_{Fg} + M_{Fres} + M_{Fch} + M_A = 0$ .

Cette dernière relation permet de trouver la force normale  $F_c = F_g$  entre le profil de la came et le galet en tous points. En effet, dans la représentation de la fig. 17.29, la force  $F_g$  est la force motrice sur le levier et produit le moment  $M_{Fg} = l F_{gt}$ . Dans l'écriture des relations, les projections sur les axes de toutes les forces et les moments doivent s'écrire avec leur signe.

### 3. Pression entre le galet et le profil de la came

Le texte donné précédemment pour la pression, point 5, est aussi applicable dans le mécanisme à culbuteur. La force normale sur le galet est  $\vec{F}_g$  et le rayon de courbure du profil peut se trouver en tous points par la relation générale. Sur la came, la force  $\vec{F}_g$  doit être dirigée vers l'intérieur du profil de la came afin de maintenir le contact avec le galet. Si le galet est cylindrique, il faut utiliser la relation correcte pour la pression, si le galet est bombé, la relation générale de Hertz. Les pressions admissibles sont aussi les mêmes.

### 4. Durée de vie du galet à roulement

Le galet suit le profil extérieur de la came et tourne généralement à vitesse angulaire variable. Le mouvement de va et vient du levier peut être négligé dans la plupart des cas car la course angulaire est modeste. La longueur du profil de la came se trouve par la somme des segments partiels, la fréquence de rotation du roulement par la relation précédente.

### 5. Comportement dynamique du mécanisme

La recherche du comportement dynamique du mécanisme à came et levier est semblable à celle du mécanisme à tige. Les modèles proposés pour des mouvements de translation rectiligne sont à remplacer par des modèles pour mouvements en rotation.

## 17.9 CAME EN CONTACT AVEC UN POUSSOIR

Les mécanismes à cames en contact d'un poussoir sont de deux genres : poussoir monté à l'extrémité d'une tige en mouvement rectiligne ou poussoir fixé à l'extrémité libre d'un levier en mouvement oscillatoire circulaire.

### 17.9.1 POUSSOIR MONTÉ SUR UNE TIGE COULISSANTE

Le poussoir de la tige est constitué par un appui plan, très souvent perpendiculaire à l'axe de la tige. Dans la mise en équation de ce mécanisme, la direction du poussoir est oblique de l'angle  $\alpha$  par rapport à l'axe de la tige. Dans ce mécanisme, l'angle de pression  $\alpha$  et l'angle de transmission  $\beta$  sont constants. Ils dépendent seulement de l'inclinaison de l'appui par rapport à l'axe de la tige. Le glissement de l'appui sur le profil de la came s'effectue avec frottement d'où pertes et échauffements supplémentaires.

#### 1. Grandeurs fondamentales

Les grandeurs géométriques initiales introduites dans cette étude sont :

- la course de montée  $w_m$  ou de descente  $w_d$  de la tige,
- les angles de rotation  $\varphi_m$  ou  $\varphi_d$  commandant la montée ou la descente,
- le rayon minimal de la came  $r_{\min}$ , le rayon maximal de la came  $r_{\max}$ ,
- la position de l'axe du poussoir par rapport au centre de la came,
- le nombre de montées et de descentes partielles pour un tour de la came,
- la fréquence de rotation de la came,
- les masses à déplacer et les efforts extérieurs.

Les dimensions géométriques à adopter pour ce genre de came doivent permettre d'éviter tout rayon de courbure négatif sur le profil de la came. Les proportions recommandées pour les cames à galet sont aussi valables pour les cames à poussoir plan.

#### 2. Mise en équation

La mise en équation de la forme de la came, en fonction de la loi adoptée pour le mouvement de la tige à poussoir, utilise le principe de l'inversion du mécanisme. La came est suppo-

sée fixe, repérée par un système de coordonnées  $O x y$ , l'axe du poussoir se déplaçant dans le sens positif autour du point fixe  $A_0$  confondu avec l'origine  $O$ . Les angles de rotation de la tige sont comptés positivement dans le sens mathématique usuel.

En position initiale, le poussoir plan est positionné tangent à la came, le point de tangence  $B$  se situant sur l'axe  $O x$  à l'abscisse  $r_b = r_{\min}$ . Lorsque la came tourne, le point de contact entre le poussoir et la came  $A$  ne se trouve pas nécessairement au point initial  $B$ . L'angle de pression  $\alpha$ , en position initiale, est l'angle compris entre l'axe  $O x$  et l'axe de la tige coulissante car la direction du poussoir est parallèle à l'axe  $O y$  en position de départ.

L'excentricité de l'axe de la tige coulissante par rapport au point  $O$  est donnée par :

$$e = r_b \sin \alpha. \quad (17.12.1)$$

Dans la mise en équation des grandeurs géométriques et cinématiques, il est admis les déplacements suivants :

- un mouvement de montée sur un angle de rotation  $\varphi_m$ ,
- un repos en position haute,
- un mouvement de descente sur angle de rotation  $\varphi_d$ ,
- un repos en position basse,
- un tour complet de la came pour les quatre mouvements composants.

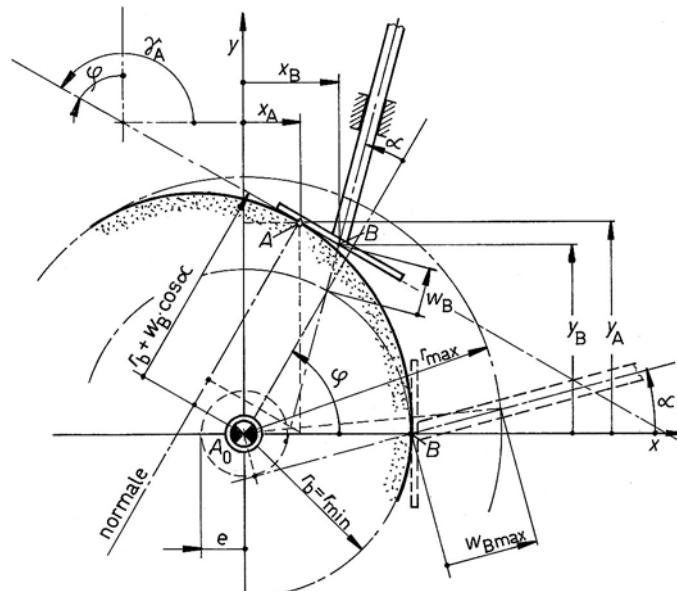


Figure 17.30 Grandeurs géométriques dans un mécanisme à came avec poussoir plan  
Mise en équation des points  $B$  et  $A$

### 3. Position du point $B$

Les coordonnées du point  $B$  peuvent se trouver à partir du rayon de base  $r_b$ , de la course de la tige  $w_B$  et de l'angle de rotation  $\varphi$  par les deux relations, voir la figure 17.30 :

$$\begin{aligned} x_B &= r_b \cos \varphi + w_B \cos(\varphi + \alpha), \\ y_B &= r_b \sin \varphi + w_B \sin(\varphi + \alpha). \end{aligned} \quad (17.12.2)$$

### 4. Position du point de contact $A$

Lorsque la came a tourné d'un angle  $\varphi$ , la course de la tige coulissante est  $w_B$  et le point de contact entre la came et le poussoir est situé en  $A$ . Comme l'angle de pression  $\alpha$  est constant, la tangente à la came peut s'exprimer par l'angle  $\gamma_A$  :

$$\tan \gamma_A = \frac{dy_A}{dx_A} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (17.12.3)$$

Les coordonnées du point  $A$  étant  $x_A$  et  $y_A$ , les projections de ces coordonnées sur la direction actuelle du rayon de base  $r_b$  ou sur la normale permettent d'écrire :

$$x_A \cos \varphi + y_A \sin \varphi = r_b + w_B \cos \alpha$$

En calculant la dérivée de cette expression et en effectuant les substitutions correspondantes, les coordonnées du point  $A$  du poussoir en contact avec le profil de la came peuvent se donner par :

$$\begin{aligned} x_A &= (r_b + w_B \cos \alpha) \cos \varphi - w'_B \cos \alpha \sin \varphi, \\ y_A &= (r_b + w_B \cos \alpha) \sin \varphi + w'_B \cos \alpha \cos \varphi. \end{aligned} \quad (17.12.4)$$

Dans ces deux expressions, la grandeur  $w'_B$  peut se calculer à partir de la course du poussoir, de l'angle total de rotation pour la montée  $\varphi_m$  ou la descente  $\varphi_d$  et de la fonction normée  $f(z) = f(\varphi/\varphi_m)$  par :

$$\begin{aligned} - \text{à la montée :} \quad w'_B &= \frac{w_{Bm}}{\varphi_m} \cdot f'\left(\frac{\varphi}{\varphi_m}\right), \\ - \text{à la descente :} \quad w'_B &= -\frac{w_{Bd}}{\varphi_d} \cdot f'\left(\frac{\varphi}{\varphi_d}\right). \end{aligned} \quad (17.12.5)$$

#### 5. Dérivées par rapport à l'angle $\varphi$

Les dérivées premières et secondes des coordonnées des points  $A$  et  $B$  peuvent se trouver par les expressions générales suivantes :

Point  $A$

$$\begin{aligned} - \text{dérivées premières :} \quad x'_A &= \frac{dx_A}{d\varphi}, & y'_A &= \frac{dy_A}{d\varphi}, \\ - \text{dérivées secondes :} \quad x''_A &= \frac{d^2 x_A}{d\varphi^2}, & y''_A &= \frac{d^2 y_A}{d\varphi^2}. \end{aligned} \quad (17.13.1)$$

Point  $B$

$$\begin{aligned} - \text{dérivées premières :} \quad x'_B &= \frac{dx_B}{d\varphi}, & y'_B &= \frac{dy_B}{d\varphi}, \\ - \text{dérivées secondes :} \quad x''_B &= \frac{d^2 x_B}{d\varphi^2}, & y''_B &= \frac{d^2 y_B}{d\varphi^2}. \end{aligned} \quad (17.13.2)$$

#### 6. Rayon de courbure

Le rayon de courbure de la came, au point de contact  $A$  avec le poussoir plan, se trouve à partir des dérivées premières et secondes par :

$$r_{A \text{ came}} = \frac{(x_A'^2 + y_A'^2)^{3/2}}{x_A' \cdot y_A'' - y_A' \cdot x_A''}. \quad (17.13.3)$$

Comme les coordonnées du point  $A$  dépendent de la dérivée de la course par rapport à l'angle de rotation  $\varphi$ , le rayon de courbure dépend également des diverses dérivées de ces grandeurs par rapport à  $\varphi$ .

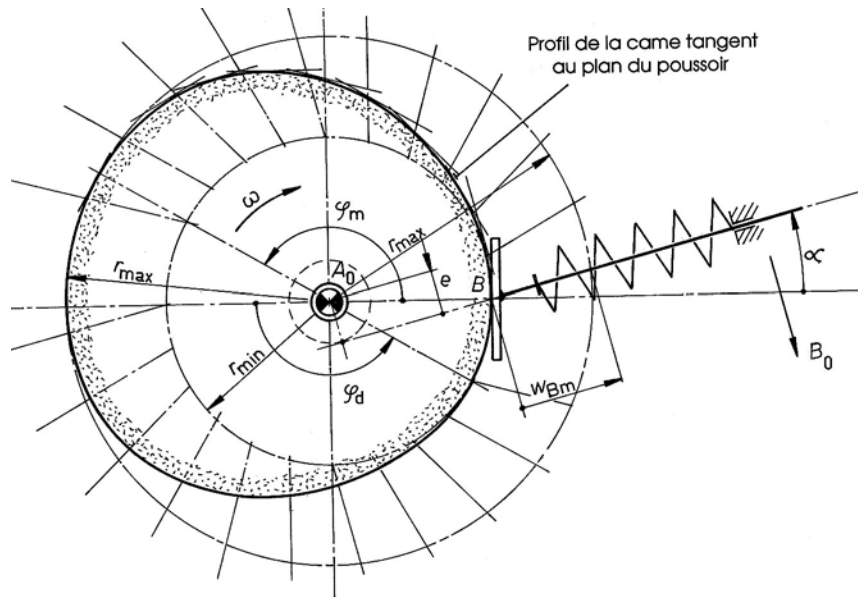


Figure 17.31 Construction graphique du profil d'une came avec poussoir monté sur tige coulissante

### 7. Tracé de la came

À partir des grandeurs initiales, fixées par les contraintes cinématiques imposées par les divers mouvements composants et des relations générales proposées pour la définition de la géométrie de la came, le tracé du profil peut s'effectuer par voie graphique ou par voie analytique.

#### 7.1 Tracé graphique

Le tracé graphique consiste à construire tout d'abord deux cercles centrés sur le point  $A_0$  : le cercle de rayon minimal  $r_{\min} = r_b$ , l'inclinaison  $\alpha$  de la tige en position initiale, l'excentricité correspondante  $e$ , le rayon maximal  $r_{\max}$  compte tenu de la course maximale définie pour la montée  $w_{B\max}$  :

$$r_{\max} = \sqrt{e^2 + (r_b \cdot \cos \alpha + w_{B\max})^2}. \quad (17.13.4)$$

La rotation de la came et le déplacement de la tige seront simulés par l'inversion du mécanisme. Dans ce but, adopter 8 à 16 points pour chaque mouvement composant et déplacer la tige autour de la came en positionnant la course. Le profil de la came sera la courbe enveloppe des positions successives plan tangent au poussoir à la montée et à la descente.

#### 7.2 Tracé analytique

Pour un tracé précis de la came, calculer la course de la tige coulissante en fonction de l'angle de rotation  $\varphi$  de la came. Calculer ensuite les coordonnées  $x_A$  et  $y_A$  du point  $A$  et tracer la courbe reliant tous les points.

Le contrôle de la valeur du rayon de courbure de la came en fonction de l'angle de rotation  $\varphi$  permet de déceler une ou plusieurs interférences, donc des rayons négatifs. Si c'est le cas, il faut augmenter le rayon minimal de la came et contrôler de nouveau tous les rayons de courbure du profil. Un tracé de la came et de l'appui plan permet de déceler les irrégularités éventuelles. Le plan du poussoir ne doit en aucun cas interférer avec le profil curviligne de la came.



## 17.10 CAME AVEC POUSSOIR SUR LEVIER

Le mouvement imposé par le contact entre la came et le poussoir plan, appartenant à un levier oscillant articulé sur un point fixe, est un mouvement circulaire oscillatoire. Dans le cas général, il est nécessaire de fixer le mouvement du levier autour de son point d'attache  $B_0$  et la forme de la came générée par les points  $A$  et  $B$  situés d'une part sur le profil de la came, d'autre part sur le profil rectiligne du levier.

### 17.10.1 GRANDEURS FONDAMENTALES

Les grandeurs initiales introduites dans l'étude du mécanisme et came et poussoir sur le levier sont principalement :

- l'entraxe  $a = A_0B_0$  entre les deux points fixes de la came et du levier,
- l'excentricité  $e$  du profil rectiligne du levier,
- la longueur  $l$  variable du levier oscillant,
- la position initiale du levier  $\psi_0$  définie par la perpendiculaire au profil du levier,
- la position finale du levier  $\psi_m$  pour une montée du levier oscillant,
- le rayon minimal  $r_{\min}$  de la came, le rayon maximal  $r_{\max}$  de la came,
- le nombre de montées et le nombre de descentes pour un tour complet de la came,
- la fréquence de rotation de la came,
- les efforts extérieurs connus ou à rechercher,
- les masses à déplacer en rotation et en translation,
- les conditions de frottement entre le levier et la came.

Les proportions recommandées pour les cames avec levier à galet sont aussi applicables aux cames avec poussoir sur levier.

### 17.10.2 MISE EN ÉQUATION

La mise en équation du profil de la came utilise le principe de l'inversion du mécanisme. La came est supposée fixe, repérée dans un système de coordonnées  $Oxy$  centré sur le point fixe  $A_0$ . Dans la mise en équation des grandeurs géométriques et cinématiques, il est admis les déplacements suivants :

- un mouvement de montée, angle de rotation de la came  $\varphi_m$ ,
- un repos en position haute,
- un mouvement de descente, angle de rotation de la came  $\varphi_d$ ,
- un repos en position basse,
- un tour complet de la came pour ces quatre composantes.

#### 1. Dimensions extrêmes de la came

La distance entre le point de rotation  $A_0$  et le point de contact  $A$  sur le profil de la came et le point  $B$  sur le levier varie entre le rayon minimal  $r_{\min}$  et le rayon maximal  $r_{\max}$ , différence  $\Delta r = r_{\max} - r_{\min}$ . En position dite basse, le contact entre le profil curviligne de la came et le profil rectiligne du levier génère le rayon minimal. En position dite haute, ce contact positionne le rayon maximal. Ces deux dimensions peuvent se trouver par les relations suivantes :

$$\text{- rayon minimal de la came : } r_{\min} = r_b + e = a \cdot \cos \psi_0 + e, \quad (17.14.1)$$

$$\text{- rayon maximal de la came : } r_{\max} = a \cdot \cos \psi_m + e, \quad (17.14.2)$$

avec  $r_b = a \cdot \cos \psi_0$  rayon de base de la came.

La longueur du bras de levier et les angles imposant les positions initiale et finale du levier se trouvent par les relations :

$$l_0 = a \cdot \sin \psi_0, \quad \cos \psi_0 = \frac{r_b}{a} = \frac{r_{\min} - e}{a}, \quad (17.14.3)$$

et : 
$$l_m = a \cdot \sin \psi_m, \quad \cos \psi_m = \frac{r_b + \Delta r}{a} = \frac{r_{\max} - e}{a}. \quad (17.14.4)$$

La différence des deux angles représente l'angle de montée :  $\Delta\psi_m = \psi_m - \psi_0$ .

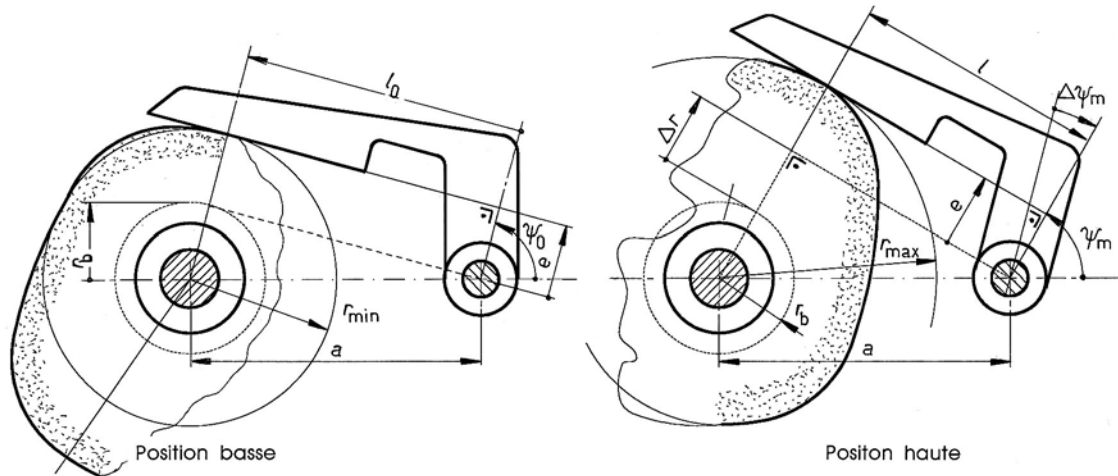


Figure 17.32 Positions du contact aux rayons minimal et maximal

## 2. Mouvements composants

La mise en équation du profil de la came, en fonction des diverses lois adoptées pour le mouvement oscillatoire du levier, s'effectue en donnant les coordonnées des points  $A$  sur le profil de la came et  $B$  sur le segment rectiligne du levier. En position initiale de l'étude, le point d'articulation  $B_0$  du levier est placé sur l'axe  $Ox$  du système de référence. Lorsque la came réelle tourne de l'angle  $\varphi$ , le point de contact  $B$  sur le levier se déplace le long du profil rectiligne du levier. Son mouvement relatif est rectiligne oscillatoire. L'angle de pression  $\alpha$  ou l'angle de transmission  $\beta$  sont définis par rapport à la droite  $B_0B$  et la normale au profil curviligne de la came toujours perpendiculaire au profil du levier. Ces deux angles varient avec la position du point  $B$ .

### 17.10.3 PROFIL DE LA CAME

Dans ce type de mécanisme, les points  $A$  sur la came et  $B$  sur le levier sont à chaque instant confondus. La mise en équation du contour de la came s'effectue en projetant les points  $A$  ou  $B$  sur le système de coordonnées. Les projections de ces deux points sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  expriment le profil de la came.

#### 1. Coordonnées du point $B$

À partir des grandeurs données sur la figure 17.33 et après rotation  $\varphi$  de la came dans le mouvement de montée, l'abscisse et l'ordonnée du point  $B$  se trouvent par :

$$x_B = a \cdot \cos \varphi + e \cdot \cos(\varphi + \psi) + l \cdot \cos(\varphi + \psi + \pi/2), \quad (17.15.1)$$

$$y_B = a \cdot \sin \varphi + e \cdot \sin(\varphi + \psi) + l \cdot \sin(\varphi + \psi + \pi/2). \quad (17.15.2)$$

Les coordonnées du point de contact  $B$  sont des fonctions des angles de rotation  $\varphi$  et  $\psi$ , de la longueur instantanée  $l$  du levier. L'angle  $\psi$  du levier oscillant  $B_0B$  se définit entre l'axe  $Ox_i$  et

le vecteur représentant son excentricité  $e$  perpendiculaire à  $l$ . Cet angle est imposé par le choix de la loi normée  $f(z)$  et la course angulaire  $\Delta\varphi$  adoptées dans le mouvement composant. Il peut s'exprimer par la relation générale :

$$\psi = \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z) = \psi(\varphi). \quad (17.15.3)$$

Dans le mouvement de montée,  $\Delta\psi = \Delta\psi_m$  est négatif car le levier s'éloigne du centre de la came. Il est positif dans le mouvement de descente. La fonction de transmission normée  $f(z)$  est choisie dans la collection des lois polynomiales ou harmoniques.

## 2. Position du point $A$ sur la came

Introduisons la relation de l'angle  $\psi$  par rapport à l'angle de rotation  $\varphi$  de la came. Il devient possible d'exprimer les coordonnées du profil de la came par :

$$x_A = a \cdot \cos\varphi + e \cdot \cos[\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)] - l \cdot \sin[\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)], \quad (17.16.1)$$

$$y_A = a \cdot \sin\varphi + e \cdot \sin[\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)] + l \cdot \cos[\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)], \quad (17.16.2)$$

Dans ces deux expressions, les coordonnées  $x_A$  et  $y_A$ , la longueur  $l$  sont des inconnues et des fonctions des autres grandeurs. Eliminons la longueur variable du levier  $l$  de ces deux expressions en observant la direction de la tangente à la came. Cette droite est inclinée de l'angle  $\gamma$  par rapport à l'axe horizontal  $Ox$  :

$$\tan\gamma = y' = \frac{dy_A}{dx_A} = \tan(\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z) + \pi/2),$$

$$\text{ou :} \quad \tan\gamma = - \frac{\cos[\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)]}{\sin[\varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)]}. \quad (17.16.3)$$

Simplifions l'écriture en introduisant l'angle auxiliaire  $\delta$  :

$$\delta = \varphi + \psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z). \quad (17.16.4)$$

Calculons la valeur de la pente de la tangente à partir des coordonnées du point  $A$  en dérivant par rapport à l'angle  $\varphi$  :

$$\frac{dx_A}{d\varphi} = -a \cdot \sin\varphi - e \cdot \sin\delta \cdot (1 + \psi') - l \cdot \cos\delta \cdot (1 + \psi'),$$

$$\frac{dy_A}{d\varphi} = a \cdot \cos\varphi + e \cdot \cos\delta \cdot (1 + \psi') - l \cdot \sin\delta \cdot (1 + \psi'),$$

$$\text{avec :} \quad \frac{d\delta}{d\varphi} = 1 + \psi' \quad \text{et} \quad \psi' = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi} \cdot f'(z). \quad (17.16.5)$$

En comparant ces diverses expressions de la tangente à la courbe et après simplifications, nous obtenons :

$$\text{Longueur du levier :} \quad l = \frac{a}{1 + \psi'} \cdot \sin[\psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)]. \quad (17.17.1)$$

La longueur du levier ne dépend pas de l'excentricité  $e$ .

Les coordonnées du point  $A$  sont alors :

$$x_A = a \left( \cos\varphi - \frac{1}{1 + \psi'} \cdot \sin(\psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)) \cdot \sin\delta \right) + e \cdot \cos\delta, \quad (17.17.2)$$

$$y_A = a \left( \sin\varphi + \frac{1}{1 + \psi'} \cdot \sin(\psi_0 + \Delta\psi \cdot f(z)) \cdot \cos\delta \right) + e \cdot \sin\delta. \quad (17.17.3)$$

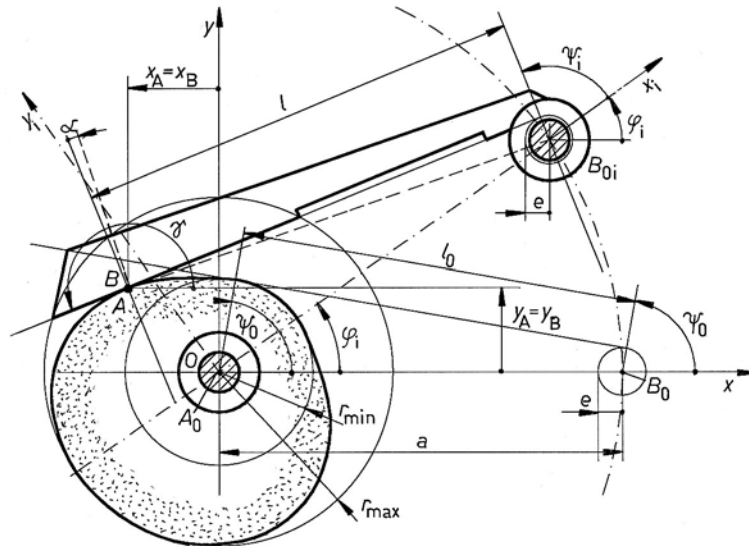


Figure 17.33 Mise en équation du profil de la came

Dans ces deux expressions, la grandeur  $\psi'$  peut se calculer à partir de la course angulaire de montée  $\Delta\psi_m$  ou de descente  $\Delta\psi_d$  et de l'angle de rotation de la came  $\Delta\phi_m$  ou  $\Delta\phi_d$  nécessaire pour obtenir ces mouvements sur le levier. Les expressions sont :

- à la montée : 
$$\psi'_m = \frac{\Delta\psi_m}{\Delta\phi_m} \cdot f' \left( \frac{\phi}{\Delta\phi_m} \right), \quad (17.17.4)$$

- à la descente : 
$$\psi'_d = \frac{\Delta\psi_d}{\Delta\phi_d} \cdot f' \left( \frac{\phi}{\Delta\phi_d} \right). \quad (17.17.5)$$

### 3. Dérivées par rapport à l'angle $\phi$

Les dérivées premières et secondes des coordonnées des points  $A$  et  $B$  par rapport à l'angle de rotation de la came peuvent se trouver par les expressions :

Point  $A$

- dérivées premières : 
$$x'_A = \frac{dx_A}{d\phi}, \quad y'_A = \frac{dy_A}{d\phi},$$

- dérivées secondes : 
$$x''_A = \frac{d^2x_A}{d\phi^2}, \quad y''_A = \frac{d^2y_A}{d\phi^2}. \quad (17.18.1)$$

Point  $B$

- dérivées premières : 
$$x'_B = \frac{dx_B}{d\phi}, \quad y'_B = \frac{dy_B}{d\phi},$$

- dérivées secondes : 
$$x''_B = \frac{d^2x_B}{d\phi^2}, \quad y''_B = \frac{d^2y_B}{d\phi^2}. \quad (17.18.2)$$

### 4. Rayon de courbure

Le rayon de courbure de la came, au point de contact  $B$  avec le levier oscillant plan, se trouve à partir des dérivées premières et secondes par :

$$r_{A \text{ came}} = \frac{(x_A'^2 + y_A'^2)^{3/2}}{x_A' \cdot y_A'' - y_A' \cdot x_A''}. \quad (17.18.3)$$

Comme les coordonnées du point  $A$  dépendent de la dérivée de la course angulaire par rapport à l'angle de rotation  $\varphi$  de la came, le rayon de courbure dépend également des diverses dérivées de ces grandeurs par rapport à  $\varphi$ .

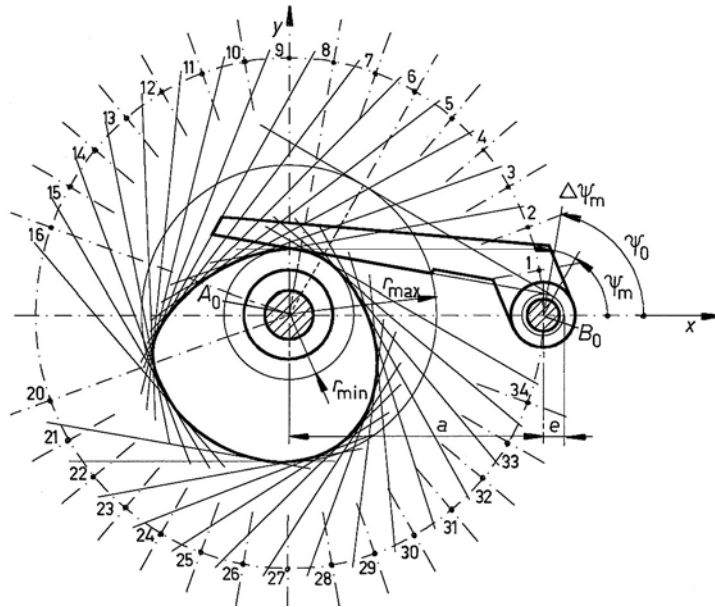


Figure 17.34 Construction graphique du profil d'une came avec poussoir monté sur levier oscillant

### 5. Tracé de la came

À partir des grandeurs initiales, fixées par les contraintes géométriques, données par l'implantation, les grandeurs cinématiques imposées par les divers mouvements composants et les relations générales proposées pour les lois normées, le tracé du profil de la came peut s'effectuer soit par voie graphique, soit par voie analytique. Cette dernière méthode utilise directement les coordonnées du point  $A$ .

#### 5.1 Tracé graphique

Le tracé graphique consiste à construire tout d'abord deux cercles centrés sur le point  $A_0$  : le cercle de rayon minimal  $r_{\min} = r_b + e$ , relation 17.14.1, le rayon maximal  $r_{\max} = r_{\min} + \Delta r$ , relation 17.14.2, de porter l'entraxe  $a$  entre les points fixes  $A_0$  et  $B_0$ , un cercle au point  $B_0$  d'excentricité  $e$ . Construire au point  $B_0$  l'angle initial  $\psi_0$  au moyen d'un rayon issu de ce point.

Partager l'angle de rotation  $\Delta\varphi_m$  nécessaire au mouvement de montée en un nombre d'incréments compris entre 10 et 20. Porter les centres de rotation  $B_{0i}$  du levier à partir du point  $B_0$  sur une circonférence de rayon  $a$  centrée sur  $A_0$ . À partir de chacun de ces centres, dessiner la direction du plan du levier en tenant compte des angles de rotation  $\varphi$  de la came et  $\psi$  du levier. La courbe enveloppe intérieure obtenue correspond au profil de la came dans le mouvement de montée. Répétez cette construction pour le mouvement de descente en décomposant l'angle de rotation  $\Delta\varphi_d$  de la came en un nombre d'incréments compris entre 10 et 20, voir figure 17.34.

#### 5.2 Tracé analytique

Pour un tracé précis de la came, calculer le mouvement du levier oscillant en fonction de l'angle de rotation  $\varphi$  de la came avec un incrément  $\Delta\varphi = 1^\circ$  à  $2^\circ$ . Calculer les coordonnées  $x_A$  et  $y_A$  du point de contact  $A$  et tracer les courbe de montée, en position haute, de descente, en position basse, reliant tous ces points.

#### 17.10.4 FROTTEMENT SUR LES POUSSOIRS

Le déplacement relatif de la surface d'appui de la came sur le plan des poussoirs provoque une force parasite de frottement. En supposant le frottement selon la loi de Coulomb, cette force est proportionnelle à la composante normale :

$$F_R = \mu \cdot F_n .$$

La mise en équilibre dynamique de la came, de la tige avec poussoir ou du levier avec poussoir permettra de trouver les divers couples et forces appliqués sur le mécanisme.

### 17.11 CONCEPTION DES MÉCANISMES À CAMES

Les notions développées jusqu'ici permettent de résoudre les problèmes mécaniques de ces convertisseurs de mouvement : cinématique des divers mouvements composants, dynamique des équilibres des constituants. La forme de la partie active des cames se compose de surfaces curvilignes continues, à rayons de courbure variables, contrairement aux autres pièces usuelles de la construction mécanique de formes plane ou cylindrique. Actuellement, la plupart des profils de came sont fabriqués sur des machines à commande numérique. Le volume de données numériques à fournir varie d'une machine à l'autre : seulement les coordonnées du point de contact  $A$  ou ces coordonnées complétées par le rayon de courbure du profil.

#### 17.11.1 CAMES

La conception des cames pour mécanismes plans peut se subdiviser en :

- forme fondamentale de la came avec ou sans moyeu, en une ou plusieurs pièces,
- type de fixation sur l'arbre,
- forme de la liaison entre la came et l'organe actionné.

La figure 17.35 montre le principe des conceptions usuelles des cames.

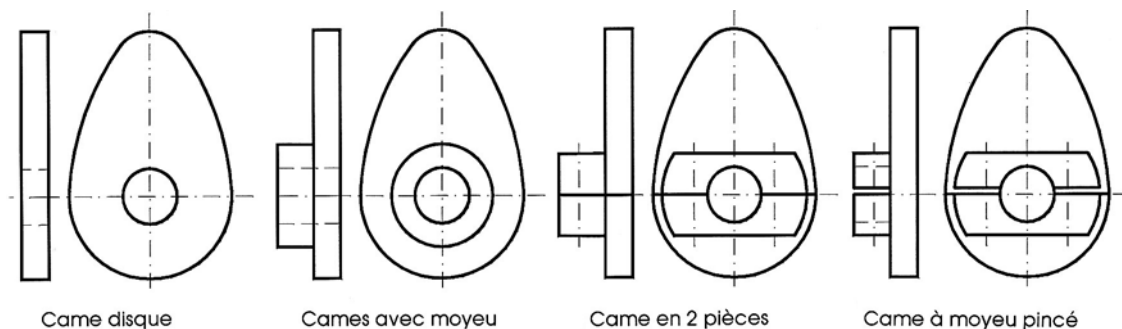


Figure 17.35 Principe de la conception des cames pour mécanismes plans

Le choix des matières pour la fabrication des cames dans la construction de machines est limité aux fontes et aciers. Le tableau 17.3 donne un choix des possibilités courantes, complété par les pressions hertziennes ou linéaires admissibles.

Tableau 17.3

**Choix de matières pour la fabrication des cames et des rouleaux**

Matière pour les cames	Matière pour les rouleaux	Pression superficielle admissible $p$ (N/mm <sup>2</sup> )	Pression superficielle admissible $k$ (N/mm <sup>2</sup> )	Remarques supplémentaires
GG 20	Acier durci	140 .. 160	0,3 .. 0,4	0,4% de molybdène améliore la résistance à l'usure
C15 16 MnCr 5 20 MnCr 5	Acier durci	450 .. 600	3,5 .. 5,5	Cémenté trempé revenu profondeur 0,5..1,0 mm 58 .. 62 ± 2 HRC
C45	Acier durci	450 .. 600	3,5 .. 5,5	trempé à la flamme ou par induction profondeur 1 .. 2 mm 58 ± 3 HRC
Ac 60-2	Acier durci	200	0,60	
GS 52	Acier durci	150	0,30	

**17.11.2 GALETS**

La plupart des galets montés dans les mécanismes à came sont des roulements à bague extérieure épaisse conçus pour supporter des charges et pressions élevées. Leur surface de roulement est bombée ou plane. Le bombé de la bague extérieure permet de compenser les erreurs de parallélismes dues aux erreurs de fabrication, de montage et aux déformations mécaniques. La capacité de charge est influencée par la surface de contact entre le galet et la came, la déformation de la bague épaisse, les efforts variables et du parcours total. La durée de vie du galet et la capacité de charge radiale dynamique  $F_r$  sont mentionnées dans les tableaux des catalogues de roulements.

Les galets de cames, type étroit, dérivent des roulements à billes de la série 62. Ils ont une surface de roulement bombée, sont garnis de graisse et protégés par des joints. Les galets de cames, type large, représentent une exécution spéciale des roulements à billes à contact oblique à deux rangées de la série 32 A, leur angle de contact étant 25°. Ils sont munis de flasque de protection des deux côtés, d'un trou de lubrification dans la bague intérieure, de surfaces de roulement bombées ou cylindriques.

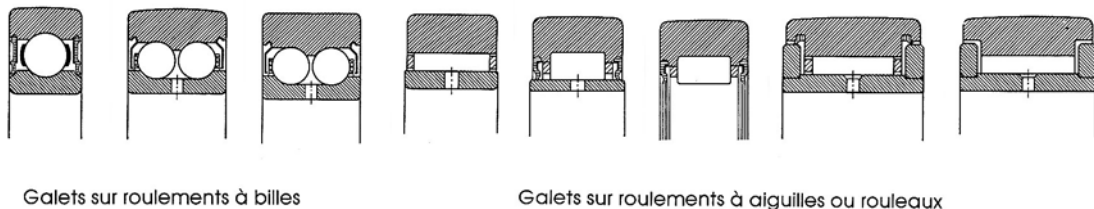


Figure 17.36 Galets de cames et galets - support selon catalogue SKF

Les galets supports sont en principe des roulements à aiguilles ou à rouleaux cylindriques à bague extérieure épaisse. Ils supportent des charges radiales plus élevées et sont livrés garnis

d'une graisse au lithium. Les conceptions de ces éléments diffèrent principalement dans les caractéristiques de maintien axial. Les surfaces de roulement sont bombées ou cylindriques.

Dans les transformateurs de mouvements de précision, les éléments à roulements présentent souvent un jeu radial trop important. Les galets sont remplacés par des rouleaux pleins centrés sur des axes avec un jeu radial de palier minimum. Le choix du diamètre extérieur de tous ces galets ne doit pas provoquer d'interférence avec le profil de la came :

$$r_{\text{galet}} \leq (0,70 \text{ à } 0,82) \cdot \text{Min} |r_{\text{came négatif}}|$$

Le galet roule et glisse sur la surface portante de la came. L'expérience montre que le contact d'un galet bombé à grand rayon de courbure sur une came non durcie superficiellement s'effectue pratiquement avec le temps sur toute la largeur de la came. La largeur du galet sera choisie plus grande que celle de la came.

Les galets placés dans une rainure de came doivent toucher constamment la même face portante. Le passage d'une face à l'autre de la rainure obligerait le galet à changer de sens de rotation.

### 17.11.3 TRINGLERIE

La tringlerie sert à transmettre vers l'extérieur le mouvement engendré par le contact entre la came et le galet ou le poussoir. Ces dispositifs sont fabriqués à partir de profilés, de pièces de fonderie, de pièces matricées ou d'ensembles soudés selon le nombre de pièces et la complexité de la configuration. Les leviers sont soit libres, soit fixés sur l'arbre de centrage au point cinématique  $B_0$ . Leur conception doit éviter toute déformation incompatible avec les alignements entre les arbres, la came, le galet et le levier sous l'effet des charges appliquées.

Ce danger existe en particulier pour les galets montés sur tourillon en porte-à-faux. L'emploi d'extrémité en fourche évite un gauchissement des pièces. Les leviers solidaires des arbres sont fixés par goupille, clavette ajustée, pinçage ou emmanchement lorsque la place le permet. Les mécanismes à cames équipés d'une contre-came nécessitent toujours un dispositif d'ajustement des galets afin de garantir un fonctionnement impeccable des deux contours.

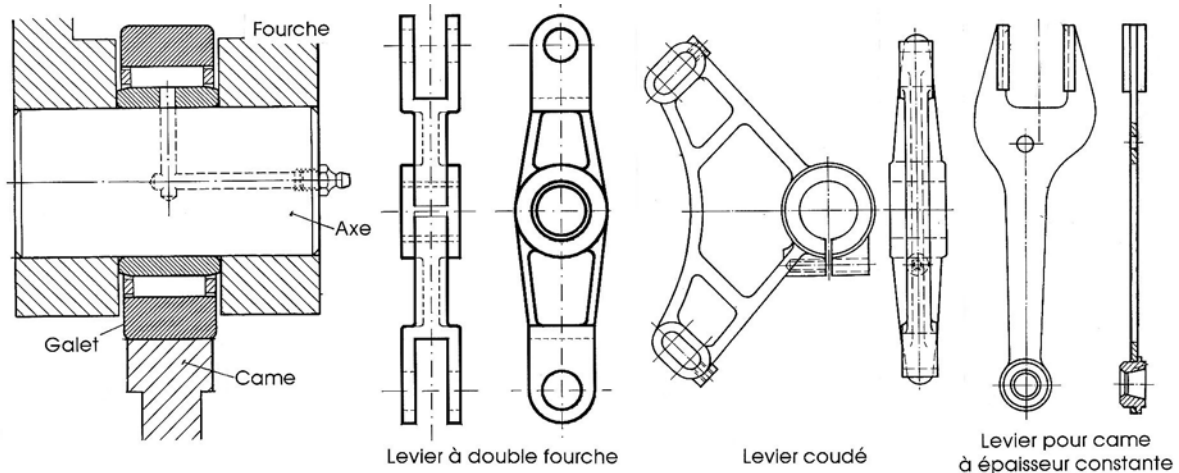


Figure 17.37 Exemples de montage d'un galet et leviers pour mécanismes à cames



### 17.11.4 PRESCRIPTIONS D'USINAGE

Le calcul manuel des données d'usinage est un travail très onéreux. Il peut s'éviter en utilisant un logiciel évolué comprenant non seulement des considérations cinématiques et dynamiques, mais aussi toutes les dimensions nécessaires à la fabrication. Pendant l'usinage d'une came, le contour engendré par l'outil en rotation est un profil plus ou moins polygonal selon la méthode introduite et le type de machine-outil. La hauteur des aspérités ou erreurs créées par le déplacement de l'outil par rapport au profil théorique ne devrait pas dépasser 0,005 à 0,04 mm selon la qualité exigée. En comparant les coordonnées des points du profil de la came pour diverses lois normées, on s'aperçoit que ces dimensions varient peu d'une loi à l'autre. Afin de garantir une fidélité cinématique suffisante, il est absolument nécessaire d'assurer une reproduction exacte des cotes théoriques. Le positionnement de l'outil par rapport à la came peut s'obtenir par :

1. un fraisage manuel radial au moyen d'un système de coordonnées polaires. Le déplacement de l'outil s'effectue seulement dans la direction radiale après rotation de la came. Cette méthode est à éviter car la précision obtenue est très médiocre et la plupart du temps insuffisante.
2. un fraisage tangentiel à partir de la coordonnée polaire  $r(\varphi_f)$  jusqu'à la position angulaire suivante  $\varphi_f$ . La précision est légèrement meilleure que dans le fraisage radial.
3. un fraisage par déplacement rectiligne ou curviligne, avec introduction ou calcul du rayon de courbure, entre deux points successifs donnés par leurs coordonnées rectangulaires ou polaires. Cette méthode impose une machine-outil à commande numérique.

Dans l'usinage manuel de la came, la rugosité produite par le positionnement de l'outil peut être réduite en choisissant un diamètre d'outil plus grand que celui du galet. Il faut alors contrôler exactement la position du centre de l'outil par rapport au profil de la came et éviter l'interférence dans le cas de courbures à rayon négatif. Les cames prévues pour des fréquences de rotation élevées sont rectifiées après durcissement, rugosité recommandée N6 à N5, tolérances de forme sur le contour  $\leq 0,004$  mm.

### 17.12 EXEMPLE DE CINÉMATIQUE D'UNE CAME À LEVIER

Soit à trouver les caractéristiques géométriques et cinématiques d'un mécanisme à came avec rouleau monté sur un levier oscillant. Les conditions imposées par la rotation du levier oscillant sont (système de coordonnées orthonormé et sens mathématique) :

- mouvement 1 :            angle de rotation  $-15^\circ$             rotation de la came de  $0^\circ$  à  $110^\circ$ ,
- mouvement 2 :            angle de rotation  $-15^\circ$             rotation de la came de  $120^\circ$  à  $230^\circ$ ,
- mouvement 3            angle de rotation  $+30^\circ$             rotation de la came de  $236^\circ$  à  $356^\circ$ ,
- fréquence de rotation de la came :            6 tours par seconde,
- distance entre les axes de la came et du levier :             $a = 120$  mm.

L'angle de pression entre le profil de la came et le levier devrait être compris entre  $\pm 25^\circ$  afin de pouvoir transmettre les efforts si possible perpendiculairement au bras.

#### 1. CONCEPTION GÉOMÉTRIQUE DU MÉCANISME

Les dimensions géométriques sont recherchées en modifiant successivement le rayon minimal de la came, la longueur du levier et la position angulaire initiale de cette pièce afin d'obtenir un angle de pression compris dans les limites proposées. Les dimensions obtenues sont :

- longueur du culbuteur             $l = B_0B = 70$  mm,
- angle initial du culbuteur             $\psi_0 = 140^\circ$ ,

- diamètre du galet

$$d_g = 30 \text{ mm.}$$

Ces trois dimensions imposent les rayons suivants sur la came :

- rayon minimal

$$r_{\min} = 65,190 \text{ mm,}$$

- rayon maximal

$$r_{\max} = 101,422 \text{ mm.}$$

La loi cinématique adoptée pour les trois mouvements composants est la loi polynomiale du cinquième degré. Le mouvement angulaire du levier est représenté sur la figure 17.38.

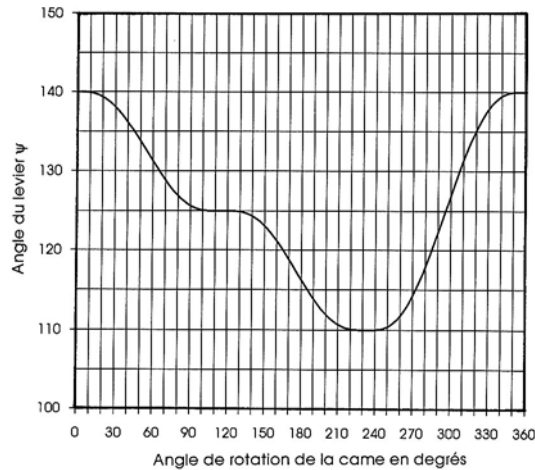


Figure 17.38 Représentation de l'angle du levier  $\psi$  en fonction de l'angle de rotation de la came  $\phi$  pour un tour de la came

L'allure de la courbe de l'élongation angulaire est assez semblable pour toutes les lois normées citées précédemment dans les tableaux.

## 2. CINÉMATIQUE DES MOUVEMENTS COMPOSANTS

La fréquence de rotation de la came est 6 tours par seconde. La vitesse angulaire du levier est proportionnelle à cette fréquence et l'accélération angulaire du levier proportionnelle au carré de la fréquence de l'arbre moteur.

Vitesse angulaire de la came :

$$\omega_{\text{came}} = 2 \pi n = 37,699 \text{ rad/s,}$$

Carré de la vitesse angulaire :

$$\omega_{\text{came}}^2 = 1421,2 \text{ rad/s}^2.$$

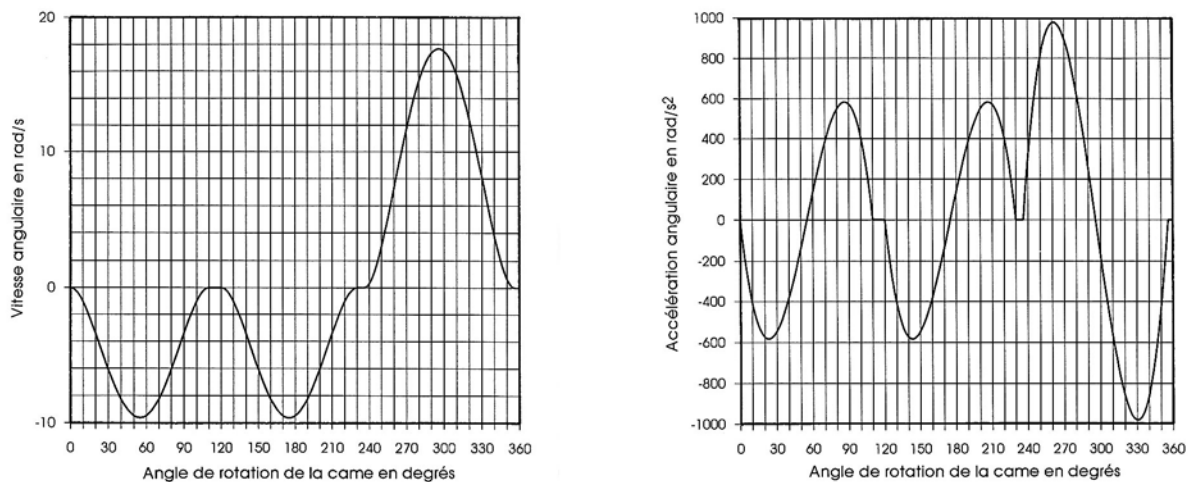


Figure 17.39 Vitesse et accélération angulaires du levier en fonction de l'angle de rotation de la came

La vitesse angulaire du levier dans les trois mouvements composants est donnée sur la figure 17.39 à gauche. Les deux rotations de  $-15^\circ$  s'effectuent dans le même intervalle de temps. L'allure de la vitesse angulaire est donc identique. Le mouvement de retour en position initiale sur  $30^\circ$  génère une vitesse angulaire deux fois plus importante.

L'accélération angulaire du levier devient très grande et atteint à peu près  $1000 \text{ rad/s}^2$  dans le dernier mouvement. Elle est représentée sur la figure 17.39 à droite.

### 3. RAYONS DE COURBURE ET ANGLES DE PRESSION

Le profil de la came ne devrait pas interférer avec le profil du galet. Les dimensions géométriques adoptées dans le mécanisme permettent d'éviter la présence de rayons de courbure négatifs. Le rayon de courbure minimal vaut environ 60 mm et le rayon maximal 190 mm. La figure 17.40 à gauche donne la valeur du rayon de courbure sur le profil de la came.

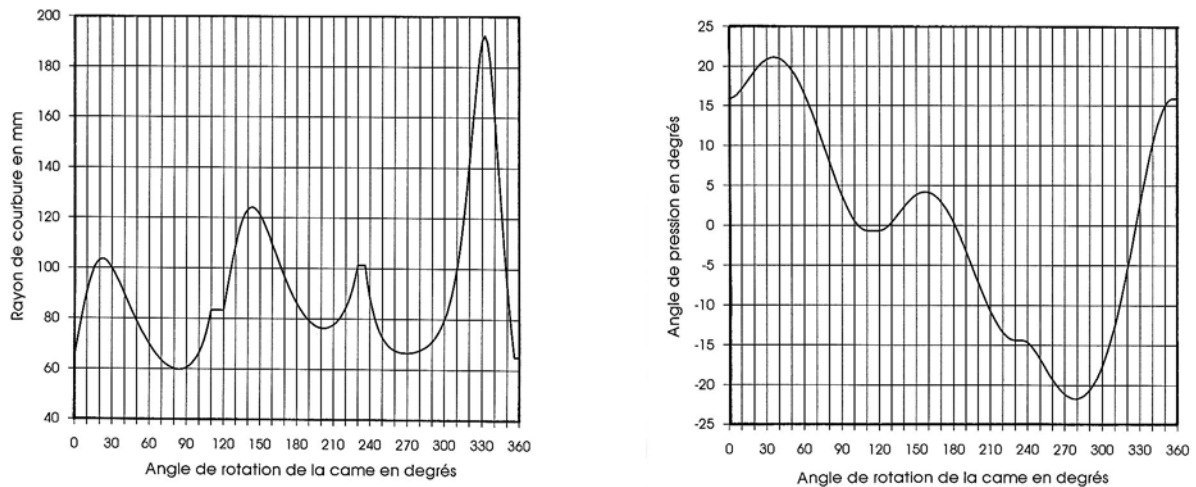


Figure 17.40 Rayons de courbure du profil de la came et angles de pression en fonction de l'angle de rotation  $\phi$  de la came

La même figure donne à droite la valeur de l'angle de pression entre le profil de la came et la direction du levier  $B_0B$  en fonction de l'angle de rotation de la came. Cet angle de pression varie entre  $-22^\circ$  et  $+22^\circ$  et remplit ainsi pleinement les conditions imposées au départ.

### 4. CONCEPTION DE LA CAME

Afin d'assurer la fidélité de la transmission du mouvement entre la came et le levier, le mécanisme est prévu avec une contre-came. Les leviers de la came et de la contre-came ont mêmes longueurs, les galets mêmes diamètres.

Le contrôle de ce mécanisme à came nécessiterait :

1. la détermination des masses en déplacements rectilignes et circulaires,
2. la réduction des masses en un modèle simple, compte tenu des élasticités,
3. la modélisation du mécanisme afin de trouver le comportement dynamique,
4. la recherche des efforts extérieurs appliqués sur la tringlerie,
5. la mise en équilibre dynamique de la came, du levier et des pièces annexes,
6. l'étude de l'effort normal entre le galet et la surface active de la came
7. le calcul de : la pression superficielle,  
la fréquence de rotation et la durée de vie du galet,  
les pertes dans les divers guidages,
8. l'apport de modifications éventuelles afin d'optimiser la conception.

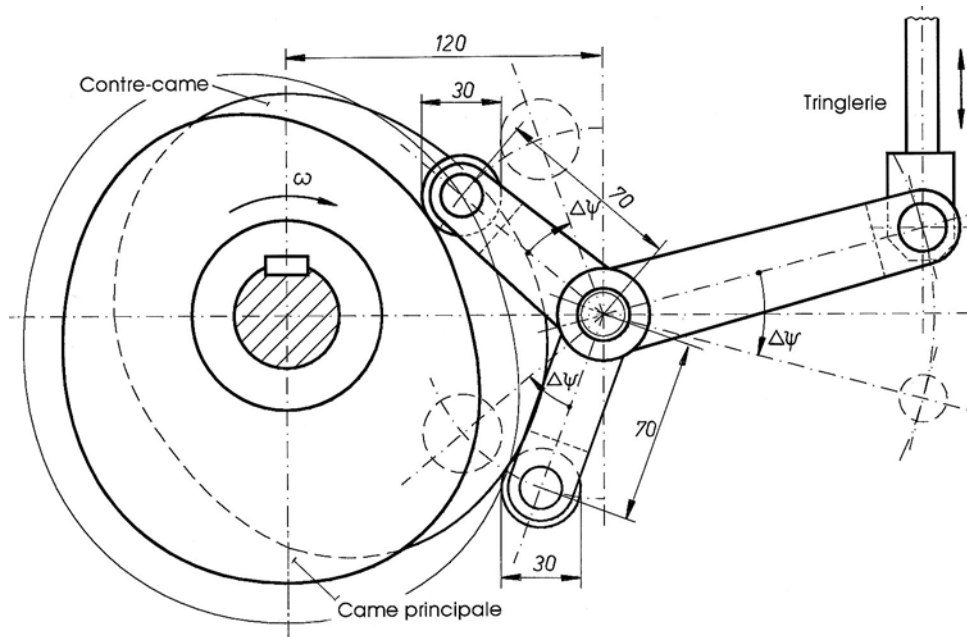


Figure 17.41 Mécanisme à came et contre-came avec double levier

Premières proposition de modifications cinématiques :

L'observation de la variation de l'accélération angulaire en fonction de la rotation de la came montre qu'il serait éventuellement possible de simplifier la suite des mouvements composants en prévoyant une des combinaisons cinématiques particulières proposées.

### 17.13 MÉCANISME À CROIX DE MALTE

Les mécanismes à croix de Malte sont des transformateurs de mouvement qui modifient un mouvement circulaire uniforme en un mouvement discontinu de l'élément entraîné, en rotation ou en translation rectiligne. Ils sont utilisés dans la commande des tables circulaires des machines-outils ou des postes d'usinage, dans le défilement du film des projecteurs de cinéma, dans certains lecteurs pour l'informatique, etc..

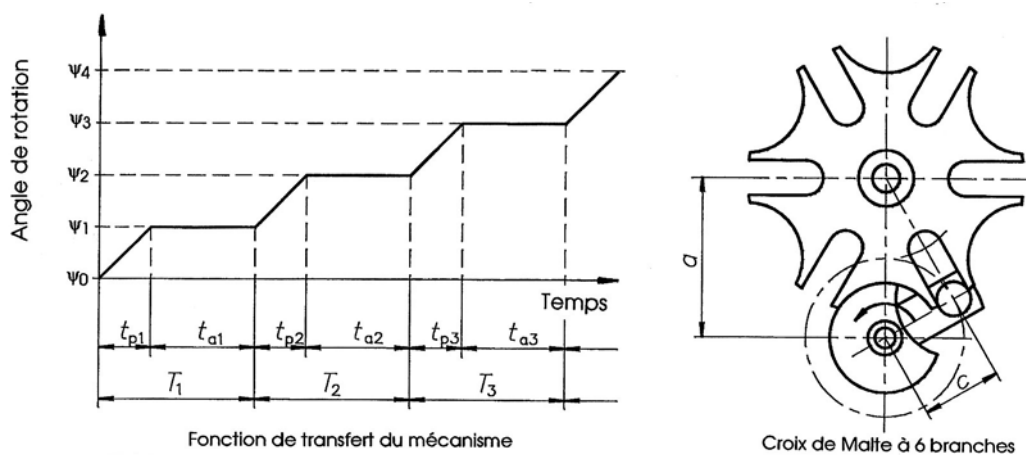


Figure 17.42 Fonction de transfert d'un mécanisme à croix de Malte  
Croix de Malte extérieure à six branches

Le nom de ce mécanisme provient de la forme particulière de l'élément à mouvement discontinu. Pour des angles de rotation variables et selon la valeur des efforts à transmettre, on préfère utiliser actuellement des commandes par moteurs pas à pas ou par systèmes électrohydrauliques.

### 17.13.1 RELATIONS GÉNÉRALES

Si  $t_{pi}$  représente le temps nécessaire à la rotation angulaire  $\varphi_{pi}$  du doigt dans la coulisse de la croix, le rapport des temps d'un pas est donné par l'expression :

$$v = \frac{t_{pi}}{T_i} = \frac{t_{pi}}{t_{ai} + t_{pi}}, \quad (17.19.1)$$

avec  $T_i$  le temps nécessaire pour effectuer un tours complet du doigt d'entraînement. Si la vitesse angulaire du doigt est constante, ce qui est le cas dans la plupart du temps, ce rapport peut aussi s'écrire :

$$v = \frac{\varphi_{pi}}{\varphi_{ai} + \varphi_{pi}}, \quad (17.19.2)$$

si  $\varphi_{ai}$  est l'angle de rotation du doigt hors de la coulisse. Le nombre de branche de la croix de Malte est désigné par  $n$ . Le temps nécessaire pour une rotation complète de la croix est :

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = n \cdot T_i. \quad (17.19.3)$$

Le produit  $n T_i$  n'est valable que pour les mécanismes avec rapport  $n$  constant. Si la croix de Malte est pourvue de branches inégales, les périodes  $T_i$  sont variables.

### 17.13.2 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Le principe de ce mécanisme est d'utiliser le mécanisme à bras oscillant avec une coulisse ouverte comme élément entraîné et une manivelle en rotation complète. Dès que la coulisse de la manivelle n'est plus en contact avec la glissière, la croix de Malte doit rester immobile. Habituellement, un dispositif complémentaire permet d'assurer cette fonction. Il existe trois sortes de mécanisme : la croix de Malte extérieure, la croix de Malte intérieure et la croix de Malte à élément en mouvement rectiligne. Ces trois principes peuvent se représenter sous la forme des chaînes cinématiques de la figure 17.43.

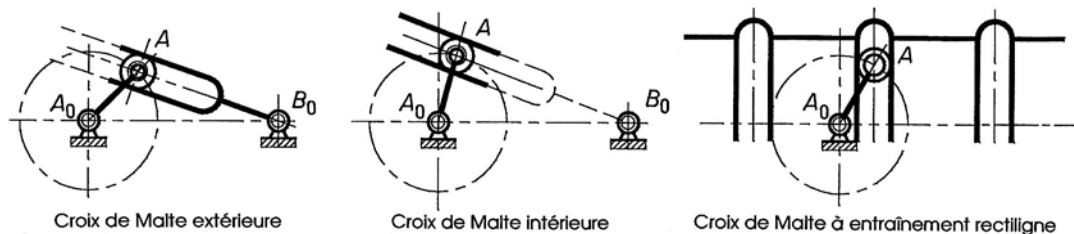


Figure 17.43 Chaînes cinématiques des mécanismes à croix de Malte

L'angle d'entraînement d'une croix de Malte régulière est donné par :

$$\psi_{p1} = \psi_{p2} = \dots = \psi_{pn} = \frac{2\pi}{n}, \quad (17.20.1)$$

avec :  $n$  positif pour les croix extérieures,  
 $n$  négatif pour les croix intérieures.

Pour obtenir des conditions géométriques correctes entre les trajectoires relatives et absolues, du point  $A$  dans la coulisse, il faut que la tangente à la trajectoire absolue du point  $A$  de la manivelle soit confondue avec la direction de la coulisse au début et à la fin du contact entre le doigt et la coulisse. Il en résulte que :

$$\varphi_p + \psi_p = \pi. \quad (17.20.2)$$

En choisissant le nombre de branches  $n$  de la croix, les angles  $\varphi_p$  et  $\psi_p$  sont fixés par ces deux relations. Pour une vitesse angulaire constante  $\omega_A$  de la manivelle ( $A_0A$ ), le rapport des temps d'un pas se trouve simplement par :

$$v = \frac{n-2}{2n}. \quad (17.20.3)$$

### 17.13.3 MISE EN ÉQUATION DU MÉCANISME

Dans le mécanisme à croix de Malte extérieure, la manivelle et la croix tournent dans des sens opposés. La mise en équation ne tient pas compte d'une façon rigoureuse du sens des angles et des grandeurs cinématiques. Les dimensions générales sont désignées par :

- la longueur de la manivelle  $l_A$ ,
- la longueur actuelle de la coulisse oscillante  $b$ ,
- la longueur de la coulisse en position initiale  $b_0$ ,
- l'entraxe ou la distance entre les deux articulations fixes  $A_0$  et  $B_0$ , soit l'entraxe  $a$ ,
- l'angle de la manivelle par rapport à l'axe de référence  $\varphi$ ,
- l'angle de la coulisse par rapport à l'axe de référence  $\psi$ .

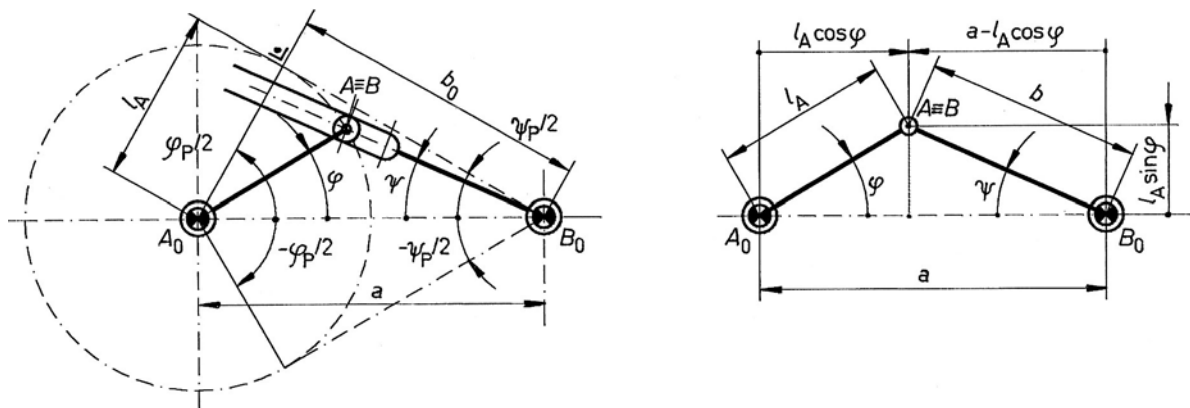


Figure 17.44 Définition des grandeurs angulaires Recherche de l'angle  $\psi$  en fonction de l'angle  $\varphi$

Lors de l'introduction du point  $A$  de la manivelle dans la coulisse, la manivelle  $A_0A$  est perpendiculaire à la coulisse rectiligne  $B_0B$ . Ces deux grandeurs géométriques s'expriment en fonction de l'entraxe  $a$  et sont reliées par :

$$\begin{aligned} l_A &= a \cdot \sin(\psi_p/2), \\ b_0 &= a \cdot \cos(\psi_p/2). \end{aligned} \quad (17.21.1)$$

L'angle de la manivelle  $A_0A$  est compté positivement à partir de la direction  $A_0B_0$ ; l'angle de la coulisse  $B_0B$  est compté positivement à partir de la directrice  $B_0A_0$  dans le sens horaire. L'angle de la manivelle  $A_0A$  varie ainsi entre  $-\varphi_p/2$  et  $+\varphi_p/2$  lors de l'entraînement de la coulisse. Celui de la coulisse varie entre  $-\psi_p/2$  et  $+\psi_p/2$ . La mise en équation est semblable à celle du mécanisme à coulisse oscillante, l'entraînement étant limité par les deux positions pour

lesquelles la manivelle est perpendiculaire à la coulisse. L'angle  $\psi$  entre la direction  $B_0A_0$  et la coulisse se trouve par, figure 17.44 :

$$\tan \psi = \frac{l_A \sin \varphi}{a - l_A \cos \varphi}$$

et :

$$\psi = \arctan \frac{\sin \varphi}{a / l_A - \cos \varphi}. \quad (17.21.2)$$

Introduisons le rapport des grandeurs géométriques constantes :

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{a}{l_A} = \frac{1}{\sin(\psi / 2)}. \quad (17.21.3)$$

Ecrivons l'expression de l'angle  $\psi$  en fonction de l'angle  $\varphi$  et calculons les dérivées premières et secondes par rapport à cet angle :

$$\begin{aligned} \psi &= \arctan \frac{\sin \varphi}{k - \cos \varphi}, \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= \frac{k \cdot \cos \varphi - 1}{1 + k^2 - 2k \cdot \cos \varphi}, \\ \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} &= \frac{k \cdot (1 - k^2) \cdot \sin \varphi}{(1 + k^2 - 2k \cdot \cos \varphi)^2}. \end{aligned} \quad (17.21.4)$$

La dérivée première de l'angle  $\psi$ , proportionnelle à la vitesse angulaire de la coulisse, atteint son maximum pour  $\varphi = 0$ ; sa valeur particulière en ce point est :

$$\left( \frac{d\psi}{d\varphi} \right)_{\max} = \frac{1}{k - 1}. \quad (17.21.5)$$

La dérivée seconde de l'angle  $\psi$ , proportionnelle à l'accélération angulaire de la coulisse, atteint ses valeurs extrémales pour un angle  $\varphi$  valant :

$$\varphi = \arccos \left( -\frac{1 + \lambda^2}{4\lambda} + \left[ \left( \frac{1 + \lambda^2}{4\lambda} \right)^2 + 2 \right]^{0,5} \right). \quad (17.21.6)$$

Les grandeurs cinématiques de la croix de Malte, position, vitesse et accélération angulaires se trouvent à partir de ces dérivées et de l'expression de l'angle  $\varphi$  de la manivelle motrice en fonction du temps.

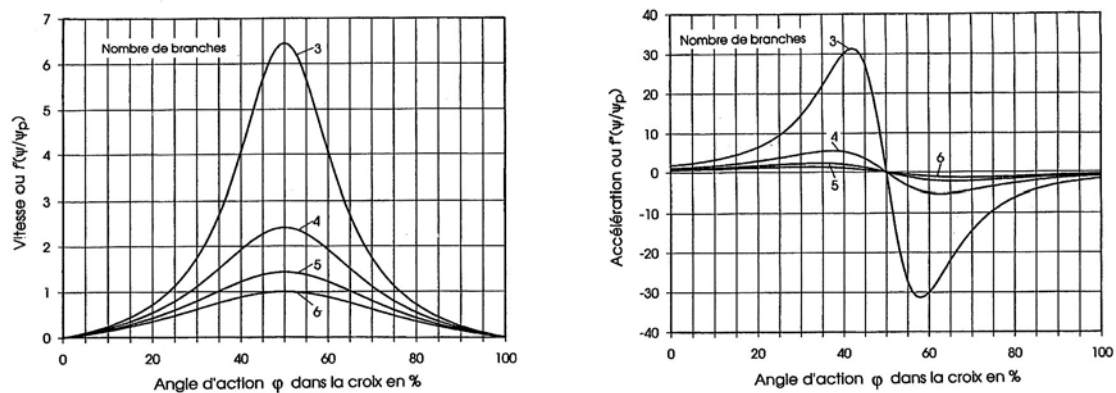


Figure 17.45 Vitesse et accélération angulaires de la croix en fonction de l'angle d'action de la manivelle pour des croix de Malte à  $n = 3, 4, 5$  et  $6$

### 17.13.4 CINÉMATIQUE DE LA CROIX DE MALTE

Le mouvement de la croix de Malte dépend des dimensions géométriques adoptées et du mouvement de la manivelle motrice : circulaire uniforme ou circulaire varié.

#### 17.13.4.1 MOUVEMENT D'ENTRAÎNEMENT UNIFORME

La vitesse angulaire de la manivelle  $A_0A$  est désignée par  $\omega_A$  et l'angle balayé  $\varphi$  est égal au produit de cette vitesse par le temps. Les grandeurs cinématiques sont :

$$\text{- position angulaire : } \psi = \arctan \frac{\sin \varphi}{k - \cos \varphi}, \quad (17.22.1)$$

$$\text{- vitesse angulaire : } \omega_B = \frac{d\psi}{dt} = \frac{k \cdot \cos \varphi - 1}{1 + k^2 - 2k \cdot \cos \varphi} \cdot \omega_A, \quad (17.22.2)$$

$$\text{- accélération angulaire : } \alpha_B = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{k \cdot (1 - k^2) \cdot \sin \varphi}{(1 + k^2 - 2k \cdot \cos \varphi)^2} \cdot \omega_A^2. \quad (17.22.3)$$

La vitesse et l'accélération angulaires de la coulisse sont indicées par la lettre B.

#### 17.13.4.2 MOUVEMENT D'ENTRAÎNEMENT VARIÉ

Si le mouvement de la manivelle motrice est varié et donné en fonction du temps par l'expression générale :

$$\varphi_A = \varphi_A(t) \quad \text{donc} \quad \omega_A = d\varphi_A/dt \quad \text{et} \quad \alpha_A \neq 0,$$

les grandeurs cinématiques du mouvement de la croix de Malte se trouvent par les expressions angulaires suivantes :

$$\text{- position : } \psi = \arctan \frac{\sin \varphi}{k - \cos \varphi}, \quad (17.23.1)$$

$$\text{- vitesse : } \omega_B = \frac{d\psi}{dt} = \frac{k \cdot \cos \varphi - 1}{1 + k^2 - 2k \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad (17.23.2)$$

$$\text{- accélération : } \alpha_B = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{k \cdot (1 - k^2) \cdot \sin \varphi}{(1 + k^2 - 2k \cdot \cos \varphi)^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d\psi}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (17.23.3)$$

*Attention* : Dans le cas de mouvements variés de la manivelle motrice, la vitesse angulaire maximale et les accélérations extrémales dépendent non seulement de la géométrie du mécanisme, mais également des grandeurs cinématiques de la manivelle. Les vitesses et les accélérations sont données en fonction de la position angulaire de la manivelle.

#### 17.13.4.3 CONSTANTE $k$

La constante géométrique  $k$  dépend du nombre de branches de la croix de Malte et se trouve, pour une croix régulière, par :

$$k = \frac{a}{l_A} = \frac{1}{\sin(\psi_p / 2)} = \frac{1}{\sin(\pi / n)}.$$

Pour les croix de Malte spéciales à angle de coulisse  $\psi_p$  variable, chaque contact entre la manivelle motrice et la croix nécessite le calcul de la constante  $k$ . Les croix de Malte intérieures n'ont pas d'accélération extrémales.



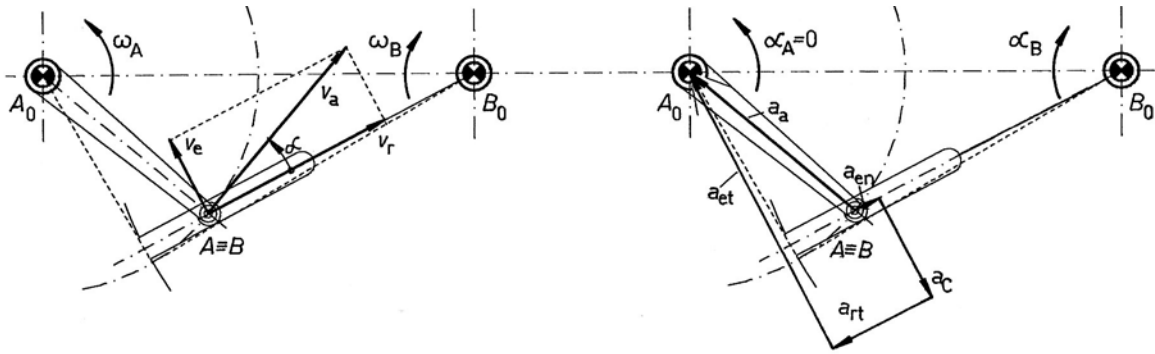


Figure 17.46 Vitesses et accélérations composantes dans le mécanisme à croix de Malte

## 17.13.4.4 CONTRÔLE DES GRANDEURS CINÉMATIQUES

Le contrôle des grandeurs cinématiques, en particulier les valeurs relatives comme la vitesse et l'accélération du point  $A$  dans la coulisse, peut s'effectuer graphiquement ou analytiquement.

## 1. Vitesses absolue, relative et d'entraînement

La vitesse relative du point  $A$  dans la coulisse s'exprime en fonction de la vitesse absolue de ce point et de la position relative des deux pièces. La relation des mouvements relatifs donne :

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e, \quad (17.24.1)$$

avec :

- $v_r$  vitesse relative dans la direction de l'axe de la coulisse,
- $v_a$  vitesse absolue du point  $A$  :  $v_a = v_A = \omega_A \cdot l_A$ , perpendiculaire à  $A_0A$ ,
- $v_e$  vitesse d'entraînement perpendiculaire au chaînon  $B_0B$  :  $v_e = \omega_B \cdot B_0B$ ;  
 $\omega_B = \omega_e$  est aussi la vitesse angulaire d'entraînement.

## 2. Accélérations absolue, relatives et d'entraînement

L'accélération absolue du point  $A$  est la somme des accélérations d'entraînement normale et tangentielle, relative tangentielle et de Coriolis. L'accélération relative normale est nulle si la coulisse est rectiligne. Sur la figure 17.46, le mouvement de la manivelle est supposé circulaire uniforme et la coulisse rectiligne. La relation des mouvements relatifs donne selon figure 17.46 à droite :

$$\vec{a}_{rt} = \vec{a}_a - \vec{a}_{en} - \vec{a}_{et} - \vec{a}_C, \quad (17.24.2)$$

avec :

- $a_{rt}$  accélération du point  $B$  dans la direction de l'axe de la coulisse,
- $a_a$  accélération absolue du point  $A$  :  $a_a = a_A = \omega_A^2 \cdot l_A$  (mouvement uniforme),
- $a_{en}$  accélération d'entraînement normale :  $a_{en} = v_e^2 / B_0B$ ,
- $a_C$  accélération de Coriolis :  $a_C = 2 \omega_e \cdot v_r$ ;  
 cette accélération est perpendiculaire à la vitesse relative  $v_r$ , rotation selon  $\omega_e$ ,
- $a_{et}$  perpendiculaire au chaînon  $B_0B$ .

Les composantes de la vitesse et de l'accélération absolues peuvent s'exprimer analytiquement en fonction des angles  $\varphi$  et  $\psi$  par projection sur la coulisse et sa perpendiculaire.

### 17.13.5 PROPRIÉTÉS DU MÉCANISME

Le mécanisme à croix de Malte présente des caractéristiques cinématiques dépendant du nombre de coulisses dans la croix. Si l'entrée du doigt d'entraînement dans la coulisse de la croix s'effectue exactement dans la direction de celle-ci, le mouvement circulaire de la manivelle motrice provoque une brusque accélération de la croix égale à l'accélération normale du point  $A$ .

#### 17.13.5.1 GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE

Le tableau 17.4 ci-après donne les principales caractéristiques géométriques et cinématiques des mécanismes à croix de Malte avec angle constant entre les coulisses. Les dérivées premières et secondes sont calculées par rapport à l'angle  $\varphi$ . Pour obtenir la vitesse angulaire, multiplier les valeurs du tableau par  $\omega_A$ , pour l'accélération angulaire par  $\omega_A^2$ .

Tableau 17.4

**Caractéristiques du mécanisme à croix de Malte extérieure**

$n$	$\varphi_p^\circ$	$\psi_p^\circ$	$k=a/l_A$	$\psi'_{\max}$	$\psi''_{\text{ini}}$	$\varphi^\circ(\psi''_{\max})$	$\psi''_{\max}$
3	60	120	1,1547	6,4641	1,7321	4,76	31,3924
4	90	90	1,4142	2,4142	1,0000	11,46	5,4070
5	108	72	1,7013	1,4259	0,7265	17,57	2,2988
6	120	60	2,0000	1,0000	0,5774	22,90	1,3496
7	128,6	51,4	2,3048	0,7664	0,4816	27,56	0,9284
8	135	45	2,6131	0,6199	0,4142	31,64	0,6998
9	140	40	2,9238	0,5198	0,3640	35,26	0,5591
10	144	36	3,2361	0,4472	0,3249	38,49	0,4648
12	150	30	3,8637	0,3492	0,2679	44,00	0,3477
14	154,3	25,7	4,4940	0,2862	0,2282	48,53	0,2782
16	157,5	22,5	5,1258	0,2424	0,1989	52,32	0,2323
20	162	18	6,3925	0,1854	0,1584	58,25	0,1755

Symboles et signification des valeurs données dans le tableau :

- $n$  nombre de branches de la croix de Malte,
- $\varphi_p$  angle total d'entraînement de la manivelle en degrés,
- $\psi_p$  angle en degrés entre deux coulisses sur la croix,
- $k$  rapport géométrique,
- $\psi'_{\max}$  vitesse angulaire maximale de la croix pour  $\omega_A = 1 \text{ rad/s}$ ,
- $\psi''_{\text{ini}}$  dérivée seconde en début de mouvement ou valeur absolue de cette dérivée en fin du mouvement,
- $\varphi^\circ(\psi''_{\max})$  position angulaire de la manivelle en degrés pour laquelle l'accélération angulaire est maximale ou minimale,
- $\psi''_{\max}$  valeur maximale de la dérivée seconde de l'angle  $\psi$  par rapport à  $\varphi$ .

Les grandeurs calculées dans ce tableau montrent que la croix de Malte à trois branches présente une accélération initiale ou finale élevée et une accélération maximale ou minimale très grande. Ce mécanisme est à éviter si la fréquence de rotation de la manivelle est rapide.

## 17.13.5.2 VARIANTES INTÉRESSANTES DU MÉCANISME

La croix de Malte classique possède un angle constant entre les diverses coulisses et un seul doigt d'entraînement. En modifiant cette forme fondamentale, il est possible d'obtenir des mouvements particuliers très intéressants au moyen de mécanismes à croix de Malte. Dans le système fondamental, l'entraînement de la croix s'effectue pendant la rotation de l'angle  $\varphi_P$  et le repos pendant la rotation  $\varphi_{\text{repos}} = 2\pi - \varphi_P$ .

## 1. Mécanismes à plusieurs doigts d'entraînement

Cette famille de croix de Malte permet de limiter le temps de repos entre deux mouvements de rotation de la croix. L'angle de rotation de repos peut se modifier en introduisant plusieurs doigts disposés à position angulaire constante ou variable. Le nombre de doigts peut varier de  $m = 1$  à  $m_{\text{max}} = 2n/(n-2)$ ,  $m$  devant rester entier. Les doigts disposés à intervalles angulaires constants génèrent des angles d'arrêt constants. Les doigts placés à intervalles angulaires variables imposent des angles de repos variables. La figure 17.47 montre deux versions de ce genre :

1. Croix à cinq branches avec entraînement à trois doigts disposés à  $120^\circ$ , figure 17.47 à gauche. L'angle d'entraînement pour une croix régulière est  $\varphi_P = 108^\circ$  et l'angle de croix  $\psi_P = 72^\circ$ . Dans cette disposition, la croix s'arrête sur un angle de rotation de  $\Delta\varphi = 120^\circ - 108^\circ = 12^\circ$ .
2. Croix à cinq branches avec entraînement à trois doigts disposés à angles variables :  $112^\circ$ ,  $130^\circ$  et  $118^\circ$ , fig. 6.86 à droite. L'angle d'entraînement pour une croix régulière est aussi  $\varphi_P = 108^\circ$  et l'angle de croix  $\psi_P = 72^\circ$ . Dans cette disposition, la croix s'arrête sur des angles de rotation :  $\Delta\varphi_1 = 112^\circ - 108^\circ = 4^\circ$ ,  $\Delta\varphi_2 = 130^\circ - 108^\circ = 22^\circ$  et  $\Delta\varphi_3 = 118^\circ - 108^\circ = 10^\circ$ .

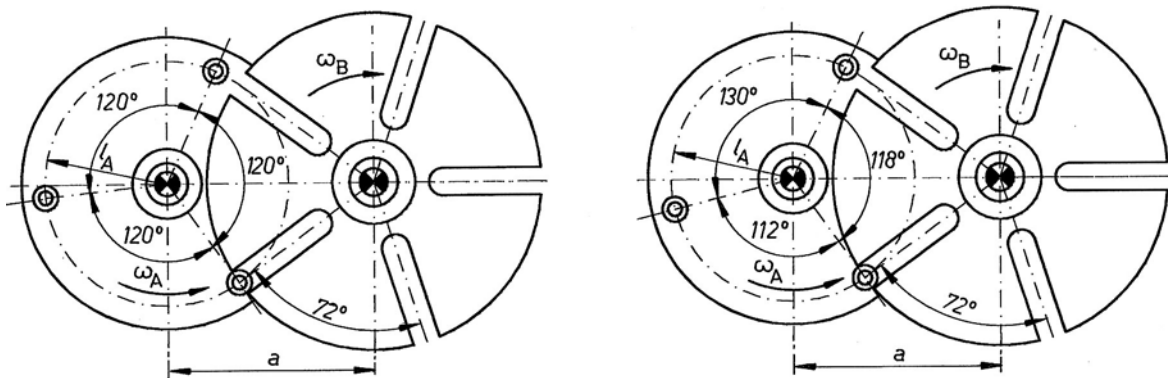


Figure 17.47 Croix de Malte à cinq branches avec trois doigts d'entraînement disposés régulièrement et irrégulièrement (le système d'arrêt n'est pas représenté)

3. Croix à nombre de branches pair et angle de croix variable. Sur la figure 17.48 à gauche, les angles de croix sont :  $\psi_{P1} = 80^\circ$  et  $\psi_{P2} = 100^\circ$ . Comme ces angles sont différents, les points  $A_1$  et  $A_2$  ne se déplacent pas sur les mêmes circonférences. Les angles de rotation de la partie motrice sont  $\varphi_{P1} = 100^\circ$  et  $\varphi_{P2} = 80^\circ$ . L'angle  $\Sigma$  comprend les angles de rotation et les angles d'arrêt de la croix :  $\Sigma = \varphi_{P1}/2 + \varphi_{\text{repos1}} + \varphi_{P2}/2$ .

2. Mécanismes à un doigt et  $n$  non entier

Il est également possible de prévoir un rapport fractionnaire entre les rotations de la croix et de la manivelle. La fig. 17.48 à droite montre un exemple de ce type. La croix possède 9 coulisses avec un angle  $\psi_P = 40^\circ$  et la manivelle un angle d'entraînement  $\varphi_P = 100^\circ$ . Ainsi, le

rapport des rotations est  $n = 4,5$ . La croix doit effectuer deux tours pour neuf rotations de la manivelle.

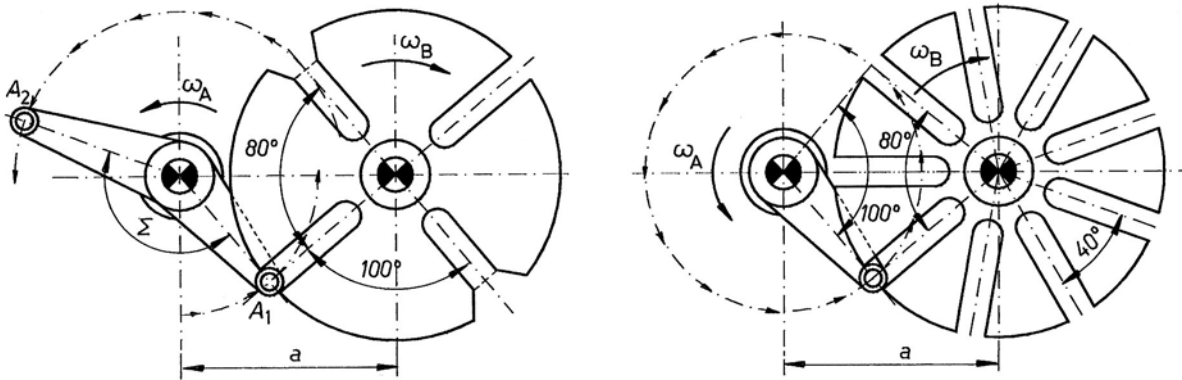


Figure 17.48 Croix de Malte à quatre branches avec angles de coulisse différents  
Croix de Malte à rapport fractionnaire  $n = 4,5$  (le système d'arrêt n'est pas représenté)

### 17.13.5.3 SYSTÈMES D'ARRÊT

La croix de Malte est généralement sollicitée par un ou plusieurs couples et doit rester immobile lorsque le doigt d'entraînement n'est pas en contact avec les faces de la coulisse. Ce mécanisme doit comprendre un système d'arrêt. Les principales variantes sont, figure 17.49 :

1. Cylindre d'arrêt interférant avec le profil de la croix de Malte,
2. Cylindre roulant sur des galets fixés sur la croix,
3. Mécanisme à came et à doigt d'arrêtage.

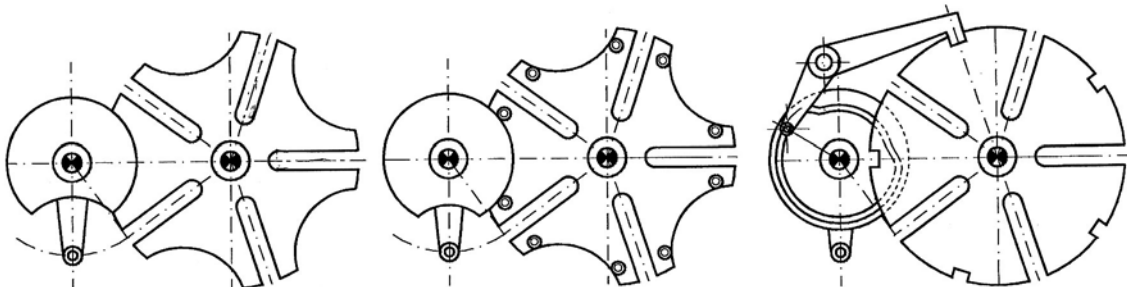


Figure 17.49 Systèmes d'arrêtage dans les mécanismes à croix de Malte extérieure

### 17.13.6 EFFORTS ET CONDITIONS DE TRANSMISSION

La recherche des dimensions à prévoir pour les diverses pièces constituant le mécanisme à croix de Malte nécessite la recherche des conditions de transmission entre la partie menante et l'arbre mené. Les efforts dépendent des couples appliqués et de l'inertie des pièces. Les sens des couples sont : couple moteur  $M_A$  identique à  $\omega_A$ , couple mené  $M_B$  opposé à  $\omega_B$ .

#### 17.13.6.1 PUISSANCES, COUPLES MENANT ET MENÉ

Le couple sur l'arbre mené se compose du couple statique, donné par les conditions imposées, et du couple dynamique à produire pour accélérer les masses en rotation. Le moment d'inertie de masse réduit  $J_B$  sur l'arbre mené vaut :

$$J_B = J_{B\text{croix}} + \Sigma J_{B\text{masse}},$$

avec :

- $J_{\text{Bcroix}}$  moment d'inertie de masse de la croix et de son arbre,
- $J_{\text{Bmasse}}$  moment d'inertie de toutes les autres masses placées après l'arbre mené.

Les couples sur l'arbre mené se trouvent par :

$$M_B = M_{\text{Bcharge}} + J_B \cdot \alpha_B, \quad (17.25.1)$$

avec :

- $M_{\text{Bcharge}}$  couple statique, donné sur l'arbre de la croix,
- $J_B \cdot \alpha_B$  couple dynamique provenant de la masse et de l'accélération angulaire.

La puissance à produire  $P_B$  sur cet arbre, tournant à la vitesse angulaire instantanée  $\omega_B$ , vaut :

$$P_B = M_B \cdot \omega_B.$$

En appliquant la conservation de la puissance  $P_B = P_A$ , donc en négligeant les pertes, le couple sur l'arbre moteur  $M_A$  devient :

$$M_A \cdot \omega_A = M_B \cdot \omega_B,$$

$$\text{d'où : } M_A = \frac{\omega_B}{\omega_A} \cdot M_B = \frac{\omega_B}{\omega_A} \cdot (M_{\text{Bcharge}} + J_B \cdot \alpha_B). \quad (17.25.2)$$

Cette relation peut se transformer aisément en valeurs relatives si la vitesse angulaire de l'arbre moteur est constante :  $\omega_A = \text{constante}$ . Divisons à gauche et à droite par  $\omega_A^2 \cdot J_B$  pour rendre le rapport non dimensionnel :

$$\frac{M_A}{\omega_A^2 \cdot J_B} = \psi' \left( \frac{M_{\text{Bcharge}}}{\omega_A^2 \cdot J_B} + \psi'' \right) \cdot \frac{1}{\eta} = \psi' (K + \psi'') \cdot \frac{1}{\eta}. \quad (17.25.3)$$

avec :  $K = M_{\text{Bcharge}} / \omega_A^2 \cdot J_B$ .

La partie droite doit être divisée par le rendement mécanique  $\eta_{\text{mec}}$  afin de trouver le couple réel en fonction des angles  $\phi$  ou  $\psi$ . Le rendement mécanique varie entre 0,75 pour des pièces centrées dans des paliers lisses et 0,95 pour des paliers à roulements.

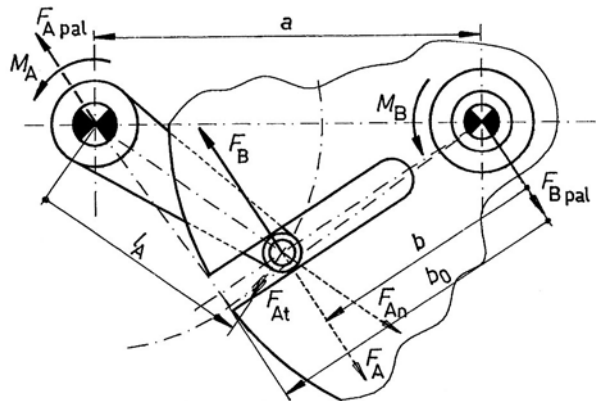
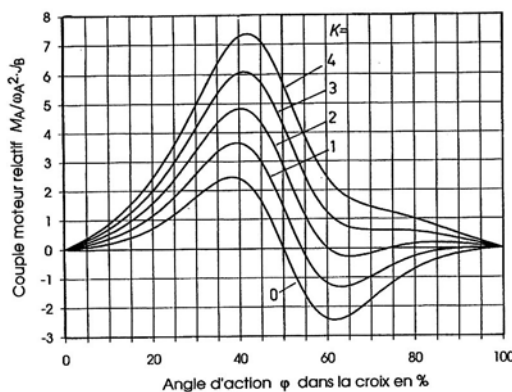


Figure 17.50 Couples relatifs sur l'arbre moteur pour une croix à 5 branches en fonction du rapport  $K$   
Forces et couples entre le doigt et la coulisse

### 17.13.6.2 EFFORTS ENTRE LE DOIGT ET LA COULISSE

Entre le doigt d'entraînement et la coulisse, les forces normales  $F_A$  et  $F_B$ , action et réaction, sont perpendiculaires à la direction de la coulisse en négligeant les pertes. La composante tangentielle sur la manivelle motrice  $F_{At}$  produit un moment sur l'arbre moteur égal au

couple  $M_A$  aux pertes près. La force  $F_B$  produit un moment sur l'arbre mené égal au couple  $M_B$ . En négligeant les pertes dans le mécanisme, il est possible d'écrire les égalités :

$$M_A = l_A \cdot F_{At} \quad M_B = b \cdot F_B \quad l_A \cdot F_{At} \cdot \omega_A = b \cdot F_B \cdot \omega_B.$$

La force normale sur le doigt est  $F_B$ . En supposant le même rendement que précédemment dans le mécanisme, cette force se trouve par :

$$F_B = \frac{\omega_A}{\omega_B} \cdot \frac{M_A}{b}, \quad (17.25.4)$$

avec  $M_A$  couple moteur tiré de la relation (17.25.3).

*Contrôles du mécanisme :*

Sont à contrôler : arbres menant et mené, liaisons arbres - moyeux, levier de la manivelle, pression entre le doigt et la coulisse, axe du doigt, fixation de la croix de Malte, pression ou durée de vie des paliers, couple  $M_A$  si possible à sens constant.

## LOIS NORMÉES POUR LES MOUVEMENTS DANS LES CAMES TABLES NUMÉRIQUES

Le calcul des lois normées nécessite la recherche des dérivées première et seconde des diverses lois proposées dans ce cours, dérivées à rechercher par rapport à la variable indépendante  $z$ . Afin de faciliter la comparaison des diverses lois, les pages suivantes contiennent les principales lois normées. L'incrément de la variable indépendante  $z$  est  $\Delta z = 0,01$ . Toutes les lois proposées sont à vitesses initiale et finale nulles.

### Lois polynomiales

1. Loi normée : Polynomiale  $P_3 - 4 - 5$   
Loi utilisée très fréquemment dans les mouvements composants.
2. Loi normée : Polynomiale  $P_3 - 4 - 5 - 6$   
Elle permet d'obtenir une accélération presque constante.
3. Loi normée : Polynomiale  $P_3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8$   
Loi encore meilleure dans la constance de l'accélération.

### Lois à composantes harmoniques

4. Loi normée : Sinoïde de Besthorn  
Loi utilisée fréquemment avec harmonique parfaitement connue.
5. *Loi normée : Sinusoïde avec troisième harmonique*  
Cette loi permet de diminuer l'accélération maximale.
6. Loi normée : Sinusoïde avec 3<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> harmonique  
Elle permet d'éviter les à-coups en début et fin de mouvement.

### Lois à comportements particuliers

7. Loi normée : Trapézoïdale – harmonique  
Cette loi est une modification heureuse de la loi trapézoïdale simple.
8. Loi normée : Couple optimal  
Loi permettant d'obtenir un couple optimal sur l'entraînement
9. Loi normée : Accélération optimale  
Loi permettant d'obtenir un effort optimal dans le mécanisme.

**LOI NORMÉE : POLYNOMIALE P 3-4-5**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	1.8750	0.0000
0.01	0.000010	0.0029	0.5821	0.51	0.518745	1.8735	-0.2999
0.02	0.000078	0.0115	1.1290	0.52	0.537460	1.8690	-0.5990
0.03	0.000258	0.0254	1.6412	0.53	0.556115	1.8615	-0.8968
0.04	0.000602	0.0442	2.1197	0.54	0.574681	1.8511	-1.1923
0.05	0.001158	0.0677	2.5650	0.55	0.593127	1.8377	-1.4850
0.06	0.001970	0.0954	2.9779	0.56	0.611425	1.8214	-1.7741
0.07	0.003080	0.1271	3.3592	0.57	0.629545	1.8022	-2.0588
0.08	0.004525	0.1625	3.7094	0.58	0.647460	1.7802	-2.3386
0.09	0.006341	0.2012	4.0295	0.59	0.665140	1.7555	-2.6125
0.10	0.008560	0.2430	4.3200	0.60	0.682560	1.7280	-2.8800
0.11	0.011210	0.2875	4.5817	0.61	0.699692	1.6979	-3.1403
0.12	0.014319	0.3345	4.8154	0.62	0.716509	1.6652	-3.3926
0.13	0.017909	0.3837	5.0216	0.63	0.732988	1.6301	-3.6364
0.14	0.022000	0.4349	5.2013	0.64	0.749103	1.5925	-3.8707
0.15	0.026612	0.4877	5.3550	0.65	0.764831	1.5527	-4.0950
0.16	0.031759	0.5419	5.4835	0.66	0.780149	1.5107	-4.3085
0.17	0.037454	0.5973	5.5876	0.67	0.795037	1.4666	-4.5104
0.18	0.043707	0.6536	5.6678	0.68	0.809474	1.4205	-4.7002
0.19	0.050528	0.7106	5.7251	0.69	0.823441	1.3726	-4.8769
0.20	0.057920	0.7680	5.7600	0.70	0.836920	1.3230	-5.0400
0.21	0.065888	0.8257	5.7733	0.71	0.849895	1.2718	-5.1887
0.22	0.074434	0.8834	5.7658	0.72	0.862352	1.2193	-5.3222
0.23	0.083556	0.9409	5.7380	0.73	0.874277	1.1655	-5.4400
0.24	0.093251	0.9981	5.6909	0.74	0.885658	1.1105	-5.5411
0.25	0.103516	1.0547	5.6250	0.75	0.896484	1.0547	-5.6250
0.26	0.114342	1.1105	5.5411	0.76	0.906749	0.9981	-5.6909
0.27	0.125723	1.1655	5.4400	0.77	0.916444	0.9409	-5.7380
0.28	0.137648	1.2193	5.3222	0.78	0.925566	0.8834	-5.7658
0.29	0.150105	1.2718	5.1887	0.79	0.934112	0.8257	-5.7733
0.30	0.163080	1.3230	5.0400	0.80	0.942080	0.7680	-5.7600
0.31	0.176559	1.3726	4.8769	0.81	0.949472	0.7106	-5.7251
0.32	0.190526	1.4205	4.7002	0.82	0.956293	0.6536	-5.6678
0.33	0.204963	1.4666	4.5104	0.83	0.962546	0.5973	-5.5876
0.34	0.219851	1.5107	4.3085	0.84	0.968241	0.5419	-5.4835
0.35	0.235169	1.5527	4.0950	0.85	0.973388	0.4877	-5.3550
0.36	0.250897	1.5925	3.8707	0.86	0.978000	0.4349	-5.2013
0.37	0.267012	1.6301	3.6364	0.87	0.982091	0.3837	-5.0216
0.38	0.283491	1.6652	3.3926	0.88	0.985681	0.3345	-4.8154
0.39	0.300308	1.6979	3.1403	0.89	0.988790	0.2875	-4.5817
0.40	0.317440	1.7280	2.8800	0.90	0.991440	0.2430	-4.3200
0.41	0.334860	1.7555	2.6125	0.91	0.993659	0.2012	-4.0295
0.42	0.352540	1.7802	2.3386	0.92	0.995475	0.1625	-3.7094
0.43	0.370455	1.8022	2.0588	0.93	0.996920	0.1271	-3.3592
0.44	0.388575	1.8214	1.7741	0.94	0.998030	0.0954	-2.9779
0.45	0.406873	1.8377	1.4850	0.95	0.998842	0.0677	-2.5650
0.46	0.425319	1.8511	1.1923	0.96	0.999398	0.0442	-2.1197
0.47	0.443885	1.8615	0.8968	0.97	0.999742	0.0254	-1.6412
0.48	0.462540	1.8690	0.5990	0.98	0.999922	0.0115	-1.1290
0.49	0.481255	1.8735	0.2999	0.99	0.999990	0.0029	-0.5821
0.50	0.500000	1.8750	0.0000	1.00	1.000000	0.0000	0.0000



**LOI NORMÉE : POLYNOMIALE P 3-4-5-6**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	2.0000	0.0000
0.01	0.000013	0.0038	0.7533	0.51	0.519987	1.9962	-0.7533
0.02	0.000100	0.0148	1.4180	0.52	0.539900	1.9852	-1.4180
0.03	0.000329	0.0319	2.0015	0.53	0.559671	1.9681	-2.0015
0.04	0.000757	0.0546	2.5106	0.54	0.579243	1.9454	-2.5106
0.05	0.001436	0.0819	2.9520	0.55	0.598564	1.9181	-2.9520
0.06	0.002409	0.1134	3.3319	0.56	0.617591	1.8866	-3.3319
0.07	0.003715	0.1484	3.6563	0.57	0.636285	1.8516	-3.6563
0.08	0.005387	0.1863	3.9309	0.58	0.654613	1.8137	-3.9309
0.09	0.007451	0.2268	4.1611	0.59	0.672549	1.7732	-4.1611
0.10	0.009931	0.2694	4.3520	0.60	0.690069	1.7306	-4.3520
0.11	0.012845	0.3138	4.5083	0.61	0.707155	1.6862	-4.5083
0.12	0.016211	0.3595	4.6344	0.62	0.723789	1.6405	-4.6344
0.13	0.020039	0.4064	4.7346	0.63	0.739961	1.5936	-4.7346
0.14	0.024341	0.4541	4.8126	0.64	0.755659	1.5459	-4.8126
0.15	0.029124	0.5026	4.8720	0.65	0.770876	1.4974	-4.8720
0.16	0.034394	0.5515	4.9160	0.66	0.785606	1.4485	-4.9160
0.17	0.040155	0.6008	4.9476	0.67	0.799845	1.3992	-4.9476
0.18	0.046412	0.6504	4.9693	0.68	0.813588	1.3496	-4.9693
0.19	0.053165	0.7002	4.9834	0.69	0.826835	1.2998	-4.9834
0.20	0.060416	0.7501	4.9920	0.70	0.839584	1.2499	-4.9920
0.21	0.068166	0.8000	4.9967	0.71	0.851834	1.2000	-4.9967
0.22	0.076417	0.8500	4.9990	0.72	0.863583	1.1500	-4.9990
0.23	0.085167	0.9000	4.9998	0.73	0.874833	1.1000	-4.9998
0.24	0.094417	0.9500	5.0000	0.74	0.885583	1.0500	-5.0000
0.25	0.104167	1.0000	5.0000	0.75	0.895833	1.0000	-5.0000
0.26	0.114417	1.0500	5.0000	0.76	0.905583	0.9500	-5.0000
0.27	0.125167	1.1000	4.9998	0.77	0.914833	0.9000	-4.9998
0.28	0.136417	1.1500	4.9990	0.78	0.923583	0.8500	-4.9990
0.29	0.148166	1.2000	4.9967	0.79	0.931834	0.8000	-4.9967
0.30	0.160416	1.2499	4.9920	0.80	0.939584	0.7501	-4.9920
0.31	0.173165	1.2998	4.9834	0.81	0.946835	0.7002	-4.9834
0.32	0.186412	1.3496	4.9693	0.82	0.953588	0.6504	-4.9693
0.33	0.200155	1.3992	4.9476	0.83	0.959845	0.6008	-4.9476
0.34	0.214394	1.4485	4.9160	0.84	0.965606	0.5515	-4.9160
0.35	0.229124	1.4974	4.8720	0.85	0.970876	0.5026	-4.8720
0.36	0.244341	1.5459	4.8126	0.86	0.975659	0.4541	-4.8126
0.37	0.260039	1.5936	4.7346	0.87	0.979961	0.4064	-4.7346
0.38	0.276211	1.6405	4.6344	0.88	0.983789	0.3595	-4.6344
0.39	0.292845	1.6862	4.5083	0.89	0.987155	0.3138	-4.5083
0.40	0.309931	1.7306	4.3520	0.90	0.990069	0.2694	-4.3520
0.41	0.327451	1.7732	4.1611	0.91	0.992549	0.2268	-4.1611
0.42	0.345387	1.8137	3.9309	0.92	0.994613	0.1863	-3.9309
0.43	0.363715	1.8516	3.6563	0.93	0.996285	0.1484	-3.6563
0.44	0.382409	1.8866	3.3319	0.94	0.997591	0.1134	-3.3319
0.45	0.401436	1.9181	2.9520	0.95	0.998564	0.0819	-2.9520
0.46	0.420757	1.9454	2.5106	0.96	0.999243	0.0546	-2.5106
0.47	0.440329	1.9681	2.0015	0.97	0.999671	0.0319	-2.0015
0.48	0.460100	1.9852	1.4180	0.98	0.999900	0.0148	-1.4180
0.49	0.480013	1.9962	0.7533	0.99	0.999987	0.0038	-0.7533
0.50	0.500000	2.0000	0.0000	1.00	1.000000	0.0000	-0.0000

**LOI NORMÉE : POLYNOMIALE P 3-4-5-6-7-8**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	2.0000	0.0000
0.01	0.000018	0.0052	1.0138	0.51	0.519982	1.9948	-1.0138
0.02	0.000135	0.0196	1.8370	0.52	0.539865	1.9804	-1.8370
0.03	0.000435	0.0414	2.4994	0.53	0.559565	1.9586	-2.4994
0.04	0.000984	0.0692	3.0273	0.54	0.579016	1.9308	-3.0273
0.05	0.001835	0.1016	3.4433	0.55	0.598165	1.8984	-3.4433
0.06	0.003029	0.1377	3.7674	0.56	0.616971	1.8623	-3.7674
0.07	0.004599	0.1767	4.0165	0.57	0.635401	1.8233	-4.0165
0.08	0.006570	0.2179	4.2053	0.58	0.653430	1.7821	-4.2053
0.09	0.008962	0.2607	4.3460	0.59	0.671038	1.7393	-4.3460
0.10	0.011788	0.3047	4.4489	0.60	0.688212	1.6953	-4.4489
0.11	0.015058	0.3495	4.5227	0.61	0.704942	1.6505	-4.5227
0.12	0.018780	0.3950	4.5744	0.62	0.721220	1.6050	-4.5744
0.13	0.022960	0.4410	4.6096	0.63	0.737040	1.5590	-4.6096
0.14	0.027601	0.4872	4.6328	0.64	0.752399	1.5128	-4.6328
0.15	0.032705	0.5336	4.6476	0.65	0.767295	1.4664	-4.6476
0.16	0.038274	0.5801	4.6565	0.66	0.781726	1.4199	-4.6565
0.17	0.044308	0.6267	4.6617	0.67	0.795692	1.3733	-4.6617
0.18	0.050808	0.6734	4.6644	0.68	0.809192	1.3266	-4.6644
0.19	0.057775	0.7200	4.6658	0.69	0.822225	1.2800	-4.6658
0.20	0.065208	0.7667	4.6664	0.70	0.834792	1.2333	-4.6664
0.21	0.073108	0.8133	4.6666	0.71	0.846892	1.1867	-4.6666
0.22	0.081475	0.8600	4.6667	0.72	0.858525	1.1400	-4.6667
0.23	0.090308	0.9067	4.6667	0.73	0.869692	1.0933	-4.6667
0.24	0.099608	0.9533	4.6667	0.74	0.880392	1.0467	-4.6667
0.25	0.109375	1.0000	4.6667	0.75	0.890625	1.0000	-4.6667
0.26	0.119608	1.0467	4.6667	0.76	0.900392	0.9533	-4.6667
0.27	0.130308	1.0933	4.6667	0.77	0.909692	0.9067	-4.6667
0.28	0.141475	1.1400	4.6667	0.78	0.918525	0.8600	-4.6667
0.29	0.153108	1.1867	4.6666	0.79	0.926892	0.8133	-4.6666
0.30	0.165208	1.2333	4.6664	0.80	0.934792	0.7667	-4.6664
0.31	0.177775	1.2800	4.6658	0.81	0.942225	0.7200	-4.6658
0.32	0.190808	1.3266	4.6644	0.82	0.949192	0.6734	-4.6644
0.33	0.204308	1.3733	4.6617	0.83	0.955692	0.6267	-4.6617
0.34	0.218274	1.4199	4.6565	0.84	0.961726	0.5801	-4.6565
0.35	0.232705	1.4664	4.6476	0.85	0.967295	0.5336	-4.6476
0.36	0.247601	1.5128	4.6328	0.86	0.972399	0.4872	-4.6328
0.37	0.262960	1.5590	4.6096	0.87	0.977040	0.4410	-4.6096
0.38	0.278780	1.6050	4.5744	0.88	0.981220	0.3950	-4.5744
0.39	0.295058	1.6505	4.5227	0.89	0.984942	0.3495	-4.5227
0.40	0.311788	1.6953	4.4489	0.90	0.988212	0.3047	-4.4489
0.41	0.328962	1.7393	4.3460	0.91	0.991038	0.2607	-4.3460
0.42	0.346570	1.7821	4.2053	0.92	0.993430	0.2179	-4.2053
0.43	0.364599	1.8233	4.0165	0.93	0.995401	0.1767	-4.0165
0.44	0.383029	1.8623	3.7674	0.94	0.996971	0.1377	-3.7674
0.45	0.401835	1.8984	3.4433	0.95	0.998165	0.1016	-3.4433
0.46	0.420984	1.9308	3.0273	0.96	0.999016	0.0692	-3.0273
0.47	0.440435	1.9586	2.4994	0.97	0.999565	0.0414	-2.4994
0.48	0.460135	1.9804	1.8370	0.98	0.999865	0.0196	-1.8370
0.49	0.480018	1.9948	1.0138	0.99	0.999982	0.0052	-1.0138
0.50	0.500000	2.0000	0.0000	1.00	1.000000	0.0000	-0.0000

**LOI NORMÉE : SINOÏDE DE BESTEHORN**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	2.0000	-0.0000
0.01	0.000007	0.0020	0.3945	0.51	0.519993	1.9980	-0.3945
0.02	0.000053	0.0079	0.7875	0.52	0.539947	1.9921	-0.7875
0.03	0.000177	0.0177	1.1774	0.53	0.559823	1.9823	-1.1774
0.04	0.000420	0.0314	1.5626	0.54	0.579580	1.9686	-1.5626
0.05	0.000818	0.0489	1.9416	0.55	0.599182	1.9511	-1.9416
0.06	0.001411	0.0702	2.3130	0.56	0.618589	1.9298	-2.3130
0.07	0.002235	0.0952	2.6753	0.57	0.637765	1.9048	-2.6753
0.08	0.003327	0.1237	3.0269	0.58	0.656673	1.8763	-3.0269
0.09	0.004721	0.1557	3.3667	0.59	0.675279	1.8443	-3.3667
0.10	0.006451	0.1910	3.6932	0.60	0.693549	1.8090	-3.6932
0.11	0.008551	0.2295	4.0051	0.61	0.711449	1.7705	-4.0051
0.12	0.011051	0.2710	4.3011	0.62	0.728949	1.7290	-4.3011
0.13	0.013981	0.3155	4.5802	0.63	0.746019	1.6845	-4.5802
0.14	0.017369	0.3626	4.8413	0.64	0.762631	1.6374	-4.8413
0.15	0.021241	0.4122	5.0832	0.65	0.778759	1.5878	-5.0832
0.16	0.025621	0.4642	5.3051	0.66	0.794379	1.5358	-5.3051
0.17	0.030531	0.5182	5.5060	0.67	0.809469	1.4818	-5.5060
0.18	0.035992	0.5742	5.6852	0.68	0.824008	1.4258	-5.6852
0.19	0.042021	0.6319	5.8420	0.69	0.837979	1.3681	-5.8420
0.20	0.048635	0.6910	5.9757	0.70	0.851365	1.3090	-5.9757
0.21	0.055845	0.7513	6.0858	0.71	0.864155	1.2487	-6.0858
0.22	0.063664	0.8126	6.1719	0.72	0.876336	1.1874	-6.1719
0.23	0.072100	0.8747	6.2336	0.73	0.887900	1.1253	-6.2336
0.24	0.081159	0.9372	6.2708	0.74	0.898841	1.0628	-6.2708
0.25	0.090845	1.0000	6.2832	0.75	0.909155	1.0000	-6.2832
0.26	0.101159	1.0628	6.2708	0.76	0.918841	0.9372	-6.2708
0.27	0.112100	1.1253	6.2336	0.77	0.927900	0.8747	-6.2336
0.28	0.123664	1.1874	6.1719	0.78	0.936336	0.8126	-6.1719
0.29	0.135845	1.2487	6.0858	0.79	0.944155	0.7513	-6.0858
0.30	0.148635	1.3090	5.9757	0.80	0.951365	0.6910	-5.9757
0.31	0.162021	1.3681	5.8420	0.81	0.957979	0.6319	-5.8420
0.32	0.175992	1.4258	5.6852	0.82	0.964008	0.5742	-5.6852
0.33	0.190531	1.4818	5.5060	0.83	0.969469	0.5182	-5.5060
0.34	0.205621	1.5358	5.3051	0.84	0.974379	0.4642	-5.3051
0.35	0.221241	1.5878	5.0832	0.85	0.978759	0.4122	-5.0832
0.36	0.237369	1.6374	4.8413	0.86	0.982631	0.3626	-4.8413
0.37	0.253981	1.6845	4.5802	0.87	0.986019	0.3155	-4.5802
0.38	0.271051	1.7290	4.3011	0.88	0.988949	0.2710	-4.3011
0.39	0.288551	1.7705	4.0051	0.89	0.991449	0.2295	-4.0051
0.40	0.306451	1.8090	3.6932	0.90	0.993549	0.1910	-3.6932
0.41	0.324721	1.8443	3.3667	0.91	0.995279	0.1557	-3.3667
0.42	0.343327	1.8763	3.0269	0.92	0.996673	0.1237	-3.0269
0.43	0.362235	1.9048	2.6753	0.93	0.997765	0.0952	-2.6753
0.44	0.381411	1.9298	2.3130	0.94	0.998589	0.0702	-2.3130
0.45	0.400818	1.9511	1.9416	0.95	0.999182	0.0489	-1.9416
0.46	0.420420	1.9686	1.5626	0.96	0.999580	0.0314	-1.5626
0.47	0.440177	1.9823	1.1774	0.97	0.999823	0.0177	-1.1774
0.48	0.460053	1.9921	0.7875	0.98	0.999947	0.0079	-0.7875
0.49	0.480007	1.9980	0.3945	0.99	0.999993	0.0020	-0.3945
0.50	0.500000	2.0000	-0.0000	1.00	1.000000	0.0000	0.0000

**LOI NORMÉE : SINUSOÏDE AVEC 3ème HARMONIQUE**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	2.0000	-0.0000
0.01	0.000010	0.0030	0.5906	0.51	0.519990	1.9970	-0.5906
0.02	0.000079	0.0118	1.1720	0.52	0.539921	1.9882	-1.1720
0.03	0.000265	0.0263	1.7350	0.53	0.559735	1.9737	-1.7350
0.04	0.000624	0.0464	2.2714	0.54	0.579376	1.9536	-2.2714
0.05	0.001210	0.0716	2.7734	0.55	0.598790	1.9284	-2.7734
0.06	0.002073	0.1017	3.2344	0.56	0.617927	1.8983	-3.2344
0.07	0.003259	0.1362	3.6491	0.57	0.636741	1.8638	-3.6491
0.08	0.004809	0.1745	4.0135	0.58	0.655191	1.8255	-4.0135
0.09	0.006761	0.2163	4.3251	0.59	0.673239	1.7837	-4.3251
0.10	0.009144	0.2609	4.5828	0.60	0.690856	1.7391	-4.5828
0.11	0.011986	0.3078	4.7871	0.61	0.708014	1.6922	-4.7871
0.12	0.015305	0.3564	4.9401	0.62	0.724695	1.6436	-4.9401
0.13	0.019119	0.4064	5.0449	0.63	0.740881	1.5936	-5.0449
0.14	0.023436	0.4572	5.1063	0.64	0.756564	1.5428	-5.1063
0.15	0.028264	0.5084	5.1296	0.65	0.771736	1.4916	-5.1296
0.16	0.033604	0.5597	5.1212	0.66	0.786396	1.4403	-5.1212
0.17	0.039456	0.6107	5.0879	0.67	0.800544	1.3893	-5.0879
0.18	0.045817	0.6614	5.0369	0.68	0.814183	1.3386	-5.0369
0.19	0.052682	0.7114	4.9752	0.69	0.827318	1.2886	-4.9752
0.20	0.060044	0.7609	4.9097	0.70	0.839956	1.2391	-4.9097
0.21	0.067897	0.8096	4.8466	0.71	0.852103	1.1904	-4.8466
0.22	0.076235	0.8578	4.7914	0.72	0.863765	1.1422	-4.7914
0.23	0.085052	0.9055	4.7487	0.73	0.874948	1.0945	-4.7487
0.24	0.094344	0.9528	4.7216	0.74	0.885656	1.0472	-4.7216
0.25	0.104108	1.0000	4.7124	0.75	0.895892	1.0000	-4.7124
0.26	0.114344	1.0472	4.7216	0.76	0.905656	0.9528	-4.7216
0.27	0.125052	1.0945	4.7487	0.77	0.914948	0.9055	-4.7487
0.28	0.136235	1.1422	4.7914	0.78	0.923765	0.8578	-4.7914
0.29	0.147897	1.1904	4.8466	0.79	0.932103	0.8096	-4.8466
0.30	0.160044	1.2391	4.9097	0.80	0.939956	0.7609	-4.9097
0.31	0.172682	1.2886	4.9752	0.81	0.947318	0.7114	-4.9752
0.32	0.185817	1.3386	5.0369	0.82	0.954183	0.6614	-5.0369
0.33	0.199456	1.3893	5.0879	0.83	0.960544	0.6107	-5.0879
0.34	0.213604	1.4403	5.1212	0.84	0.966396	0.5597	-5.1212
0.35	0.228264	1.4916	5.1296	0.85	0.971736	0.5084	-5.1296
0.36	0.243436	1.5428	5.1063	0.86	0.976564	0.4572	-5.1063
0.37	0.259119	1.5936	5.0449	0.87	0.980881	0.4064	-5.0449
0.38	0.275305	1.6436	4.9401	0.88	0.984695	0.3564	-4.9401
0.39	0.291986	1.6922	4.7871	0.89	0.988014	0.3078	-4.7871
0.40	0.309144	1.7391	4.5828	0.90	0.990856	0.2609	-4.5828
0.41	0.326761	1.7837	4.3251	0.91	0.993239	0.2163	-4.3251
0.42	0.344809	1.8255	4.0135	0.92	0.995191	0.1745	-4.0135
0.43	0.363259	1.8638	3.6491	0.93	0.996741	0.1362	-3.6491
0.44	0.382073	1.8983	3.2344	0.94	0.997927	0.1017	-3.2344
0.45	0.401210	1.9284	2.7734	0.95	0.998790	0.0716	-2.7734
0.46	0.420624	1.9536	2.2714	0.96	0.999376	0.0464	-2.2714
0.47	0.440265	1.9737	1.7350	0.97	0.999735	0.0263	-1.7350
0.48	0.460079	1.9882	1.1720	0.98	0.999921	0.0118	-1.1720
0.49	0.480010	1.9970	0.5906	0.99	0.999990	0.0030	-0.5906
0.50	0.500000	2.0000	-0.0000	1.00	1.000000	0.0000	0.0000

**LOI NORMÉE : SINUSOÏDE AVEC 3 & 5ème HARMONIQUES**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	2.0000	-0.0000
0.01	0.000000	0.0000	0.0058	0.51	0.520000	2.0000	-0.0058
0.02	0.000001	0.0002	0.0458	0.52	0.539999	1.9998	-0.0458
0.03	0.000007	0.0011	0.1509	0.53	0.559993	1.9989	-0.1509
0.04	0.000029	0.0035	0.3456	0.54	0.579971	1.9965	-0.3456
0.05	0.000086	0.0084	0.6455	0.55	0.599914	1.9916	-0.6455
0.06	0.000209	0.0168	1.0560	0.56	0.619791	1.9832	-1.0560
0.07	0.000438	0.0299	1.5714	0.57	0.639562	1.9701	-1.5714
0.08	0.000825	0.0486	2.1759	0.58	0.659175	1.9514	-2.1759
0.09	0.001431	0.0736	2.8443	0.59	0.678569	1.9264	-2.8443
0.10	0.002321	0.1055	3.5450	0.60	0.697679	1.8945	-3.5450
0.11	0.003565	0.1445	4.2428	0.61	0.716435	1.8555	-4.2428
0.12	0.005233	0.1903	4.9019	0.62	0.734767	1.8097	-4.9019
0.13	0.007391	0.2423	5.4896	0.63	0.752609	1.7577	-5.4896
0.14	0.010098	0.2997	5.9791	0.64	0.769902	1.7003	-5.9791
0.15	0.013401	0.3615	6.3519	0.65	0.786599	1.6385	-6.3519
0.16	0.017338	0.4264	6.5995	0.66	0.802662	1.5736	-6.5995
0.17	0.021934	0.4931	6.7238	0.67	0.818066	1.5069	-6.7238
0.18	0.027201	0.5605	6.7369	0.68	0.832799	1.4395	-6.7369
0.19	0.033142	0.6275	6.6595	0.69	0.846858	1.3725	-6.6595
0.20	0.039748	0.6934	6.5189	0.70	0.860252	1.3066	-6.5189
0.21	0.047005	0.7578	6.3457	0.71	0.872995	1.2422	-6.3457
0.22	0.054897	0.8203	6.1711	0.72	0.885103	1.1797	-6.1711
0.23	0.063407	0.8813	6.0233	0.73	0.896593	1.1187	-6.0233
0.24	0.072519	0.9410	5.9249	0.74	0.907481	1.0590	-5.9249
0.25	0.082224	1.0000	5.8905	0.75	0.917776	1.0000	-5.8905
0.26	0.092519	1.0590	5.9249	0.76	0.927481	0.9410	-5.9249
0.27	0.103407	1.1187	6.0233	0.77	0.936593	0.8813	-6.0233
0.28	0.114897	1.1797	6.1711	0.78	0.945103	0.8203	-6.1711
0.29	0.127005	1.2422	6.3457	0.79	0.952995	0.7578	-6.3457
0.30	0.139748	1.3066	6.5189	0.80	0.960252	0.6934	-6.5189
0.31	0.153142	1.3725	6.6595	0.81	0.966858	0.6275	-6.6595
0.32	0.167201	1.4395	6.7369	0.82	0.972799	0.5605	-6.7369
0.33	0.181934	1.5069	6.7238	0.83	0.978066	0.4931	-6.7238
0.34	0.197338	1.5736	6.5995	0.84	0.982662	0.4264	-6.5995
0.35	0.213401	1.6385	6.3519	0.85	0.986599	0.3615	-6.3519
0.36	0.230098	1.7003	5.9791	0.86	0.989902	0.2997	-5.9791
0.37	0.247391	1.7577	5.4896	0.87	0.992609	0.2423	-5.4896
0.38	0.265233	1.8097	4.9019	0.88	0.994767	0.1903	-4.9019
0.39	0.283565	1.8555	4.2428	0.89	0.996435	0.1445	-4.2428
0.40	0.302321	1.8945	3.5450	0.90	0.997679	0.1055	-3.5450
0.41	0.321431	1.9264	2.8443	0.91	0.998569	0.0736	-2.8443
0.42	0.340825	1.9514	2.1759	0.92	0.999175	0.0486	-2.1759
0.43	0.360438	1.9701	1.5714	0.93	0.999562	0.0299	-1.5714
0.44	0.380209	1.9832	1.0560	0.94	0.999791	0.0168	-1.0560
0.45	0.400086	1.9916	0.6455	0.95	0.999914	0.0084	-0.6455
0.46	0.420029	1.9965	0.3456	0.96	0.999971	0.0035	-0.3456
0.47	0.440007	1.9989	0.1509	0.97	0.999993	0.0011	-0.1509
0.48	0.460001	1.9998	0.0458	0.98	0.999999	0.0002	-0.0458
0.49	0.480000	2.0000	0.0058	0.99	1.000000	0.0000	-0.0058
0.50	0.500000	2.0000	-0.0000	1.00	1.000000	0.0000	0.0000

**LOI NORMÉE : TRAPÉZOÏDALE + HARMONIQUE**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	2.0000	0.0000
0.01	0.000010	0.0031	0.6126	0.51	0.519990	1.9969	-0.6126
0.02	0.000082	0.0122	1.2156	0.52	0.539918	1.9878	-1.2156
0.03	0.000274	0.0273	1.7994	0.53	0.559726	1.9727	-1.7994
0.04	0.000647	0.0481	2.3549	0.54	0.579353	1.9519	-2.3549
0.05	0.001255	0.0743	2.8732	0.55	0.598745	1.9257	-2.8732
0.06	0.002149	0.1054	3.3462	0.56	0.617851	1.8946	-3.3462
0.07	0.003378	0.1410	3.7664	0.57	0.636622	1.8590	-3.7664
0.08	0.004983	0.1806	4.1272	0.58	0.655017	1.8194	-4.1272
0.09	0.007000	0.2234	4.4229	0.59	0.673000	1.7766	-4.4229
0.10	0.009459	0.2688	4.6489	0.60	0.690541	1.7312	-4.6489
0.11	0.012382	0.3161	4.8015	0.61	0.707618	1.6839	-4.8015
0.12	0.015785	0.3646	4.8785	0.62	0.724215	1.6354	-4.8785
0.13	0.019675	0.4134	4.8881	0.63	0.740325	1.5866	-4.8881
0.14	0.024053	0.4623	4.8881	0.64	0.755947	1.5377	-4.8881
0.15	0.028921	0.5112	4.8881	0.65	0.771079	1.4888	-4.8881
0.16	0.034277	0.5601	4.8881	0.66	0.785723	1.4399	-4.8881
0.17	0.040122	0.6090	4.8881	0.67	0.799878	1.3910	-4.8881
0.18	0.046456	0.6578	4.8881	0.68	0.813544	1.3422	-4.8881
0.19	0.053279	0.7067	4.8881	0.69	0.826721	1.2933	-4.8881
0.20	0.060590	0.7556	4.8881	0.70	0.839410	1.2444	-4.8881
0.21	0.068391	0.8045	4.8881	0.71	0.851609	1.1955	-4.8881
0.22	0.076680	0.8534	4.8881	0.72	0.863320	1.1466	-4.8881
0.23	0.085458	0.9022	4.8881	0.73	0.874542	1.0978	-4.8881
0.24	0.094725	0.9511	4.8881	0.74	0.885275	1.0489	-4.8881
0.25	0.104480	1.0000	4.8881	0.75	0.895520	1.0000	-4.8881
0.26	0.114725	1.0489	4.8881	0.76	0.905275	0.9511	-4.8881
0.27	0.125458	1.0978	4.8881	0.77	0.914542	0.9022	-4.8881
0.28	0.136680	1.1466	4.8881	0.78	0.923320	0.8534	-4.8881
0.29	0.148391	1.1955	4.8881	0.79	0.931609	0.8045	-4.8881
0.30	0.160590	1.2444	4.8881	0.80	0.939410	0.7556	-4.8881
0.31	0.173279	1.2933	4.8881	0.81	0.946721	0.7067	-4.8881
0.32	0.186456	1.3422	4.8881	0.82	0.953544	0.6578	-4.8881
0.33	0.200122	1.3910	4.8881	0.83	0.959878	0.6090	-4.8881
0.34	0.214277	1.4399	4.8881	0.84	0.965723	0.5601	-4.8881
0.35	0.228921	1.4888	4.8881	0.85	0.971079	0.5112	-4.8881
0.36	0.244053	1.5377	4.8881	0.86	0.975947	0.4623	-4.8881
0.37	0.259675	1.5866	4.8881	0.87	0.980325	0.4134	-4.8881
0.38	0.275785	1.6354	4.8785	0.88	0.984215	0.3646	-4.8785
0.39	0.292382	1.6839	4.8015	0.89	0.987618	0.3161	-4.8015
0.40	0.309459	1.7312	4.6489	0.90	0.990541	0.2688	-4.6489
0.41	0.327000	1.7766	4.4229	0.91	0.993000	0.2234	-4.4229
0.42	0.344983	1.8194	4.1272	0.92	0.995017	0.1806	-4.1272
0.43	0.363378	1.8590	3.7664	0.93	0.996622	0.1410	-3.7664
0.44	0.382149	1.8946	3.3462	0.94	0.997851	0.1054	-3.3462
0.45	0.401255	1.9257	2.8732	0.95	0.998745	0.0743	-2.8732
0.46	0.420647	1.9519	2.3549	0.96	0.999353	0.0481	-2.3549
0.47	0.440274	1.9727	1.7994	0.97	0.999726	0.0273	-1.7994
0.48	0.460082	1.9878	1.2156	0.98	0.999918	0.0122	-1.2156
0.49	0.480010	1.9969	0.6126	0.99	0.999990	0.0031	-0.6126
0.50	0.500000	2.0000	0.0000	1.00	1.000000	0.0000	-0.0000

**LOI NORMÉE : COUPLE OPTIMAL**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	1.7637	0.0000
0.01	0.000010	0.0030	0.6065	0.51	0.517633	1.7626	-0.2068
0.02	0.000081	0.0121	1.2049	0.52	0.535246	1.7595	-0.4136
0.03	0.000272	0.0271	1.7875	0.53	0.552817	1.7544	-0.6207
0.04	0.000642	0.0478	2.3468	0.54	0.570326	1.7471	-0.8282
0.05	0.001246	0.0739	2.8764	0.55	0.587752	1.7378	-1.0360
0.06	0.002137	0.1052	3.3706	0.56	0.605075	1.7264	-1.2444
0.07	0.003365	0.1412	3.8249	0.57	0.622273	1.7129	-1.4533
0.08	0.004975	0.1815	4.2357	0.58	0.639326	1.6973	-1.6628
0.09	0.007009	0.2258	4.6006	0.59	0.656213	1.6796	-1.8730
0.10	0.009502	0.2734	4.9183	0.60	0.672912	1.6599	-2.0837
0.11	0.012486	0.3240	5.1886	0.61	0.689403	1.6380	-2.2950
0.12	0.015989	0.3770	5.4118	0.62	0.705665	1.6140	-2.5067
0.13	0.020033	0.4321	5.5894	0.63	0.721675	1.5878	-2.7187
0.14	0.024636	0.4886	5.7233	0.64	0.737414	1.5596	-2.9308
0.15	0.029810	0.5464	5.8158	0.65	0.752860	1.5292	-3.1426
0.16	0.035566	0.6048	5.8698	0.66	0.767992	1.4967	-3.3539
0.17	0.041908	0.6637	5.8882	0.67	0.782788	1.4621	-3.5641
0.18	0.048839	0.7225	5.8741	0.68	0.797228	1.4255	-3.7728
0.19	0.056357	0.7810	5.8307	0.69	0.811290	1.3867	-3.9792
0.20	0.064458	0.8390	5.7609	0.70	0.824955	1.3459	-4.1826
0.21	0.073135	0.8962	5.6678	0.71	0.838201	1.3031	-4.3820
0.22	0.082378	0.9523	5.5543	0.72	0.851009	1.2583	-4.5764
0.23	0.092177	1.0072	5.4229	0.73	0.863360	1.2116	-4.7646
0.24	0.102517	1.0607	5.2761	0.74	0.875234	1.1630	-4.9450
0.25	0.113386	1.1127	5.1161	0.75	0.886614	1.1127	-5.1161
0.26	0.124766	1.1630	4.9450	0.76	0.897483	1.0607	-5.2761
0.27	0.136640	1.2116	4.7646	0.77	0.907823	1.0072	-5.4229
0.28	0.148991	1.2583	4.5764	0.78	0.917622	0.9523	-5.5543
0.29	0.161799	1.3031	4.3820	0.79	0.926865	0.8962	-5.6678
0.30	0.175045	1.3459	4.1826	0.80	0.935542	0.8390	-5.7609
0.31	0.188710	1.3867	3.9792	0.81	0.943643	0.7810	-5.8307
0.32	0.202772	1.4255	3.7728	0.82	0.951161	0.7225	-5.8741
0.33	0.217212	1.4621	3.5641	0.83	0.958092	0.6637	-5.8882
0.34	0.232008	1.4967	3.3539	0.84	0.964434	0.6048	-5.8698
0.35	0.247140	1.5292	3.1426	0.85	0.970190	0.5464	-5.8158
0.36	0.262586	1.5596	2.9308	0.86	0.975364	0.4886	-5.7233
0.37	0.278325	1.5878	2.7187	0.87	0.979967	0.4321	-5.5894
0.38	0.294335	1.6140	2.5067	0.88	0.984011	0.3770	-5.4118
0.39	0.310597	1.6380	2.2950	0.89	0.987514	0.3240	-5.1886
0.40	0.327088	1.6599	2.0837	0.90	0.990498	0.2734	-4.9183
0.41	0.343787	1.6796	1.8730	0.91	0.992991	0.2258	-4.6006
0.42	0.360674	1.6973	1.6628	0.92	0.995025	0.1815	-4.2357
0.43	0.377727	1.7129	1.4533	0.93	0.996635	0.1412	-3.8249
0.44	0.394925	1.7264	1.2444	0.94	0.997863	0.1052	-3.3706
0.45	0.412248	1.7378	1.0360	0.95	0.998754	0.0739	-2.8764
0.46	0.429674	1.7471	0.8282	0.96	0.999358	0.0478	-2.3468
0.47	0.447183	1.7544	0.6207	0.97	0.999728	0.0271	-1.7875
0.48	0.464754	1.7595	0.4136	0.98	0.999919	0.0121	-1.2049
0.49	0.482367	1.7626	0.2068	0.99	0.999990	0.0030	-0.6065
0.50	0.500000	1.7637	0.0000	1.00	1.000000	0.0000	-0.0000

**LOI NORMÉE : ACCÉLÉRATION OPTIMALE**

$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$z$	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$
0.00	0.000000	0.0000	0.0000	0.50	0.500000	1.4184	0.0000
0.01	0.000032	0.0095	1.8937	0.51	0.514183	1.4181	-0.0590
0.02	0.000252	0.0373	3.6244	0.52	0.528361	1.4173	-0.1182
0.03	0.000832	0.0811	5.0662	0.53	0.542527	1.4158	-0.1778
0.04	0.001915	0.1375	6.1515	0.54	0.556675	1.4137	-0.2381
0.05	0.003611	0.2029	6.8719	0.55	0.570799	1.4110	-0.2994
0.06	0.005991	0.2738	7.2633	0.56	0.584893	1.4077	-0.3617
0.07	0.009095	0.3472	7.3852	0.57	0.598951	1.4038	-0.4255
0.08	0.012936	0.4208	7.3037	0.58	0.612966	1.3992	-0.4910
0.09	0.017506	0.4928	7.0797	0.59	0.626932	1.3939	-0.5585
0.10	0.022783	0.5621	6.7639	0.60	0.640843	1.3880	-0.6282
0.11	0.028737	0.6279	6.3954	0.61	0.654690	1.3814	-0.7005
0.12	0.035329	0.6899	6.0024	0.62	0.668468	1.3740	-0.7757
0.13	0.042522	0.7480	5.6044	0.63	0.682168	1.3659	-0.8542
0.14	0.050276	0.8021	5.2142	0.64	0.695782	1.3569	-0.9364
0.15	0.058551	0.8523	4.8399	0.65	0.709303	1.3471	-1.0228
0.16	0.067310	0.8989	4.4858	0.66	0.722721	1.3364	-1.1138
0.17	0.076517	0.9421	4.1542	0.67	0.736028	1.3248	-1.2100
0.18	0.086141	0.9821	3.8456	0.68	0.749214	1.3122	-1.3119
0.19	0.096149	1.0191	3.5596	0.69	0.762269	1.2986	-1.4202
0.20	0.106513	1.0533	3.2953	0.70	0.775182	1.2838	-1.5356
0.21	0.117207	1.0851	3.0513	0.71	0.787941	1.2678	-1.6589
0.22	0.128207	1.1144	2.8263	0.72	0.800534	1.2506	-1.7909
0.23	0.139489	1.1416	2.6186	0.73	0.812948	1.2320	-1.9326
0.24	0.151033	1.1669	2.4267	0.74	0.825168	1.2119	-2.0850
0.25	0.162820	1.1902	2.2493	0.75	0.837180	1.1902	-2.2493
0.26	0.174832	1.2119	2.0850	0.76	0.848967	1.1669	-2.4267
0.27	0.187052	1.2320	1.9326	0.77	0.860511	1.1416	-2.6186
0.28	0.199466	1.2506	1.7909	0.78	0.871793	1.1144	-2.8263
0.29	0.212059	1.2678	1.6589	0.79	0.882793	1.0851	-3.0513
0.30	0.224818	1.2838	1.5356	0.80	0.893487	1.0533	-3.2953
0.31	0.237731	1.2986	1.4202	0.81	0.903851	1.0191	-3.5596
0.32	0.250786	1.3122	1.3119	0.82	0.913859	0.9821	-3.8456
0.33	0.263972	1.3248	1.2100	0.83	0.923483	0.9421	-4.1542
0.34	0.277279	1.3364	1.1138	0.84	0.932690	0.8989	-4.4858
0.35	0.290697	1.3471	1.0228	0.85	0.941449	0.8523	-4.8399
0.36	0.304218	1.3569	0.9364	0.86	0.949724	0.8021	-5.2142
0.37	0.317832	1.3659	0.8542	0.87	0.957478	0.7480	-5.6044
0.38	0.331532	1.3740	0.7757	0.88	0.964671	0.6899	-6.0024
0.39	0.345310	1.3814	0.7005	0.89	0.971263	0.6279	-6.3954
0.40	0.359157	1.3880	0.6282	0.90	0.977217	0.5621	-6.7639
0.41	0.373068	1.3939	0.5585	0.91	0.982494	0.4928	-7.0797
0.42	0.387034	1.3992	0.4910	0.92	0.987064	0.4208	-7.3037
0.43	0.401049	1.4038	0.4255	0.93	0.990905	0.3472	-7.3852
0.44	0.415107	1.4077	0.3617	0.94	0.994009	0.2738	-7.2633
0.45	0.429201	1.4110	0.2994	0.95	0.996389	0.2029	-6.8719
0.46	0.443325	1.4137	0.2381	0.96	0.998085	0.1375	-6.1515
0.47	0.457473	1.4158	0.1778	0.97	0.999168	0.0811	-5.0662
0.48	0.471639	1.4173	0.1182	0.98	0.999748	0.0373	-3.6244
0.49	0.485817	1.4181	0.0590	0.99	0.999968	0.0095	-1.8937
0.50	0.500000	1.4184	0.0000	1.00	1.000000	0.0000	-0.0000



## **BIBLIOGRAPHIE**

### **ÉLÉMENTS DE MACHINES : VOLUME 2**

#### **Chapitres 9 : Dynamique de la transmission**

- [2.01] Nicolet G. : Analyse dynamique des structures au moyen du logiciel d'éléments finis ANSYS. EIF Fribourg 1991.
- [2.02] Nicolet G. : Cinématique et dynamique des corps. EIF Fribourg 1991.
- [2.03] SEW Usocome : Détermination d'entraînement avec motoréducteurs SEW . Exemples de calcul et cas d'application. Fascicule 1. SEW Haguenau 09202021/890.
- [2.04] SEW-Eurodrive : Handbuch der Antriebstechnik. Carl Hanser Verlag, München, Wien 1980.

#### **Chapitres 10 : Axes et arbres de transmission**

- [2.11] Buerhop A., O. Mahrenholtz : Rechnerangepasstes Modell zur Berechnung der Eigenschwingungen von Wellen. Konstruktion 26. (1974), H. 2, S. 41-45.
- [2.12] Falk S. : Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ingenieur-Archiv XXIV. Band, 1956, S. 216-232.
- [2.13] Falk S. : Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren. Ingenieur-Archiv XXVI. Band, 1958, S. 61-80.
- [2.14] **Logiciel ElemSoft : Arbre2D** : Détermination des efforts et des diagrammes dans une pièce isostatique à section variable.

#### **Chapitres 11 : Généralités sur les butées et les paliers**

- [2.21] Glacier : DU : Notice technique 2 : Pièces pour frottement à sec sans lubrification; Notice technique 9 : Coussinets pré-lubrifiés spécialement conçus pour utilisation dans des conditions de lubrification marginales. Glacier Metal Company, Alperton, Royaume Uni. Suisse : Tristar, Genève.
- [2.22] Lang O.R., W. Steinhilper : Gleitlager : Berechnung und Konstruktion von Gleitlagern mit konstanter und zeitlich veränderlicher Belastung. Konstruktionsbuch 31, Springer Verlag Berlin 1978.
- [2.23] Petrov N., O. Reynolds, A. Sommerfeld, A.G.M. Michell : Abhandlung über hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung. Leipzig : Oswalds Klassiker Nr. 218, 1927.
- [2.24] SKF : Rotules et paliers lisses, Catalogue 3500 F , SKF Suisse, 8603 Schwerzenbach
- [2.25] STAR : Coussinet en nylon "coussinyls", Deutsche STAR, D-8720 Schweinfurt, RFA
- [2.26] Voest-Alpine : Alzen 305, Alzen 501 Weissbronze. A-4010, Linz Austria. Suisse : Kellenberg AG, 8032 Zürich.

#### **Chapitres 12 : Butées et paliers hydrostatiques**

- [2.31] Bourqui Y. : Calcul et conception du palier radial hydrostatique. P. 3.91.504. Fribourg EIF 1992.
- [2.32] Heil M., H. Peeken : Das optimale hydrostatische Axiallager. Konstruktion 22 (1972). S. 381-386
- [2.33] Heil M. : Die Auslegung optimaler hydrostatischer Axiallager für hohe Traglasten. Konstruktion 26. (1974), S. 227-231
- [2.34] Heil M., M. Savci : Dynamische Eigenschaften hydrostatischer Axiallager bei kleinstmöglichem Gesamtleistungsaufwand. Konstruktion 27 (1975), H. 4, S. 137-141
- [2.35] Kunkel H., G. Hallstedt : Paliers hydrostatiques. La Revue du Roulement No 171 (1972)
- [2.36] Peeken H. : Hydrostatische Querlager. Konstruktion 16. (1964), H. 7, S. 266-276
- [2.37] Peeken H. : Tragfähigkeit und Steifigkeit von Radiallager mit fremderzeugten Tragdruck (Hydrostatische Radiallager).  
Teil 1 : Flüssigkeitslager. Konstruktion 18. (1966), H. 10, S. 414-420.  
Teil 2 : Gaslager. Konstruktion 18. (1966), H. 11, S. 446-451.
- [2.38] Petrovic Z. : Butée axiale hydrostatique à poches avec défaut d'alignement. P. 3.91.503, Fribourg EIF 1992.
- [2.39] **Logiciel ElemSoft : ButeeHyd** : Détermination du comportement des butées du type hydrostatique et du type hydrodynamique.

### Chapitre 13 : Butées et paliers hydrodynamiques

- [2.41] Birembaut Y. : Raideur et amortissement des paliers hydrodynamique. Méthode de calcul par éléments finis. CETIM No. 32, Senlis 1977.
- [2.42] Butenschön H.-J. : Das hydrodynamische Radialgleitlager endlicher Breite unter instationärer Belastung. Diss. Universität Karlsruhe 1976.  
Butenschön H.-J. : Berechnung instationär belasteter Radialgleitlager. Integrationsverfahren zur Lösung der Reanoldsschen Differentialgleichung. Z-VDI 120 (1978), Nr. 11, S. 531-535
- [2.43] Clément : Comportement d'une butée à patins avec plusieurs pentes D. 3.81.401, Fribourg EIF 1981
- [2.44] Fink P.A., H.H. Ott : Das instationär belastete Schwimmbüchsenlager im laminarer Betrieb bei seitlicher Schmiermittelzuführung. Konstruktion 24 (1972), S. 8-17 . Condensé de la dissertation de P.A. Fink : Das Schwimmbüchsenlager unter instationärer Belastung, ETH Zürich 1970.
- [2.45] Glienicke J. : Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors. Diss. TH. Karlsruhe 1966.  
Glienicke J., D.C. Han, M. Leonhard : Eigenschaften von Gleitlagern bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten. Konstruktion 33 (1981), H. 11, S. 441-448.
- [2.46] Hohn A. : Les paliers des turbogroupes à vapeur. Revue Brown Boveri 3-75, P. 72-83.
- [2.47] Kellenberg W. : Maschinendynamik I & II. Vorlesung im Sommersemester 1982. ETH Zürich.
- [2.48] Klumpp R. : Die Eigenschaften von Kippsegment-Radiallagern. Konstruktion 28. (1976), H. 8. S. 320-324.
- [2.49] Knöss K. : Paliers lisses de turbogroupes industriels. Rev. Brown Boveri 5-80, P. 300-308.
- [2.50] Maillard E. : Butée axiale hydrodynamique à patins à pente constante unique ou double. Projet EIF 3.92.601, Fribourg 1992.
- [2.51] Nicolet R. : Comportement d'un palier cylindrique hydrodynamique avec canaux de refroidissement dans le coussinet. D. 3.80.403, Fribourg EIF 1980
- [2.52] Nordmann R. : Eigenwerte einer Welle mit Gleitlagern, Spalterregung und äusserer Dämpfung. Konstruktion 22 (1972), S. 94-99.
- [2.53] Ott H.H. : Elastohydrodynamische Berechnung der Übergangdrehzahl von Radialgleitlagern. VDI-Z. 118 (1976), Nr. 10, S. 456-459.
- [2.54] Rosberg Fr., J. Linda : Berechnungsmethode für das Optimieren der hydrodynamischen Lager HOSTAR und HOSTAX. Konstruktion 24 (1972), S. 48-54.
- [2.55] Teipel I., A. Waterstraat : Verlagerungsbahn eines dynamisch belasteten Radialgleitlagers. Konstruktion 35 (1983), H. 1, S. 11-15.
- [2.56] Sassenfeld H., A. Walther : Gleitlagerberechnungen. VDI-Forsch.-Heft 441, Düsseldorf, VDI-Verlag 1954.
- [2.57] Shawski G.S.A. : Das Verhalten dynamisch belasteter Gleitlager - Berechnung mittels elektronischer Digitalrechner. Konstruktion 22 (1972), S. 386-393.
- [2.58] Varga Z. : Paliers à segments pivotants d'un diamètre de 900 mm pour turbogroupes à vapeur. Caractéristiques et essais. Revue Brown Boveri 6-77, P. 309-320.
- [2.59] Vogelpohl G. : Betriebssicher Gleitlager : Berechnungsverfahren für Konstruktion und Betrieb. Band 1, Springer-Verlage Berlin, 1967
- [2.60] **Logiciel ElemSoft : PalierCylindrique** : Détermination du comportement des paliers radiaux du type hydrostatique et du type hydrodynamique.

### Chapitre 14 : Butées et paliers à roulements

- [2.61] Andréason S. : Durée et fiabilité des roulements. La Revue des roulements 168 (1972), p. 1-16.
- [2.62] Böhmer H.-J. : Considérations fondamentales sur la fatigue dans le contact en roulement. Technique du Roulement 1992-502, p. 4-11.
- [2.63] FAG : Roulements FAG : Programme standard. Catalogue WL 41510/2 FD
- [2.64] Ioannides E., J.G. Wuttkowski : La nouvelle théorie de la durée et ses conséquences pratiques. La Revue des roulements, Numéro spécial 89, SKF 1989.
- [2.65] Lundberg G., A. Palmgren : Dynamic capacity of rolling bearings. Acta Polytechnica, Mechn. Eng. Vol 1, No., 3 (1947)  
Dynamic capacity of rolling bearings. Acta Polytechnica, Mechn. Eng. Vol.2 No. 4 (1952).
- [2.66] Mottu A. : Guidages et paliers de machines-outils. Tiré à part d'Organisation Industrielle 1960, Cahier numéro 2.

- [2.67] Niemann G. : Maschinenelemente, Entwerfen, Berechnen und Gestalten im Maschinenbau, Erster Band, 4. berichtiger Neudruck, Springer-Verlag 1960
- [2.68] Palmgren A. : Les roulements : description - théorie - applications. SKF, 2ème édition 1967.
- [2.69] Reusner H. : Druckflächenbelastung und Oberflächenverschiebung im Wälzkontakt von Rotationskörper. Diss. Univ. (TH) Karlsruhe 1977.  
Computergestützte Analysen der Kraftverteilung in Lager-Welle-Gehäuse-Systemen. Einfluss relevanter Systemparameter. Technisches Symposium der SKF (Schweiz), 1985.
- [2.70] Rohonyi W. : Beitrag zur Frage der Starrheit der in spielfreien Wälzlagern laufenden Treibwellen von Schneckengetrieben. Konstruktion 22. (1970), H. 7, S. 248-260.
- [2.71] Schaudt B. : Optimale Wälzkörperprofilierung von Zylinderrollenlagern. Konstruktion 32. (1980), H. 1, S. 19-25.
- [2.72] Schlicht H. : Caractéristiques des matériaux adaptés aux contraintes effectives dans les roulements. Technique du Roulement 1981-1, p. 24-29.
- [2.73] Schremmer G. : Zur Lebensdauerbestimmung von Wälzlagern bei verschiedenen Ueberlebenswahrscheinlichkeit. Konstruktion 22 (1970), H. 10, S. 370-371.
- [2.74] SKF : Catalogue général, 4000 F, 1989.
- [2.75] Timken : Roulements à rouleaux coniques : Manuel technique, Sélection et analyse. The Timken Company, 5-101 - 5000 - 10/85 - 495 g.
- [2.76] Wenz von V. : Moderne Trockengleitlager. Anwendung, Auslegung, Entwicklungstendenzen. Technisches Symposium der SKF (Schweiz), 1985.
- [2.77] Wiche E. : Radiale Federung von Wälzlagern bei beliebiger Lagerluft. Konstruktion 19. (1967), H. 5, S. 184-192.

### **Chapitre 15 : Guidages à roulements**

- [2.81] Köcher H. : Konstruktionskatalog Geradföhrungen mit Wälzkörper. VDI-Z Bd 126 (1984), H. 7, S. 233-241.
- [2.82] Schneeberger : Guidages linéaires : Rails de guidage, patins, tables sur roulements. Edition 100b/09

### **Chapitre 16 : Accouplements et joints d'arbre**

- [2.91] Duditz F., D. Diaconescu : Joints homocinétiques et joints de cardan. Ecritura tehnica, Bucuresti 1974 (original en roumain)  
Zur Kinematik und Dynamik von Tripode-Gelenkgetrieben. Konstruktion 27. (1975), S. 335-341
- [2.92] Jarchow F., R. Sturmth : Tragfähigkeit und Federsteifen von Wellenkupplungen mit federnden Laschengelenken. Konstruktion 31. (1979), H. 1, S. 33-40
- [2.93] Pahl G., E. Strauss, H.P. Bauer : Fresslastgrenze nichtgehärteter Zahnkupplungen. Konstruktion 37. (1985), H.3, S. 109-116
- [2.94] Peecken H., Chr. Troeder, D. Döpper : Angenäherte Bestimmung des Temperaturfeldes in elastischen Reifengkupplungen. Konstruktion 38. (1986), H.12, S. 485-489
- [2.95] Stamerjohanns P., D. Knips, G. Sitzmann : Digitale Simulation des dynamischen Verhaltens von nichtlinearen Antriebssträngen mit Hilfe des Simulationssprache SCALE/F : Konstruktion 37. (1985), H. 8, S. 313-319.
- [2.96] Tochtermann, F. Bodenstein : Konstruktionselemente des Maschinenbaues. 9. verbesserte Auflage, Springer Verlag Berlin, 1979, Kapitel 4.4 Kupplungen
- [2.97] xxx : Transmission : chapitre XVII dans l'Encyclopédie des sciences industrielles. Librairie Quillet, Paris 1974.

### **Chapitre 17 : Mécanismes à cames**

- [2.101] Dittrich G. : Konstruktion und Herstellung sphärischer Kurbengetriebe- Konstruktion 18. (1966), H. 10, S.421-426.  
Dittrich G., H.W. Leyendecker : Anwendungsgrenzen spezieller kombinierter Bewegungsgesetze bei Kurvengetrieben. Konstruktion 33. (1981), H. 9, S. 337-340.
- [2.102] Kerle H. : Berechnung der Eigenkreisfrequenzen einiger Schwingungsmodelle für Kurvengetriebe mit geradgeföhrtem Abtriebsglied. Konstruktion 28. (1976), H. 11, S. 423-428.
- [2.103] Kolly J.B., S. Grandjean : Calcul des mécanismes à came de divers types en particulier avec déplacement à vitesse constante. EIF. 1988.

- [2.104] Kraus R.A., E. Conrad : Malteserkreuzschaltwerke mit gleichachsigem An- und Abtrieb. Konstruktion 15. (1963), H. 10, S. 392-398.
- [2.105] Petersen E. : Kombinationsgesetze für Bewegungen mit Rast- und Umkehrlagen. Konstruktion 28. (1976), H. 3, S. 90-96.
- [2.106] Rankers H. : Rechnergestützte Konstruktion von Kurvengetrieben, ein Beitrag zur Rationalisierung der Konstruktionsarbeit. Konstruktion 22. (1970), H. 11, S. 421-427.
- [2.107] Ruckert H. : Programmsystem zur betriebsinternen Berechnung, Optimierung und Fertigung von Kurvengetrieben mittels kleiner EDV-Anlagen. Konstruktion 23. (1971), H. 10, S. 380-387.
- [2.108] Seyferth W. : Kraftschluss in einfachen Kurvengetrieben. Konstruktion 19. (1967), H. 2, S. 47-51.
- [2.109] Volmer J., J. Müller : Getriebetechnik :  
Kurvengetriebe. VEB Verlag Technik, Berlin, 1976  
Lehrbuch. 3. Auflage. VEB Verlag Technik, Berlin, 1976
- [2.110] VDI 2143, Blatt 1 : Bewegungsgesetze für Kurvengetriebe - Theoretische Grundlagen. Lois de mouvements dans les cames.
- [2.111] **Logiciel ElemSoft : Cames** : Détermination des diverses cames.

### Catalogues des divers fournisseurs

Catalogues et documents techniques sur les roulements :

- FAG** La lubrification des roulements. Publ. No. 81 103 FA  
Schmierung von Wälzlagern. Publ. Nr. WL 81 115/3 DA  
W.A.S. Wälzlagerauswahl und Wälzlagerberechnung am PC. Publ. Nr. WL 40 135 DA
- INA** Catalogue F 505 , Schaeffler Wälzlager oHG, D-6650 Homburg-Saar  
Cages à aiguilles, roulements à aiguilles. Manuel d'utilisation  
Guidages linéaires. Publication INA 601  
Elges : Rotules et embouts à rotule, H. Elges KG, D-4800 Bielefeld 14
- RMB** Roulements miniatures, Vis à billes et roulements pour mouvements longitudinaux, catalogue I3F
- SKF** Couronnes d'orientation RKS, catalogue 3135 F  
Douilles à billes. Information produit 109/I  
Les roulements dans les machines-outils, 2580F, 872-2.75 II 70  
Paliers tandem et paliers appliques avec douilles à billes. Information produit 109 (supplément)  
Rotules et paliers lisses. Catalogue 3500F - 1985-04  
Roulements à aiguilles. Catalogue 4001 F - 1991-12  
Roulements à section mince. Catalogue 3630 F. Réf. 471 - 5000 - 1985 - 10  
Roulements de précision. Catalogue 3055 F , Réf. 47 - 9000 - 1979 - 04  
Vis à roulement Transrol. Publication 3369 F (La Technique intégrale, F-73 Chambéry)
- SCHNEEBERGER** Guidages linéaires : Rails de guidage, patins, tables sur roulements. Edition 100b/09

# TABLE DES MATIÈRES

## VOLUME 2

	Page
<b>ORGANES DE TRANSMISSION DIRECTE</b>	2.1
Chapitre 9	
<b>DYNAMIQUE DE LA TRANSMISSION</b>	2.1
9.1 <b>Rappel de mécanique</b>	2.1
9.1.1 Relations générales	2.1
9.1.2 Accélération moyenne	2.2
9.1.3 Accélération à vitesse variable	2.3
9.1.4 Réduction des masses	2.4
9.2 <b>Choix de la machines motrice et des organes de transmission</b>	2.5
9.2.1 Moteur asynchrone triphasé à vitesse fixe	2.6
9.2.2 Choix du moteur et corrections	2.7
9.2.3 Moteur asynchrone à plusieurs vitesses	2.8
9.2.4 Moteur asynchrone à vitesse variable	2.9
9.2.5 Moteurs à courant continu	2.9
9.2.6 Moteurs à combustion interne	2.11
9.2.7 Moteurs hydrauliques	2.11
9.2.8 Entraînement de la machine réceptrice	2.12
9.2.8.1 Conditions de démarrage	2.12
9.2.8.2 Couples utiles variables	2.13
9.3 <b>Comportement dynamique</b>	2.13
9.3.1 Relation générale de comportement	2.14
9.3.2 Analyse modale	2.14
9.3.3 Réponse harmonique	2.15
9.3.4 Analyse dynamique générale	2.16
9.3.5 Exemple de recherche de fréquence propre	2.16
9.4 Exemples d'étude dynamique	2.17
9.4.1 Démarrage en commande directe	2.17
9.4.1.1 Valeur des couples moteur et récepteur	2.18
9.4.1.2 Recherche de l'accélération angulaire	2.18
9.4.2 Taille d'un moteur	2.19
Chapitre 10	
<b>AXES ET ARBRES DE TRANSMISSION</b>	2.21
10.1 Contraintes dans les axes et les arbre	2.21
10.1.1 Equilibre des axes et des arbres	2.21
10.1.1.1 Equilibre par projection des forces et des couples	2.21
10.1.1.2 Equilibre par réduction	2.22
10.1.1.3 Exemple de recherche d'équilibre	2.22
10.1.2 Efforts intérieurs : Méthode générale	2.23
10.1.3 Recherche des dimensions	2.24
10.1.4 Contrôle des axes	2.25
10.1.5 Pression dans les appuis	2.26
10.1.6 Contrôle des arbres	2.26
10.1.6.1 Efforts	2.26
10.1.6.2 Contraintes simples et idéales	2.27
10.1.6.3 Coefficient de sécurité	2.28
10.2 Déformations en flexion et en torsion	2.28
10.2.1 Déformation en flexion	2.28
10.2.1.1 Calcul de la déformation par la méthode de Mohr	2.29

	Page
10.2.1.2	Principe de la méthode de la matrice de transmission
10.2.1.3	Discontinuités
10.2.1.4	Utilisation de la méthode
10.2.1.5	Solution
10.2.1.6	Déformations limites
10.2.2	Rigidité flexionnelle corrigée
10.2.3	Déformation en torsion
10.3	Fréquence propre et vitesse critique
10.3.1	Considérations sur les vibrations de torsion
10.3.2	Fréquences propres d'un arbre en torsion
10.3.2.1	Modèle de calcul
10.3.2.2	Matrice de tronçon
10.3.2.3	Recherche des pulsations propres
10.3.2.4	Comportement d'une transmission élémentaire
10.3.3	Vitesse critique de flexion
10.3.3.1	Recherche simplifiée de la vitesse critique
10.3.3.2	Arbre à plusieurs masses
10.3.4	Elasticité et amortissement des appuis
10.4	Exemple de contrôle d'un arbre
10.4.1	Présentation du problème
10.4.2	Equilibre de l'arbre
10.4.3	Efforts et contraintes dans l'arbre
10.4.4	Déformations linéaires et angulaires
10.4.5	Fréquence propre et vitesse critique
	Chapitre 11
	<b>GÉNÉRALITÉS SUR LES BUTÉES ET LES PALIERS</b>
11.1	<b>Butées et paliers simples</b>
11.1.1	Contrôle des butée, palier radial et guidage
11.1.1.1	Pression et facteur d'échauffement sur la butée
11.1.1.2	Pression et facteur d'échauffement dans le palier
11.1.1.3	Guidages
11.1.1.4	Puissance perdue et échauffement
11.1.1.5	Corrections apportées sur le produit $p \cdot v$
11.1.2	Choix des matériaux pour butées et paliers
11.1.2.1	Matériaux pour le pivot ou l'arbre
11.1.2.2	Matériaux pour les surfaces de glissement
11.1.3	Valeurs de contrôle
11.1.4	Palier radial simple et coussinets
11.1.4.1	Palier radial métallique
11.1.4.2	Coussinets en matière synthétique
11.1.4.3	Palier radial composite
11.1.5	Butées simples
11.1.6	Guidages
11.1.7	Lubrification des butées, paliers et guidages
11.2	<b>Rotules lisses et embouts</b>
11.2.1	Description des principaux types de rotules
11.2.1.1	Rotules acier sur acier
11.2.1.2	Rotules sans entretien
11.2.1.3	Embouts
11.2.1.4	Lubrification
11.2.2	Charge et contrôle des rotules
11.2.2.1	Charges
11.2.2.2	Charge dynamique équivalente

	Page
11.2.2.3	Pression spécifique 2.65
11.2.2.4	Vitesse moyenne de glissement 2.66
11.2.2.5	Durée nominale d'utilisation 2.66
11.2.2.6	Charge statique équivalente 2.68
11.2.2.7	Frottement 2.68
11.3	<b>Mécanique des fluides pour butées et paliers</b> 2.69
11.3.1	Ecoulement unidimensionnel entre deux parois fixes 2.69
11.3.1.1	Hypothèses initiales 2.69
11.3.1.2	Débit dans la fente 2.69
11.3.1.3	Particularités de l'écoulement 2.70
11.3.2	Ecrasement d'un film visqueux 2.71
11.3.2.1	Film visqueux sur une surface circulaire 2.71
11.3.2.2	Film porteur entre un tourillon et un alésage 2.72
11.3.3	Déplacement d'une surface lubrifiée 2.74
11.3.3.1	Hypothèses initiales 2.74
11.3.3.2	Equation différentielle de Reynolds 2.75
11.3.4	Patin infiniment large 2.76
11.3.4.1	Répartition de la pression 2.76
11.3.4.2	Poussée par largeur unitaire 2.78
11.3.4.3	Débit dans la fente 2.79
11.3.4.4	Pertes 2.80
	Chapitre 12
	<b>BUTÉES ET PALIERS HYDROSTATIQUES</b> 2.83
12.1	<b>Patins rectangulaires de guidage</b> 2.83
12.1.1	Caractéristiques du patin à une seule poche 2.84
12.1.2	Caractéristiques d'un guidage à deux patins 2.85
12.1.3	Alimentation des patins et des butées 2.86
12.1.4	Déplacement du guidage 2.87
12.2	<b>Butées simples à alimentation centrale</b> 2.87
12.2.1	Butée circulaire à poche centrale 2.87
12.2.1.1	Poussée, pressions et débit 2.88
12.2.1.2	Pertes dans la butée 2.90
12.2.1.3	Coefficient de frottement équivalent 2.90
12.2.1.4	Rigidité de la butée 2.90
12.2.1.5	Choix des dimensions et de la pompe 2.91
12.2.2	Butée circulaire à deux seuils et une poche 2.91
12.2.2.1	Pressions et débits 2.91
12.2.2.2	Pertes dans la butée 2.93
12.2.3	Butées hydrostatiques sphériques ou coniques 2.93
12.2.3.1	Butées sphériques 2.93
12.2.3.2	Butée - palier hydrostatique tronconique 2.94
12.2.4	Butée à double effet avec poches annulaires 2.94
12.2.4.1	Géométrie de la butée 2.95
12.2.4.2	Equilibre, poussées et pressions 2.95
12.2.4.3	Butée sans charge axiale 2.97
12.2.4.4	Comportement sous la charge axiale 2.97
12.2.4.5	Pertes dans la butée 2.98
12.2.5	Exemple de calcul d'une butée hydrostatique 2.98
12.2.5.1	Dimensions des seuils 2.98
12.2.5.2	Butée hydrostatique à deux seuils et simple effet 2.98
12.2.5.3	Butée hydrostatique à deux seuils et double effet 2.99

	Page
12.3	<b>Butée hydrostatique à plusieurs poches</b>
12.3.1	Caractéristiques géométriques
12.3.2	Mise en équation de la butée
12.3.3	Débits dans la butée
12.3.4	Poussées d'une poche et de la butée
12.4	<b>Paliers radiaux hydrostatiques</b>
12.4.1	Types de paliers hydrostatiques
12.4.2	Epaisseur du film de fluide
12.4.2.1	Hypothèses, grandeurs et symboles généraux
12.4.2.2	Dimensions complémentaires dans le coussinet
12.4.2.3	Hauteur des fentes entre le coussinet et l'arbre
12.3.2.4	Positions angulaires et hauteurs particulières
12.4.3	Hauteur des fentes de calcul
12.4.3.1	Hauteur moyenne équivalente
12.4.3.2	Hauteur moyenne cubique équivalente
12.4.4	Ecoulements dans le palier
12.4.4.1	Débit dans le capillaires
12.4.4.2	Débit dans les seuils latéraux
12.4.4.3	Débit tangentiel dans la fente entre deux poches
12.4.4.4	Conservation des débits dans une poche
12.4.4.5	Pression dans toutes les poches du palier
12.4.5	Poussée résultante et équilibre de l'arbre
12.4.5.1	Expression de la poussée d'une poche
12.4.5.2	Poussée résultante
12.4.5.3	Trajectoire du centre de l'arbre
12.4.5.4	Débit de la pompe d'alimentation
12.4.6	Pertes dans le palier
12.4.6.1	Pertes dans les seuils latéraux
12.4.6.2	Pertes dans les seuils lisses entre les poches
12.4.6.3	Pertes totales pour le coussinet
12.4.7	Méthodes de calcul d'un palier hydrostatique
12.4.8	Application des éléments hydrostatiques
12.4.9	Exemple de calcul d'un palier hydrostatique
12.4.9.1	Dimensions géométriques adoptées
12.4.9.2	Caractéristiques du fluide
12.4.9.3	Caractéristiques au repos avec charge radiale
12.4.9.4	Comportement du palier en rotation
12.4.9.5	Comportement du palier avec des capillaires adaptés
	Chapitre 13
	<b>BUTÉES ET PALIERS HYDRODYNAMIQUES</b>
13.1	<b>Butées hydrodynamiques à pente unique</b>
13.1.1	Grandeurs fondamentales
13.1.2	Portance d'un patin
13.1.2.1	Solution approximative de la portance
13.1.2.2	Solution numérique de l'équation différentielle
13.1.3	Patin à pente constante de largeur finie
13.1.3.1	Portance et pression moyenne
13.1.3.2	Epaisseur minimale du film
13.1.3.3	Pertes sur le patin et coefficient de frottement
13.1.3.4	Débit de fluide entre les patins et le pivot
13.1.3.5	Qualité du contrôle de la butée
13.1.4	Calcul de la butée sous charge axiale variable
13.1.5	Exemple de contrôle d'une butée hydrodynamique



	Page
13.1.5.1	Dimensions géométriques de la butée
13.1.5.2	Choix du fluide et conditions de transfert de chaleur
13.1.5.3	Température de fonctionnement et pertes
13.1.5.4	Point de fonctionnement
13.2	<b>Butées hydrodynamiques à plusieurs pentes</b>
13.2.1	Butée avec patins à deux seuils
13.2.2	Butée avec patins à une ou deux pentes et un seuil
13.3	<b>Palier radial sous charge statique</b>
13.3.1	Grandeurs fondamentales
13.3.2	Palier à coussinet infiniment long
13.3.2.1	Hypothèses générales
13.3.2.2	Equation différentielle de Reynolds
13.3.2.3	Hauteur de la fente entre l'arbre et le coussinet
13.3.2.4	Intégration de l'équation différentielle
13.3.2.5	Angle limite d'action de la pression
13.3.2.6	Portance du palier
13.3.2.7	Pertes dans le palier
13.3.2.8	Pression maximale
13.3.2.9	Résultats numériques de calcul
13.3.3	Palier cylindrique de longueur finie
13.3.3.1	Répartition parabolique de la pression
13.3.3.2	Solution par un système d'équations aux différences
13.3.4	Calcul simplifié du palier cylindrique 180°
13.3.4.1	Caractéristiques du palier 180°
13.3.4.2	Dimensions et nombre de Sommerfeld
13.3.4.3	Coefficient de frottement équivalent
13.3.4.4	Position de l'arbre dans le coussinet
13.3.5	Calcul du palier cylindrique au moyen de formules
13.3.5.1	Excentricité, nombre de Sommerfeld et rapport B/D
13.3.5.2	Angle entre la force et la fente minimale
13.3.5.3	Coefficient de frottement équivalent
13.3.5.4	Débit de fluide dans le palier
13.3.5.5	Pression maximale du fluide sur l'arbre
13.3.5.6	Position du centre de l'arbre dans le coussinet
13.4	<b>Echanges d'énergie. Compléments techniques</b>
13.4.1	Echanges de chaleur
13.4.1.1	Transmission de chaleur
13.4.1.2	Température de calcul
13.4.1.3	Puissance perdue dans le palier
13.4.1.4	Puissances évacuées dans le palier
13.4.1.5	Effet de la température sur le jeu dans le palier
13.4.2	Conditions complémentaires à contrôler
13.4.2.1	Valeurs simples de conception
13.4.2.2	Pression au repos
13.4.2.3	Séparation des surfaces au démarrage
13.4.2.4	Vitesse limite inférieure
13.4.2.5	Alliages pour coussinet
13.4.2.6	Alignement de l'arbre et du coussinet
13.4.2.7	Lubrification
13.4.2.8	Compléments
13.4.3	Exemple de comportement d'un palier
13.4.3.1	Dimensions générales et valeurs fondamentales
13.4.3.2	Conditions de repos

	Page
13.4.3.3	Comportement en fonction de la température de calcul 2.164
13.4.3.4	Température de fonctionnement 2.164
13.4.3.5	Vitesse limite inférieure 2.166
13.5	<b>Paliers multilobes</b> 2.167
13.5.1	Paliers à deux lobes 2.168
13.5.2	Paliers à trois ou quatre lobes 2.168
13.5.3	Paliers de guidage à segments fixes 2.169
13.5.4	Paliers à segments pivotants 2.169
13.5.5	Palier à douille flottante 2.171
13.5.5.1	Dimensions géométriques et hypothèses initiales 2.171
13.5.5.2	Equilibre de la douille 2.172
13.5.5.3	Portance et comportement 2.173
13.6	<b>Palier hydrodynamique sous charge variable</b> 2.174
13.6.1	Palier infiniment long en écrasement 2.174
13.6.1.1	Relation et conditions aux limites 2.174
13.6.1.2	Mise en équation générale 2.175
13.6.1.3	Conditions aux limites avec pression nulle à $\pi \pm \phi_0$ 2.175
13.6.1.4	Conditions aux limites avec pression nulle à $+$ ou $-\pi/2$ 2.176
13.6.1.5	Cas particulier : coussinet très étroit 2.177
13.6.2	Palier de longueur finie en écrasement 2.177
13.6.2.1	Nombre de Sommerfeld $So$ 2.178
13.6.2.2	Débit relatif 2.178
13.6.2.3	Pression maximale 2.179
13.6.3	Raideur et amortissement dans le palier cylindrique 2.179
13.6.3.1	Palier cylindrique $360^\circ$ en charge dynamique 2.179
13.6.3.2	Raideur du palier radial 2.180
13.6.3.3	Amortissement dans le palier radial 2.182
13.6.4	Comportement d'un arbre centré dans des paliers 2.182
13.6.4.1	Turborotor centré dans deux paliers lisses 2.182
13.6.4.2	Stabilité d'un arbre dans deux paliers lisses 2.184
13.6.5	Paliers en charge fortement variable 2.185
13.6.5.1	Principe de la solution et charge 2.185
	Chapitre 14
	<b>BUTÉES ET PALIERS À ROULEMENTS</b> 2.187
14.1	<b>Description des paliers à roulements</b> 2.189
14.1.1	Roulements à billes 2.189
14.1.1.1	Roulements rigides à une rangée de billes 2.189
14.1.1.2	Roulements rigides à deux rangées de billes 2.190
14.1.1.3	Roulements à rotule sur billes 2.190
14.1.1.4	Roulements à billes à contact oblique 2.191
14.1.1.5	Butées à billes à simple effet 2.192
14.1.1.6	Butées à billes à double effet 2.192
14.1.1.7	Roulements Y et roulements divers 2.193
14.1.2	Roulements à rouleaux 2.193
14.1.2.1	Roulements à rouleaux cylindriques 2.193
14.1.2.2	Roulements à plusieurs rangées de rouleaux 2.194
14.1.2.3	Roulements à rotule sur rouleaux 2.195
14.1.2.4	Roulements à galets coniques 2.195
14.1.2.5	Butées à rotule sur rouleaux en tonnelet 2.196
14.1.2.6	Butées à rouleaux cylindriques ou coniques 2.196
14.1.3	Roulements et butées à aiguilles 2.197
14.1.3.1	Roulements à aiguilles avec cage individuelle 2.197
14.1.3.2	Roulements à aiguilles jointives 2.198

	Page
14.1.3.3	Butées à aiguilles 2.198
14.2	<b>Géométrie et tolérances dimensionnelles</b> 2.199
14.2.1	Dimensions extérieure 2.199
14.2.2	Jeu interne du roulement 2.200
14.2.3	Dimensions de l'arrondi 2.201
14.3	<b>Choix du type de roulement</b> 2.201
14.3.1	Direction de la charge 2.202
14.3.1.1	Recherche des réaction d'appui 2.202
14.3.1.2	Charge radiale 2.202
14.3.1.3	Charge axiale 2.202
14.3.1.4	Charge combinée 2.202
14.3.2	Prix des roulements 2.203
14.3.2.1	Roulements à billes 2.203
14.3.2.2	Roulements à rouleaux 2.203
14.3.3	Pressions et fatigue 2.204
14.3.3.1	Pressions superficielles 2.204
14.3.3.2	Surfaces d'action de la pression superficielle 2.205
14.3.3.3	Cinématique des éléments mobiles 2.206
14.3.3.4	Répartition de la pression et des contraintes 2.206
14.4	<b>Contrôle des roulements selon ISO</b> 2.207
14.4.1	Charge dynamique sur le roulement 2.207
14.4.2	Fréquence de rotation variable 2.208
14.4.3	Charges variables 2.209
14.4.4	Charges dynamique et statique de base 2.209
14.4.5	Durée nominale avant fatigue 2.210
14.4.6	Charge dynamique équivalente 2.213
14.4.6.1	Relation générale pour les roulements 2.213
14.4.6.2	Coefficients X et Y des roulements rigides à billes 2.213
14.4.6.3	Butées à billes, à rouleaux et à aiguilles 2.215
14.4.6.4	Roulements à billes à contact oblique 2.216
14.4.6.5	Roulements à rouleaux cylindriques 2.217
14.4.6.6	Renseignements complémentaires 2.218
14.4.7	Durée de vie en heures 2.219
14.4.8	Charge statique équivalente 2.220
14.5	<b>Développement des méthodes de contrôle</b> 2.221
14.5.1	Comportement du palier, de l'arbre et du logement 2.222
14.5.2	Méthode de contrôle selon FAG 2.223
14.5.3	Méthode de contrôle selon SKF 2.225
14.5.4	Exemples de détermination de la durée de vie 2.228
14.5.4.1	Roulement à rotule sur billes 2.228
14.5.4.2	Roulement à rouleaux cylindriques 2.229
14.5.4.3	Butée à billes double effet 2.230
14.5.4.4	Roulement sollicité par une charge variable 2.231
14.5.4.5	Arbre d'entrée dans un réducteur à couple conique 2.232
14.6	<b>Frottement, précharge et lubrification</b> 2.233
14.6.1	Pertes dans les roulements 2.233
14.6.1.1	Calcul simplifié des pertes 2.234
14.6.1.2	Calcul développé des pertes 2.234
14.6.1.3	Température d'équilibre 2.236
14.6.2	Fréquences de rotation 2.236
14.6.3	Etude des montages 2.236
14.6.3.1	Fixation radiale des roulements 2.237
14.6.3.2	Fixation axiale des roulements 2.239

	Page
14.6.4	Rigidité des roulements 2.239
14.6.5	Précharge 2.241
14.6.6	Lubrification 4.242
14.6.6.1	Lubrification à la graisse 4.242
14.6.6.2	Lubrification à l'huile 4.243
14.6.7	Étanchéités 4.243
14.6.7.1	Étanchéité sans frottement 4.244
14.6.7.2	Étanchéité avec frottement 4.244
14.6.7.3	Autres étanchéités 4.245
14.6.8	Conception des chemins de roulement 4.245
14.6.8.1	Matériaux pour les chemins de roulement 4.245
14.6.8.2	Exécution des chemins de roulement 4.246
14.6.9	Autres types de roulements 4.246
14.6.9.1	Roulements miniatures 4.246
14.6.9.2	Couronnes d'orientation 4.247
14.6.9.3	Roulements en acier inoxydable ou autres matières 4.247
Chapitre 15	
	<b>GUIDAGES LINÉAIRES À ROULEMENTS</b> 2.249
15.1	<b>Guidages linéaires avec cages à éléments</b> 2.249
15.1.1	Description des rails de guidage Schneeberger 2.249
15.1.2	Description des cages à éléments roulants 2.250
15.1.3	Bases techniques 2.251
15.1.4	Cinématique 2.253
15.1.5	Durée de vie des guidages 2.253
15.1.6	Exemple de charge sur les éléments 2.257
15.2	<b>Douilles à billes pour guidages linéaires</b> 2.258
15.2.1	Description des éléments 2.258
15.2.2	Capacité de charge et durée de vie 2.259
15.2.3	Facteurs influençant la capacité de charge 2.260
15.2.4	Comportement des guidages à douilles 2.262
15.3	<b>Guidages linéaires par patins à rouleaux</b> 2.263
15.3.1	Description de quelques patins à rouleaux 2.263
15.3.2	Capacité de charge et durée de vie 2.264
15.3.3	Comportement des guidages à patins 2.265
15.4	<b>Guidages linéaires monorail à chariot</b> 2.266
15.4.1	Description des composants 2.267
15.4.2	Capacité de charge et durée de vie 2.267
15.4.3	Comportement sous charge et lubrification 2.269
15.5	<b>Vis à roulement</b> 2.269
15.5.1	Description des vis à roulement 2.270
15.5.1.1	Vis à billes à transfert externe 2.270
15.5.1.2	Vis à billes à transfert interne 2.270
15.5.1.3	Vis à rouleaux satellites 2.271
15.5.1.4	Vis à recirculation de rouleaux 2.271
15.5.1.5	Flasques de montage et paliers 2.271
15.5.2	Choix et contrôles des vis à roulement 2.272
15.5.2.1	Critères pour le choix d'une vis à roulement 2.272
15.5.2.2	Nombre de tours exigé 2.272
15.5.2.3	Charge équivalente sur la vis 2.272
15.5.2.4	Fréquence de rotation limite 2.273
15.5.2.5	Contrôle du flambement 2.274
15.5.2.6	Charge statique sur le mécanisme 2.274

	Page
15.5.3	Géométrie et comportement 2.274
15.5.3.1	Dimensions de la vis 2.274
15.5.3.2	Précontrainte entre la vis et l'écrou 2.275
15.5.3.3	Rendement du mécanisme 2.275
15.5.3.4	Couple et puissance à produire 2.276
Chapitre 16	
	<b>ACCOUPLLEMENTS ET JOINTS D'ARBRE</b> 2.277
16.1	<b>Accouplements rigides</b> 2.277
16.1.1	Accouplements à plateaux avec boulons ajustés 2.277
16.1.2	Accouplements à frottement par plateaux 2.278
16.1.3	Couple transmissible par l'accouplement 2.278
16.2	<b>Taille des accouplements déformables</b> 2.279
16.2.1	Erreurs dans le positionnement des arbres 2.279
16.2.2	Couples dans la transmission 2.280
16.2.3	Méthodes de recherche de la taille 2.280
16.2.4	Principe de la méthode évoluée 2.282
16.3	<b>Description des accouplements déformables</b> 2.283
16.3.1	Accouplements à éléments métalliques 2.283
16.3.2	Accouplements à éléments en caoutchouc 2.285
16.4	<b>Transmission entre deux arbres se coupant sous un angle <math>\alpha</math></b> 2.287
16.4.1	Joint de cardan 2.287
16.4.1.1	Composants du joint de cardan 2.288
16.4.1.2	Rapport des angles de rotation 2.288
16.4.1.3	Rapport des vitesses angulaires 2.289
16.4.1.4	Accélérations angulaires 2.289
16.4.1.5	Disposition des axes dans le joint homocinétique 2.290
16.4.2	Transmission par le joint Tripode 2.291
16.4.2.1	Principe du joint 2.291
16.4.2.2	Relations cinématiques du joint 2.292
16.4.2.3	Conception du joint Tripode 2.293
16.4.2.4	Comportement du joint Tripode 2.294
Chapitre 17	
	<b>MÉCANISMES À CAMES</b> 2.295
17.1	<b>Description générale des cames</b> 2.295
17.1.1	Liaison entre les chaînons 2.295
17.1.2	Classification systématique 2.296
17.2	<b>Cames simples à profil connu</b> 2.297
17.2.1	Profils 2.297
17.2.2	Chaînes cinématiques de substitution 2.297
17.2.3	Cinématique du centre du galet 2.297
17.2.4	Cames à épaisseur constante 2.299
17.3	<b>Lois cinématiques des cames</b> 2.299
17.3.1	Mouvements imposés 2.300
17.3.2	Fonctions de transmission 2.301
17.3.3	Fonctions de transmission normée 2.302
17.3.4	Chiffres caractéristiques 2.302
17.4	<b>Fonctions utilisables</b> 2.303
17.4.1	Fonctions polynomiales 2.303
17.4.2	Fonctions trigonométriques simples 2.306
17.4.3	Fonctions trigonométriques obliques 2.306
17.4.4	Mouvements mixtes avec vitesse constante 2.308

	Page
17.4.5	Conditions particulières de calcul 2.311
17.4.6	Lois cinématiques 2.312
17.5	<b>Géométrie de la came</b> 2.313
17.5.1	Angles de pression et de transmission 2.313
17.5.2	Rayon de courbure de la came 2.314
17.6	<b>Mécanisme à came à galet sur tige centrée</b> 2.315
17.6.1	Grandeurs fondamentales 2.315
17.6.2	Mise en équation 2.315
17.6.3	Rayon de courbure 2.317
17.6.4	Profil de la came 2.317
17.6.5	Efforts et comportement 2.318
17.7	<b>Mécanisme à came à galet sur tige excentrée</b> 2.319
17.7.1	Grandeurs fondamentales 2.319
17.7.2	Mise en équation 2.319
17.7.3	Rayon de courbure 2.321
17.7.4	Tracé de la came 2.322
17.7.5	Construction de la contre-came 2.323
17.7.6	Efforts dans le mécanisme 2.324
17.7.7	Comportement dynamique du mécanisme 2.328
17.8	<b>Mécanisme à came avec galet monté sur levier</b> 2.329
17.8.1	Grandeurs fondamentales 2.329
17.8.2	Mise en équation 2.329
17.8.3	Angle de pression et rayon de courbure 2.331
17.8.4	Tracé de la came et de la contre-came 2.332
17.8.5	Efforts dans le mécanisme à levier 2.333
17.9	<b>Came en contact avec un poussoir</b> 2.335
17.9.1	Poussoir monté sur une tige coulissante 2.335
17.10	<b>Came avec poussoir sur levier</b> 2.339
17.10.1	Grandeurs fondamentales 2.339
17.10.2	Mise en équation 2.339
17.10.3	Profil de la came 2.340
17.10.4	Frottement sur les poussoirs 2.344
17.11	<b>Conception des mécanismes à cames</b> 2.344
17.11.1	Cames 2.344
17.11.2	Galets 2.345
17.11.3	Tringlerie 2.346
17.11.4	Prescription d'usinage 2.347
17.12	<b>Exemple de cinématique dans une came à levier</b> 2.347
17.13	<b>Mécanisme à croix de Malte</b> 2.350
17.13.1	Relations générales 2.351
17.13.2	Propriétés générales 2.351
17.13.3	Mise en équation du mécanisme 2.352
17.13.4	Cinématique de la croix de Malte 2.354
17.13.4.1	Mouvement d'entraînement uniforme 2.354
17.13.4.2	Mouvement d'entraînement varié 2.354
17.13.4.3	Constante k 2.354
17.13.4.4	Contrôle des grandeurs cinématiques 2.355
17.13.5	Propriétés du mécanisme 2.356
17.13.5.1	Géométrie et cinématique 2.356
17.13.5.2	Variations intéressantes du mécanisme 2.357
17.13.5.3	Systèmes d'arrêt 2.358
17.13.6	Efforts et conditions de transmission 2.358

17.13.6.1	Puissances, couples menant et mené	Page 2.358
17.13.6.2	Efforts entre le doigt et la coulisse	2.359

**Lois normées pour les mouvements dans les cames**

**Tables numériques**

Loi normée : Polynomiale P-3-4-5	2.362
Loi normée : Polynomiale P-3-4-5-6	2.363
Loi normée : Polynomiale P-3-4-5-6-7-8	2.364
Loi normée : Sinoïde de Bestehorn	2.365
Loi normée : Sinusoïde avec 3 <sup>ème</sup> harmonique	2.366
Loi normée : Sinusoïde avec 3 <sup>ème</sup> et 5 <sup>ème</sup> harmonique	2.367
Loi normée : Trapézoïdale + harmonique	2.368
Loi normée : Couple optimal	2.369
Loi normée : Accélération optimale	2.370

**Bibliographie**

Eléments de machines : Volume 2	2.371
Table des matières	2.375

Index dans le : Volume 3

## TABLEAUX

		Page
9.1	Couples moteur et récepteur en fonction de la fréquence de rotation	2.19
10.1	Contraintes admissibles dans les arbres en calcul élémentaire	2.25
10.2	Déformations limites admissibles dans les axes et les arbres	2.33
10.3	Géométrie, charges réparties, efforts dans l'arbre de machine	2.43
10.4	Déformations linéaire et angulaire de l'arbre	2.46
11.1	Pressions moyennes, facteurs d'échauffement admissibles	2.55
13.1	Grandeurs caractéristiques pour le palier 360° infiniment long	2.144
13.2	Rapport géométrique B/D, pression moyenne et vitesse dans le palier radial	2.157
13.3	Caractéristiques mécaniques et physiques des alliages pour coussinets	2.161
13.4	Comportement du palier hydrodynamique et température d'équilibre	2.165
13.5	Recherche de la température d'équilibre	2.166
14.1	Facteurs de service pour le calcul élémentaire de la charge	2.208
14.2	Facteurs de fiabilité $a_1$	2.211
14.3	Valeurs des coefficients X et Y pour les roulements rigides à billes	2.214
14.4	Charges axiales de calcul sur les roulements à contact oblique à une rangée	2.217
14.5	Durée de vie souhaitée pour les roulements et les butées	2.220
14.6	Valeur du facteur de pollution pour différents degrés de pollution	2.227
14.7	Coefficient de frottement équivalent et angle de rotulage admissible	2.234
14.8	Déformation élastique des roulements sous charge radiale ou axiale	2.240
15.1	Capacité de charge $C$ et facteurs de correction $f_H$ et $f_T$	2.255
15.2	Facteurs de correction de dureté et d'orientation de la charge	2.261
16.1	Facteurs de correction et relations de calcul (DIN 740 – 2)	2.281
17.1	Fonctions de transmission polynomiales normées	2.305
17.2	Fonctions de transmission trigonométriques normées	2.307
17.3	Choix des matières pour la fabrication des cames et des rouleaux	2.345
17.4	Caractéristiques du mécanisme à croix de Malte extérieure	2.356